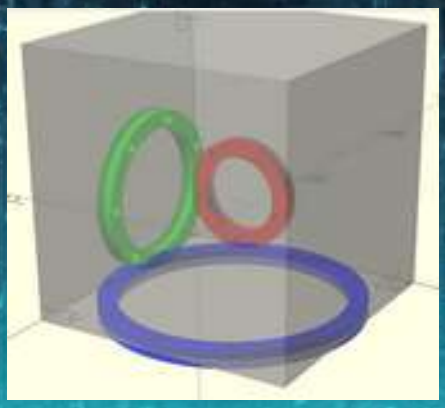
Научная монография

Теория чисел с позиции статистической физики

Простые числа, как метаязык Вселенной

Марат Авдыев



2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

Союз "Сибирский Центр медиации"
2026

Научная монография

'Теория чисел с позиции статистической физики.

Простые числа, как метаязык Вселенной'

Марат Авдыев

29 января 2026 г.

Союз 'Сибирский Центр медиации'

УДК 511, 515.1б 530.1, 37.013

М. А. Авдыев. 'Монография Теория чисел с позиции статистической физики. Простые числа, как метаязык Вселенной.' Издание 4-ое

Издательство Союз Сибирский Центр медиации 2026 662 стр.

В 1637 году Пьер де Ферма написал на полях "Арифметики Диофанта", о "нахождении воистину чудесного доказательства неразрешимости уравнения Диофанта $a^n + b^n = c^n$, где натуральное $n > 2$, но узкие поля книг не позволили ему привести полное доказательство". Сотни страниц были потрачены выдающимися математиками Западного мира на поиск доказательств, и научный поиск продолжается. Оказалось, что ключ к элементарному доказательству находился в физике. Гипотеза Римана о том, то все нетривиальные нули $\zeta(s)$-функции расположены на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$ является следствием корпускулярно-волнового дуализма. ABC-гипотеза, утверждающая, что для трёх взаимнопростых чисел, удовлетворяющих соотношению $a + b = c$, произведение простых делителей a, b и c обычно ненамного меньше c, решается средствами статфизики, равно как и проблема Гольдбаха-Эйлера о возможности представления чётного числа свыше двух в виде суммы двух простых чисел. В этой работе автор приводит методы доказательства, понятные школьникам и студентам, на основе синтеза ряда наук, включая физику. Сделано обобщение о роли простых чисел во Вселенной.

M. A. Avdyev. Monograph 'An introduction to number theory from the perspective of statistical physics. Prime numbers as the metalanguage of the universe.'

Publishing by Union Siberian Center of mediation 2025-2026

In 1637, Pierre de Fermat wrote in the margins of Diophantine Arithmetic that he had discovered a remarkable proof of the unsolvability of the Diophantine equation $a^n + b^n = c^n$, where $n > 2$. However, the narrow margins of the book prevented him from providing a full proof. Prominent mathematicians in the Western world have spent hundreds of pages searching for proofs, and the scientific search continues. However, it has since emerged that the key to the elementary proof lies in the physics. The Riemann hypothesis, which concerns all nontrivial zeros of the $\zeta(s)$ - functions are located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$ of the complex plane, is a consequence of particle-wave duality, symmetry. The ABC hypothesis, which states that for three coprime numbers satisfying the relation $a + b = c$, the product of the prime divisors a, b and c is usually not much less than c, is solved by means of statistical physics. The same is true of the Goldbach–Euler problem concerning the possibility of an even number greater than 2 being the sum of two prime numbers. In this monograph, the author provides proof methods that are understandable to schoolchildren and students, based on the synthesis of several sciences, including physics. The author also makes a generalization about the role of prime numbers in the universe.

(c) СЦМ
Все авторские права защищены.
https://emediator.ru

Опубликовано: 2023, сент 2024, дек 2025, янв. 2026 Союз 'Сибирский Центр медиации'

Оглавление

Оглавление iii

Предисловие xi
1 Почему были выбраны головоломки теории чисел? xi

Preface xiii
2 Why were the number theory puzzles chosen? xiii

к 3-му изданию 1
0.3 Предисловие 4-му изданию 1

Preface to the Third Edition 2
0.4 Preface to the 4th Edition 2

Дзета-функция Римана 3

1 Дзета-функция Римана 5
1 Введение 5
1.1 Бесконечность числа нетривиальных нулей 7
2 С позиции физики 12
2.1 Фазовое пространство и энтропия 16
2.2 Статистический вес и плотность состояний 19
3 Алгебра и симметрия 24
3.1 Симметрия. Группы. Характеры 29
4 Распределение Гиббса и Дзета-функция 35
5 Ортогональность. Сепарабельность. p-Число 41
6 Дифракционная решётка. Естественный базис для волновой функции. 49
6.1 Обобщение аналогий естественного базиса и формулы дифракционной решетки 55
7 Теорема о квантовой природе p-чисел 58
8 Гипотеза Римана для школьников 70

Проблема Гольдбаха 77

2 Проблема Гольдбаха-Эйлера 79
1 Введение 79
2 Подготовка к доказательству 81
3 Факторизация статсуммы и функция Эйлера 85

4 Конечномерная матрица. Естественный базис 86
5 Дифракционный подход к анализу периодических структур 87
6 Связь с групповой структурой 92
7 Китайская теорема об остатках 95
7.1 КТО в модели естественного базиса 98
7.2 Доказательство КТО 100
8 Решение находится в термодинамике 106
8.1 Размерность пространства 109
8.2 Оператор проектор P 110
8.3 След оператора 111
8.4 Характер группы 112
8.5 Постулат Бертрана 116
8.6 Аддитивность Tr. Характеры. Разложение представлений . . . 117
9 Доказательство гипотезы Гольдбаха-Эйлера 119

ABC-гипотеза: от эксперимента к теории 123

3 ABC-гипотеза: от эксперимента к теории 125
1 Введение 125
2 Ключевая идея доказательства 125
3 S и конечномерная редуцированная матрица 130
3.1 $\hat{\rho}$ - матрица плотности и S фон Неймана 131
4 Линейные пространства 140
5 ABC-гипотеза. Нет квантовых корреляций 148
6 Оценка дефекта тройки 151
7 Флуктуации 155
8 Теорема Чебышёва 164
9 ABC@home проект и дискретность фазового пространства 175
10 С позиции школьной термодинамики 179
11 Аналогии из систем ЛДУ 182

Теорема Ферма на школьном глобусе 185

4 Зачем школьнику ВТФ? 187
1 Введение 187
2 Формулировка теоремы 188
3 Человеческий разум против искусственного интеллекта 189
4 Мысленные эксперименты 190
5 Проект, моделирующий ВТФ 192
6 Симметрия. Изотропность и однородность пространства 193
7 Пифагоровы 3-ки $\exists$ только на 2D плоскости 198

8 Непрерывность. Гомеоморфизм. Классы эквивалентности 201
9 Сведения из теории множеств 202
10 Метрическая топология. Конструкция 205
11 Цепь множеств из n-кубов 208
12 Аксиомы Евклида в XXI 214
13 Доказательство в одну формулу и чертёж 221
14 Гипотеза Леонарда Эйлера 224
15 Вывод 228

Арифметические функции и термодинамика 234

5 Арифметические функции и термодинамика 236
1 Функция Эйлера 237
2 Функция Мангольдта 240
3 Функции Чебышёва и энтропия 243
4 Функция Мёбиуса $\mu(n)$ 250
5 Связь разности гиперкубов, знаковой меры и функции Мёбиуса . . . 252
6 Определение преобразования Дирихле 255
6.1 Примеры преобразований Дирихле 256
7 Свёртка Дирихле и ряды Дирихле 257
8 Место p - чисел в физике 260
9 Ряд Гранди и квантовая неопрелённость 261

The Riemann hypothesis and statistical physics 264

6 The Riemann hypothesis from the standpoint of statistical physics 266
1 Introduction 266
2 The Infinity of Non-Trivial Zeros 268
2.1 Phase space and entropy 277
2.2 Statistical weight and density of states 279
3 Algebra and Symmetry 284
4 Symmetry. Groups. Characters 289
5 Gibbs distribution and Zeta function 294
6 Orthogonality. Separation. p-Number 299
7 Diffraction Grating. The natural basis for the wave function. 306
7.1 Generalization of analogies of the natural basis and the diffraction grating formula 310
8 The theorem on the quantum nature of p numbers 313
9 The Riemann hypothesis for schoolchildren 324

The Goldbach conjecture from the eye of physicist **331**

7 Goldbach-Euler conjecture from the eye of physicist **333**
1 Holbach's conjecture . . . 333
2 Preparation for the proof . . . 336
3 Factorization of Z and Euler function . . . 339
4 A finite-dimensional matrix. The natural basis . . . 340
5 Analyzing Periodic Structures through Diffraction . . . 341
6 Relationship to the group structure . . . 346
7 The Chinese Remainder Theorem . . . 349
7.1 CRT is in the natural basis model . . . 351
7.2 Proof of CRT . . . 353
8 The solution is found in thermodynamics . . . 359
8.1 The dimension of space . . . 361
8.2 Projector operator P . . . 362
8.3 Operator's trace . . . 364
8.4 Group Character . . . 364
8.5 Bertrand's Postulate . . . 368
8.6 Additivity of Tr. Characters. Decomposition of Representations . . . 369
9 Proof of the Goldbach-Euler conjecture . . . 371

ABC Conjecture: From Experiment to Theory **374**

8 The ABC conjecture from the Eye of physicist **376**
1 Formulations of ABC conjecture . . . 376
2 The key idea of Prove . . . 376
3 S and a finite-dimensional reduced matrix . . . 380
3.1 $\hat{\rho}$ - the density matrix and S von Neumann . . . 381
4 Linear spaces . . . 390
5 ABC-hypothesis. There are no quantum correlations . . . 398
6 Estimation of the defect of a triple . . . 400
7 Fluctuations . . . 404
8 Chebyshev's theorem . . . 412
9 ABC@home project and discreteness factor of the phase space . . . 423
10 From the perspective of school thermodynamics . . . 427
11 Analogies from SLDE systems . . . 430

Fermat's Last Theorem on the School Globe **433**

9 Fermat's Last Theorem on the school Globe **435**
1 Introduction . . . 435

2 Discussed questions . . . 435
3 Human mind vs Artificial Intelligence? . . . 437
4 Mental experiments . . . 437
5 Objections . . . 439
6 Symmetry. Isotropy and homogeneity of space. . . . 439
7 Why do Pythagorean triples only ∃ on the 2D? . . . 442
8 Continuity. Homeomorphism. Equivalence classes . . . 446
9 An understanding of Set Theory. . . . 446
10 Cardinality of Set and Equivalence function . . . 447
11 Metric topology . . . 448
12 Pairwise disjoint equivalence classes . . . 450
13 Chain of n-cubes . . . 451
14 Euclid's Axioms in XXI . . . 456
15 A paradox . . . 458
16 Proof in a single formula and drawing . . . 461
17 The Leonard Euler hypothesis . . . 465
18 Summing up . . . 468
19 Conclusuion . . . 469

Arithmetic functions and thermodynamics **473**

10 Arithmetic functions and thermodynamics **475**
1 Euler's Totient Function . . . 475
2 The Mangold function . . . 479
3 Chebyshev functions and entropy . . . 482
4 Mobius function $\mu(n)$ . . . 489
5 Relation of hypercube difference, sign measure, and Mobius function . . . 490
6 Definition of the Dirichlet transformation . . . 493
6.1 Examples of Dirichlet transformations . . . 494
7 Dirichlet convolution and Dirichlet series . . . 495
8 Place of p - number in physics . . . 498
9 Grundy series and Schrodinger's quantum uncertainty . . . 500

Парадокс и предубеждение 502

11 Парадокс и предубеждение 504
1 Введение . . . 504
2 Цель социологического исследования . . . 506
3 Мораль и наука . . . 509
4 Общепризнанные, но ложные теории . . . 511
5 Мораль стран Объединенного Запада . . . 513

6 Метаязык Вселенной 517

Paradox and Prejudicee **520**

12 Paradox and Prejudice **522**
1 Introduction 522
2 Purpose of the sociological research 523
3 Popular American Press vs RSCI 526
4 Morality and Science 526
5 Generally accepted but false theories 528
6 The morality of the countries of the United West 532
7 Scientific discoveries are of global importance 535
8 The Metalanguage of the Universe 537

Приложения 540

13 Приложение 542
1 Пространство Лебега, Гильберта. Операторы 542
1.1 Базис из линейно независимых функций 542
2 Характеристическая $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$ 545
3 Прямое произведение групп 548
4 Характер конечной абелевой группы 550
5 Характеры $\chi^{(R)}$ регулярного представления 552
6 Функция Грина. Пропагатор 554
6.1 Интегральное уравнение Фредгольма 559
7 Статистическая матрица. 561
8 Каноническое распределение Гиббса 564
9 Вырождение энергетических уровней 568
10 Группа на основе нормированных статсумм 570
11 Функции от матриц 572
12 Подробнее об S фон Неймана 575
13 Обобщение $\mathrm{Rad}(x)$ на $\mathbb{R}$ 578
14 Для любознательных читателей 580

Appendix **582**

14 Appendix **584**
1 The Lebesgue, Hilbert space. Operators 584
1.1 Basis of linearly independent functions 584

2 Characteristic $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$ 587
3 Direct product of groups 590
4 Character of a finite Abelian group 591
5 Characters $\chi^{(R)}$ regular representation 594
6 Green's function. Propagator 595
6.1 The Fredholm integral equation 600
7 Statistical matrix. 602
8 Canonical Gibbs distribution 605
9 Degeneration of energy levels 608
10 Group based on normalized statsums 610
11 Functions of matrices 612
12 Learn more about Von Neumann's S 615
13 Generalization of Rad(x) to $\mathbb{R}$ 618
14 For the curious readers 619

15 Послесловие. Afterword 622
1 Заключение. Поиск истины тернист 622
2 Дискуссии 622
3 The pursuit of veracity 623

Рецензия 627
4 Рецензия на монографию 627

630
5 Review of Monograph 630

Литература и др. источники 633

Об авторе 644

Список таблиц

6.1 Связь между алгеброй, статфизикой и оптикой дифракционных явлений 94
7.2 Сравнение традиционной позиционной системы и системы остаточных классов (СОК) 103

6.1 Любая сфера из прообраза отображается в образ отдельно по каждому элементу. 196
7.2 Симметричность в четырёхмерном пространстве n = 4. 201
11.3 Биномиальные коэффициенты 210
12.4 Постулаты Евклида в дискретном пространстве 214

8.1 Математическая модель. Алгебра. 261

6.1 The relationship between algebra, statistical physics, and optics of diffraction phenomena 348
7.2 Comparison of the traditional positional system and the residual class system (SRC) 356

6.1 Any spheres from preimage can be mapped into image by each element separately. 441
7.2 Symmetry in four-dimensional space n = 4. 446
13.3 Binomial coefficients 453
14.4 The postulates of Euclid in discrete space 456

8.1 Mathematics model. Algebra. 499

Предисловие

1 Почему были выбраны головоломки теории чисел?

Почему автор выбрал в качестве объекта исследования Гипотезу Римана о так называемых нетривиальных нулях ζ- функции и бинарную проблему Гольдбаха - Эйлера, ABC-гипотезу наконец, Великую теорему Ферма (ВТФ)? - все эти проблемы объединяет одно: очень простая формулировка, но чрезвычайно сложный поиск доказательства. Пожалуй, нет такого школьника, который не слышал бы о Великой теореме, справедливо относимой к математическим жемчужинам. Не меньший интерес представляет ABC-гипотеза, которая оказалась не настолько популярной среди широкой аудитории читателей, но также обросла своими легендами, прежде всего из-за беспрецедентно объемного доказательства талантливейшего математика из Токийского университета (свыше 500 страниц).

Изначально автору удалось доказать ВТФ с помощью высшей математики, анализа устойчивости гипотетической конструкции в виде трех вложенных гиперкубов. Оказалось, что любая малейшая флуктуация неизбежно приводит к уничтожению симметрии конструкции.

Это показалось очень странным, ведь материализм постулирует постоянное движение. В этом сложном виде автор пересказывал ВТФ перед разными аудиториями слушателей, включая студентов гуманитарного профиля, одновременно продолжая поиск простого доказательства путём создания учебных фильмов, 3D-моделирования, написания книги Восхождение к вершине гиперкуба, заочно споря с апологетами проамериканской версии доказательства. Их деструктивная критика, порою на условиях анонимности, также сыграли положительную роль в поиске простого, но одновременно математически строгого доказательства - оно приведено в Главах 4 и 8.

Тем не менее краткая версия доказательства ВТФ - российская версия встретила прохладный приём адептов про-западной науки. Возникала новая проблема - отсутствие системы государственной регистрации научных открытий в России. Эта система была полностью уничтожена в период неоправданных ожиданий от органичной интеграции российской науки в общемировую - (читайте - в Западную), есть лишь одна официально признанная ста сорока страничная Американская версия доказательства ВТФ, и это - Истина в конечной инстанции!

В этой монографии изложены российские версии доказательства великих математических жемчужин. Они доступны понимания широкой аудитории - школьникам старших классов. Это миллиарды людей на Земле. С этой целью в монографии - Главы. 1-4 и 9, а также приложения, переведены и на английский язык (Главы 5-8 и 10), остающийся латынью XXI века. Вместе с тем экономика, торговля, финансы и

технологии стремительно набирают темп в России, в странах БРИКС и Азиатско-Тихоокеанского региона, а мир становится многополярным. Быть может, благодаря читательской поддержке и нейросетям, появятся переводы и на другие языки.

Автор убеждён, что «открытие по плечу» каждому школьнику, что искусственный интеллект должен служить человеку, усиливая его научный потенциал, а не становиться инструментом верификации доказательства и единственным критерием истинности (такая негативная тенденция прослеживается в Западной математике, ориентированной на поиск доказательств, доступных для понимания лишь узким кругом избранных авторитетов).

Современная школьная программа далека от сбалансированности, она перегружена разрозненными фактами, сведениями. Поиск наглядного, краткого доказательства ВТФ - это повод задуматься над системностью школьного образования, отвечающего нуждам XXI века в условиях острого противостояния России со странами объединённого Запада. Здесь идут в ход недобросовестные приёмы: лже-научные экспертизы, подмена обсуждаемого тезиса (проще говоря, демагогия), постоянно изменчивая позиция, анонимки, личные выпады, отказ от диалога и др. Здесь пригодился многолетний опыт Союза Сибирский Центр медиации по борьбе с «грязными приёмами» в конфликтах. Именно благодаря поддержке этой организации была создана данная монография.

Школьники изучают слоистое строение Земной коры, теорему Пифагора, скалярное произведение векторов, закон сохранения вещества при химических реакциях, конгруэнтность фигур, симметрию. Ряд базовых понятий из высшей математики, например, понятие однородности, изотропности пространства преподают на уроках природоведения, труда и физики. С помощью принципов симметрии поддаются решению задачи, требующие в общем случае знания основ интегрирования и дифференцирования, умения решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Наконец, уроки черчения и астрономии, изучение памятников мирового культурного наследия, основ логики и философии — всё это поможет в поиске доказательства ВТФ с опорой на школьные знания. Налицо преимущества междисциплинарного подхода.

Автор убеждён, что излагаемая в данной публикации краткая версия ВТФ способствует концентрации внимания, стимулирует интерес к творческой учёбе у школьников и студентов. Но есть и более веская причина - борьба с предубеждением. И не случайно глава 6 книги посвящена борьбе с ошибочными предубеждениями в науке. С этих позиций Великая головоломка может рассматриваться как индикатор суверенизации российской науки. Закономерно враждебное отношение апологетов Западных стран к такому доказательству, поскольку оно оспаривает господствующие стереотипы о лидерских позициях США в точных науках. Об этом будет рассказано в главе 6.

Помимо цитат ниже в тексте курсивом либо цветом отмечены научные термины, значение которых подробно раскрыто в списке прилагаемой литературы и на специализированных сайтах, форумах, посвященных точным наукам.

Preface

2 Why were the number theory puzzles chosen?

Why did the author choose Fermat's Last Theorem (FLT) and the ABC hypothesis, the Riemann hypothesis about the so-called nontrivial zeros of the ζ function and the binary Goldbach-Euler problem as the object of research? - All these problems have one thing in common: a very simple formulation, but an extremely difficult search for proof.

It is also noteworthy that the ABC conjecture has not gained widespread acceptance among the general public, despite the impressive proof presented by the renowned mathematician from the University of Tokyo.

The author initially demonstrated the validity of FLT through the application of advanced mathematical techniques, specifically by analysing the stability of a hypothetical structure comprising three nested hypercubes. It was demonstrated that the slightest fluctuation inevitably results in the destruction of the structure's symmetry. In this intricate form, the author recounted the FLT to diverse audiences, including those of a humanistic inclination, while persisting in his pursuit of a straightforward proof through the creation of educational films, 3D modelling, and the authorship of a book entitled "Climbing to the Top of the Hypercube". Additionally, he engaged in absentia with proponents of the pro-American interpretation of the proof, offering arguments in response to their criticisms. The destructive criticism, which was sometimes expressed anonymously, also had a positive impact on the search for a simple yet mathematically rigorous proof, which is presented in Chapter 2 of the book.

Nevertheless, the author's version of the FLT proof – the Russian one – was met with a lukewarm response from those who adhere to pro-Western science. A new issue emerged: the absence of a system for registering scientific discoveries at the state level in Russia. This system was entirely dismantled during the period of unwarranted expectations regarding the integration of Russian science into the global scientific community (that is to say, the Western scientific community).

It would appear that a definitive proof of the FLT does not exist. This may be due to a lack of understanding of the subject matter, as there is only one officially recognised version of the FLT proof, which is a 140-page American text.

This monograph presents Russian versions of the proof of the great mathematical gems. They are accessible to a wide audience of high school students. There are billions of people on Earth. For this purpose, the monograph contains Chapters. 1-4 and 9, as well as appendices, have also been translated into English (Chapters 5-8 and 10), remaining Latin of the 21st century. This equates to a global population of billions. For this purpose, the monograph, specifically Chapters 4 and 5, has been translated into English. The term

"21st-century Latin" is used to describe a particular style of writing that emerged in the early 21st century. Concurrently, the economies, trade, finance and technology of the countries in Russian Federation, BRICS, the Asia-Pacific region are experiencing accelerated growth, and the world is becoming multipolar. It is hoped that, thanks to the reader's support and the use of technology for the preparation of scientific texts, translations into other languages will appear.

The author is convinced that every student has the potential to make a significant discovery. Furthermore, the advancement of artificial intelligence should be directed towards enhancing human capabilities, rather than solely focusing on verifying evidence and establishing a singular criterion for truth. This approach is evident in Western mathematics, where the emphasis is on the pursuit of evidence that is limited to a select group of experts.

The contemporary school curriculum is, in the view of many, unbalanced and overloaded with disparate facts and information. The search for a clear and concise proof of the fundamental theorem of calculus provides an opportunity to reflect on the consistency of school education that meets the needs of the 21st century.

The preparation of this monograph was made possible by the Siberian Centre of Mediation, the Union and the support of this organisation.

The curriculum includes the study of the layered structure of the Earth's crust, the Pythagorean theorem, the scalar product of vectors, the law of conservation of matter in chemical reactions, congruence of shapes, and symmetry. A number of fundamental concepts from advanced mathematics, such as the notion of uniformity and the isotropy of space, are introduced in the natural science, labour and physics lessons. The application of symmetry principles enables the resolution of problems that typically necessitate an understanding of fundamental integration and differentiation concepts, as well as the capacity to solve systems of partial differential equations. In conclusion, the curriculum includes lessons in drawing and astronomy, the study of monuments of world cultural heritage, and the basics of logic and philosophy. These will assist students in searching for evidence of the FLT based on their school knowledge. It is evident that an interdisciplinary approach offers significant advantages.

It is this author's conviction that the concise exposition of FLT presented in this publication will foster concentration, stimulate interest in creative learning among schoolchildren and students. However, there is a more compelling rationale for this approach, namely the fight against prejudice. It is noteworthy that chapter 6 of the book is devoted to the fight against erroneous biases in science.

In addition to the quotations below, scientific terms are marked in the text colortealin italics or in color, the meaning of which is disclosed in detail in the list of attached literature and on specialized websites and forums dedicated to exact sciences.

Предисловия к 3-му и 4-му изданиям

Может показаться забавным, что ранее эта книга создавалась "задом наперед"(путь познания бывает замысловат и тернист), но в этом издании главы расположены в логическом порядке. От гипотезы Римана до Великой теоремы Ферма. Что между ними общего? - физика и симметрия. Развитие этого подхода оказалось плодотворным при поисках доказательства гипотезы Римана о расположении так называемых нетривиальных нулей ζ-функции на оси $s = \frac{1}{2} + it$, что является следствием корпускулярно-волнового дуализма, симметрии и возможности отображения между двумя алгебраическими системами, которое переносит множество элементов одной системы в другую (простые числа), сохраняя все операции и отношения.

Продолжает тему теории чисел в этой монографии бинарная проблема Гольдбаха -Эйлера о том, что каждое целое четное больше двух раскладывается на сумму двух простых чисел, имеет очевидную связь со статистической физикой и симметрией.

ABC-гипотеза (ABC conjecture). Она также доказана, с позиции статистической физики, что позволило значительно упростить изложение и не потерять главную идею доказательства: простые числа связывают макромир с микромиром, который в свою очередь, подчиняется законам квантовой физики.

Наконец, Великая теорема Ферма о невозможности существования Пифагоровых троек в пространстве размерности три и более является проявлением свойства симметрии (взаимного исключения свойства центральной симметрии и отношения эквивалентности в конструкции, моделирующей уравнение с позиции теории множеств: $c^n \backslash b^n = a^n, \quad n > 2$). Можно значительно упростить доказательство теоремы и сократить объём искомого решения за счёт применения ряда физических принципов, знакомых школьникам.

0.3 Предисловие 4-му изданию

В четвёртом издании монографии расширена глава "Проблема Гольдбаха", включена китайская теорема об остатках, проанализирована связь простых чисел с дифракционной решёткой и другими периодическими структурами физики. Кроме того, сделан вывод о равенстве размерности пространства исследуемой системы сумме характеров групп и, как следствие, сепарабельность пространства. Исправлены ошибки, добавлены фотографии и краткие биографии учёных, внёсших вклад в теорию чисел.

Для охвата широкой читательской аудитории автор приложил специальные усилия для поиска наглядных аналогий между сложными математическими понятиями и материалом школьной программы. Эту монографию можно читать выборочно, как индивидуально, так и с преподавателем либо в составе группы одноклассников / студентов. Теория чисел изобилует парадоксами, позволяющими по-новому взглянуть на окружающий нас мир, увидеть его красоту. Математика и физика — это основа всех наук и обороноспособности страны. Кроме того, без своей науки и техники немыслимо развитие суверенной страны.

Preface to the 3rd and 4th editions

It may seem amusing that this book was previously written ”backwards” (the path of knowledge can be intricate and thorny), but in this edition, the chapters are arranged in logical order. From the Riemann Hypothesis to Fermat’s Last Theorem. What do they have in common? — physics and symmetry. The development of this approach proved fruitful in the search for a proof of the Riemann Hypothesis concerning the location of the so-called *nontrivial zeros* of the ζ-function on the line $s = \frac{1}{2} + it$. This location is a consequence of wave-particle duality, symmetry, and the possibility of a mapping between two algebraic systems that transfers a set of elements from one system to another (prime numbers), preserving all operations and relations. The theme of number theory in this monograph continues with the binary Goldbach–Euler problem—the statement that every even integer greater than two is the sum of two primes—which has an obvious connection to statistical physics and symmetry.

The ABC Conjecture. It too is proven from the standpoint of statistical physics, which allowed for a significant simplification of the exposition without losing the main idea of the proof: prime numbers connect the macro-world with the micro-world, which, in turn, obeys the laws of quantum physics.

Finally, Fermat’s Last Theorem, concerning the impossibility of Pythagorean triples in dimensions three and higher, is a manifestation of symmetry properties (the mutual exclusion of the property of central symmetry and the equivalence relation in a structure modeling the equation from a set-theoretic perspective ($c^n \backslash b^n = a^n, \quad n > 2$). The proof of the theorem can be significantly simplified and the scope of the sought solution reduced by applying a number of physical principles familiar to school students.

0.4 Preface to the 4th Edition

In the fourth edition of the monograph, the chapter "The Goldbach Problem" has been expanded to include the Chinese Remainder Theorem, and the connection between prime numbers and diffraction gratings and other periodic structures in physics has been analyzed. Furthermore, a conclusion is drawn about the equality of the dimensionality of the space of the studied system to the sum of group characters and, as a consequence, the separability of the space. Errors have been corrected, and photographs and brief biographies of scientists who contributed to number theory have been added.

To reach a wide audience, the author has made special efforts to find visual analogies between complex mathematical concepts and material from the school curriculum. This monograph can be read selectively, individually, with a teacher, or as part of a group of classmates or students. Number theory abounds with paradoxes that allow us to look at the world around us in a new way and see its beauty. Mathematics and physics are the foundation of all sciences and of a country’s defense capability. Moreover, the development of a sovereign country is unthinkable without its own science and technology.

Дзета-функция Римана

Дзета-функция Римана | 1

1 Введение

В этой и следующей главах представлен подход к решению восьмой проблемы Гильберта, включающей гипотезу Римана и проблему Гольдбаха-Эйлера. Предлагаемое автором доказательство опирается на верификацию путём постановки физического эксперимента с опорой на общие принципы статистической физики. Используемая автором методология основана на квантовых принципах, включающих дискретность фазового пространства, принцип неопределенности Гейзенберга и свойства симметрии, присущие исследуемой системе, которые воплощаются в решении уравнения Шредингера. Ключевым аспектом подхода является подсчёт квантовых микросостояний без повтора и возможность изолировать подсистему без ущерба для свойств изучаемых объектов. Аналитически в работе используются нормализованные статистические суммы, проанализированные с помощью алгебры и теории групп. Без ограничения общности автор вводит понятие естественного базиса волновых функций, использует аналогии с формулами Планка и расчетом интенсивн ости света в результате рассеяния на каскаде дифракционных решеток, сопоставляя проблемы наложения спектров и соблюдения условия подсчета числа квантовых микросостояний без повтора.

С ориентацией на широкую читательскую аудиторию, включая старшеклассников, в этой работе знаком курсива / цветом выделены специальные термины, которые легко могут быть найдены в научной литературе. Междисциплинарный характер исследования и конфликт в используемых обозначениях, как например, p -вероятность и p - импульс, p - простое число побудил автора декларировать в начале каждого раздела основные локальные переменные, функции с тем, передать, в каком смысле подразумевается их использование.

1 Введение 5
1.1 Бесконечность числа нетривиальных нулей 7
2 С позиции физики . 12
2.1 Фазовое пространство и энтропия . . . 16
2.2 Статистический вес и плотность состояний 19
3 Алгебра и симметрия 24
3.1 Симметрия. Группы. Характеры 29
4 Распределение Гиббса и Дзета-функция 35
5 Ортогональность. Сепарабельность. p-Число 41
6 Дифракционная решётка. Естественный базис для волновой функции. 49
6.1 Обобщение аналогий естественного базиса и формулы дифракционной решетки 55
7 Теорема о квантовой природе p-чисел . . . 58
8 Гипотеза Римана для школьников 70

Наиболее характерным свойством дзета-функции Римана $\zeta(s)$ является тождество, которое может быть записано двумя формулами. Первая из них представляет собой бесконечную сумму ряд Дирихле вида:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.1}$$

где подразумевается сходимость ряда для s (вопрос о сходимости рассматривается ниже), а n пробегает все натуральные числа. Вторая формула определяет $\zeta(s)$-функцию в виде бесконечного ряда произведений:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} \dots\right) \tag{1.2}$$

в этой формуле p пробегает все простые числа. (В случае сходящегося ряда 1.1, легко рассмотреть его частичные суммы, применить ассоциативный закон и произвести арифметические операции с простыми числами, отбрасывая члены младшего порядка). Эйлер доказал [Чан74] эквивалентность обоих определений для случая целых s .

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

Лемма 1.1 Для вполне мультипликативной функции $f(ab) = f(a)f(b) \Longrightarrow f(1) = 1$, мы предполагаем абсолютную сходимость ряда вида, аналогичного только что приведенному Ф (так называемая производящая специальная арифметическая функция). Если $f(x)$ — вполне мультипликативные функции и ряд $\sum_1^{\infty} f(n)$ сходится абсолютно, то справедливо тождество

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) \dots) \\ = \prod_p (1 - f(p))^{-1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству эквивалентности обоих определений ζ - функции 1.1 и 1.2

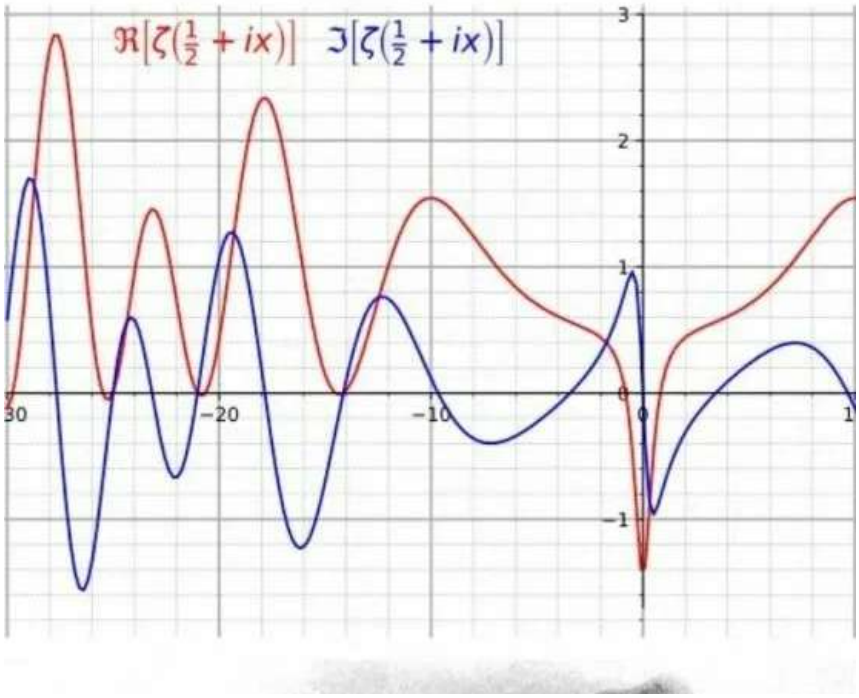


Рис. 1.1: На графике изображены действительная Re и мнимая части Im Дзета - функция Римана

Как аналитическую функцию от аргумента - комплексной переменной $s = \sigma + it$, впервые $\zeta(s)$ начал изучать Риман [Рим48]. Выяснилось, что $\zeta(s)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, включая отрицательные значения σ, причём не имеет на ней особенностей кроме $s = \frac{1}{2} + it$ - полюса первого порядка.

[Рим48]: Риман (1948), Риман Бернгард. Сочинения. Перевод с нем. под ред. В.Л.Гончарова.

$\zeta(s) = 0$ обращается в ноль в области $(-2, -4, -6 \dots)$ отрицательных значений σ - это так называемые тривиальные нули. Особый научный интерес представляет поиск нетривиальных нулей $\zeta(s)$ -функции. В сформулированной Риманом гипотезе утверждается, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ расположены на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$.

1.1 Бесконечность числа нетривиальных нулей

В данной секции используются Γ в значении Гамма функции, $\psi(x)$, χ, Ξ - специально определенные Риманом функции, для упрощения выражений и T - интервал для переменной t по мнимой оси на $\mathbb{C}$.

Функция комплексного переменного называется регулярной (однозначной аналитической в точке), если она определена в некоторой окрестности этой точки и представима в некотором круге сходящимся к ней степенным рядом. Верно следующее функциональное уравнение [Тич53], вид которого сначала может показаться слишком сложным:

[Тич53]: Тичмарш (1953), «Дзета-функция Римана»

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.4}$$

из-за используемой здесь гамма-функции Эйлера в более привычной для современников форме, разработанной Лежандром:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.5}$$

Этот интеграл легко берется по частям и сводится к интегралу аналогичного вида — в итоге получается рекуррентное соотношение $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Для школьников достаточно вспомнить определение факториала числа $n!$, чтобы лучше познакомиться с гамма-функцией и её свойствами. Исходя из 1.5 путем двойной замены переменных вытекает следующая формула:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}exp(-at^{\beta})dt = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \tag{1.6}$$

Рис. 1.2: Георг Фридрих Бернхард Риман 1826-1866 впервые начал изучать аналитическую функцию $\zeta(s)$ от аргумента - комплексной переменной $s = \sigma + it$.

подставляя $a = -n^2\pi$ и $\beta = 1$ и $\alpha = \frac{s}{2} - 1$, приходим к следующему выражению:

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s\pi^{s/2}} \tag{1.7}$$

Поскольку ζ -функция может быть аналитически продолжена на всю плоскость $s = \sigma + it$ при $\sigma > 1$, вынося константу из под знака суммы получим из предыдущей формулы:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{s/2}} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x}\, dx$$
$$= \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\, dx \quad (1.8)$$

Здесь произведена перемена порядка суммирования и интегрирования, допустимая для абсолютно сходящегося ряда. Риман выделяет в отдельную функцию

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \quad (1.9)$$

и упрощает выражение:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx, \sigma > 1 \quad (1.10)$$

Из 1.9 с помощью известной формулы для Гауссова интеграла $\int_0^\infty e^{-ky^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}$ получим:

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right\} \quad (1.11)$$

[Tit86]: Titchmarsh (1986), The Theory of the Riemann Zeta-Function

Титчмарш из последней формулы сделал вывод о связи между производной и самой функцией [Tit86], в чём нетрудно убедиться непосредственно, упрощая выражения, полученные в ходе дифференцирования, путём замены переменной на её значения $x = 1$:

$$4\psi'(1) + \psi(1) = -\frac{1}{2} \quad (1.12)$$

Таким образом из 1.10 и 1.11 вытекает формула:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx$$
$$= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\psi(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right\}dx + \int_1^\infty \psi(x)dx$$
$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(x)dx \quad (1.13)$$

Риман обратил внимание на симметричность вхождения сомножителей s и $s-1$ в полученной формуле, из чего сделал вывод о том, что нули ζ должны располагаться симметрично относительно оси $\sigma = \frac{1}{2}$ на $\mathbb{C}$. Из полученных формул 1.11 и 1.12 путём замены $s = \frac{1}{2} + it$ Бернгард Риман легко получил выражение:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}cos\left(\frac{1}{2}tln(x)\right)dx \quad (1.14)$$

Также для упрощения работы с выражением 1.4 Риман специально ввёл функцию $\chi(s)$ согласно выражению $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, при этом

$$\chi = 2^{1-s}\pi^{-s}cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \quad (1.15)$$

Следовательно, $\chi(s)\chi(1-s) = 1$. В соответствии с формулами 1.4, 1.15 выше, если положить:

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \quad (1.16)$$

то можно вывести симметричное выражение для функции:

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad (1.17)$$

Далее Риман осуществил замену переменной, повернув оси плоскости $\mathbb{C}$ на угол $\frac{\pi}{4}$:

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) \tag{1.18}$$

Таким образом, функциональное уравнение 1.4 эквивалентно утверждению о чётности функции $\Xi(z)$.

В Главе *XI* [Рим48] О числе простых чисел, не превышающих данной величины Риман приходит к выводу о том, что функция ξ может обращаться в нуль только в том случае, если мнимая часть t заключена между $-\frac{i}{2}$ и $\frac{i}{2}$, а число корней уравнения, действительная часть которых заключена между 0 и T приблизительно равно:

[Рим48]: Риман (1948), Риман Бернгард. Сочинения. Перевод с нем. под ред. В.Л.Гончарова.

$$\frac{T}{2\pi} log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \tag{1.19}$$

Риман пишет: ‘в указанных в пределах содержится примерно столько действительных корней; представляется весьма вероятно что и все корни являются действительными. Во всяком случае было бы желательно найти строгое доказательство второго предложения; после нескольких напрасных не очень настойчивых попыток разыскать таковое, я временно от них отказался, так как для ближайшей цели моего исследования в этом не представлялось надобности‘.

Исходя из биографии Римана, хорошо описанной в [Дер10], закономерно предположить, что Риман сделал много настойчивых попыток доказать сформулированную им Гипотезу, но исходя из уровня развития физики середины XIX доказать её было невозможно.

[Дер10]: Дербишир (2010), Простая одержимость : Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир ; Джон Дербишир ; пер

Вывод Римана также подтверждает Титчмарш путём анализа следующего интеграла [Tit86], [Тич53]:

[Tit86]: Titchmarsh (1986), The Theory of the Riemann Zeta-Function

[Тич53]: Тичмарш (1953), «Дзета-функция Римана»

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \, ch(\alpha t) \, dt = \frac{(-1)^n \pi \, cos \frac{\pi}{8}}{2^{2n}} \tag{1.20}$$

где $n = (0, 1, 2 \ldots N)$ имеет столько же нулей, сколько и последовательность $(-1)^n$ для достаточно больших $a = a(N)$ и достаточно близких $\alpha \to \frac{\pi}{4}$. Следовательно, на

интервале $(0, a)$ функция $\Xi(t)$ имеет по меньшей мере N перемен знака.

Следствие 1.2 (О бесконечности числа нетривиальных нулей) Устремляя $N \to \infty$, Риман сделал вывод о бесконечности числа нетривиальных нулей.

Таким образом, в сформулированной Риманом гипотезе утверждается, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ расположены на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$. Но подтвердить либо опровергнуть это утверждение ещё никому не удалось несмотря на настойчивые усилия математиков с использованием суперкомпьютеров и распределенных вычислений. Найден алгоритм Одлыжко — Шёнхаге для вычисления дзета-функции Римана вплоть до 10^{20} (The 10^{20}-th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors) см. также [Odl87].

[Odl87]: Odlyzko (1987), «On the distribution of spacings between zeros of the zeta function»

Между тем с момента формулировки гипотезы Римана в 1859 году в физике были сделаны важные открытия, многократно подтвержденные экспериментами. И эти знания помогут отыскать доказательство гипотезы Римана.

2 С позиции физики

Можно отметить работы физика из США, где с опорой на знания физики элементарных частиц он раскрывает соответствие между элементарными частицами и нетривиальными нулями $\zeta(s)$ - функции, вводит свою мероморфную функцию, упрощающую исследования [Rem21]. Такие аналогии продуктивны. Вместе с тем, по мнению автора, общие идеи доказательства гипотезы Римана можно почерпнуть из школьных знаний: общего курса физики, астрономии, математики, алгебры и логики. (Опуская строгие основания, школьниками можно сразу перейти к секции Формула Планка для понимания идей доказательства 8.1.)

[Rem21]: Remmen (2021), «Amplitudes and the Riemann Zeta Function»

Физические явления - ключ к решению головоломки

Явление интерференции света было впервые чётко описано и продемонстрировано в 1801 году британским физиком Томасом Юнгом. В своём знаменитом экспе-

рименте с двойной щелью он наблюдал возникновение интерференционных полос, что стало классическим доказательством волновой природы света. Юнг не только провёл опыт, но и дал теоретическое обобщение явления, введя сам термин ”интерференция”.

Хотя дифракционные эффекты (например, от края щели или препятствия) наблюдались и ранее, их систематическое изучение и создание строгой теории началось в XIX веке. Теоретическую основу для понимания дифракции заложили Христиан Гюйгенс, сформулировавший свой принцип распространения волн в 1690 году, и Огюстен Жан Френель. В 1818 году Френель разработал количественную теорию дифракции, объединив идею Гюйгенса о вторичных волнах с принципом интерференции.

Исследование распределения интенсивности света от периодических структур стало возможным с появлением дифракционных решёток. Прообраз первой такой решётки создал Дэвид Риттенхаус в 1786 году, используя систему параллельных проволок. Однако настоящий прорыв в применении решёток для спектроскопии совершил Йозеф Фраунгофер, который в 1821 году начал их использовать для точного измерения длин волн. Завершающий вклад в строгое математическое описание явлений дифракции и интерференции внёс Густав Кирхгоф, представивший в 1883 году свою фундаментальную теорию, основанную на волновом уравнении.

Замечание 2.1 (Важные обозначения) В данной секции используются обозначения: L - функция Лагранжа S - классическое действие s - число степеней свободы, q, p - обобщенные координаты и импульс, T - температура Γ - объём фазового пространства n_0 - концентрация частиц в заданной точке.

Определение 2.1 Согласно [Оси07] Верификация (от лат. verificatio – доказательство, подтверждение, от лат. verus – истинный и facio – делать) - это понятие, употребляемое в эпистемологии, логике и методологии науки для обозначения процессов установления истинности

[Оси07]: Осипов (2007), Большая российская энциклопедия

научных утверждений в результате их эмпирической проверки. Такая проверка возможна путём постановки физического эксперимента, наблюдения явления, измерения и взаимодействия инструмента наблюдения с изучаемым объектом.

Хотя научный интерес может представлять построение математических моделей для которых в известном физическом мире аналогов не существует [Ван79], но в данной работе будет доказана гипотеза Римана от противного: если бы нетривиальные нули $\zeta(s)$ были расположены вне мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$, то это противоречило бы основополагающим законам физики, квантовой механики, аксиомам арифметики, абстрактной алгебры.

[Ван79]: Ван дер Варден (1979), Алгебра

Стандартная модель содержит ряд частиц, каждая из которых является возбуждением определённого поля. В нашей Вселенной взаимодействие осуществляется с помощью частиц / волн, имеющих амплитуду и фазу. Волны интерферируют между собой. Явление интерференции, дифракции известно школьникам старших классов.

Корпускулярно-волновой дуализм, изучаемый в школе — это свойство природы, состоящее в том, что материальные микроскопические объекты могут при одних условиях проявлять свойства классических волн, а при других — свойства классических частиц.

Переносчик взаимодействия

Частица-переносчик, промежуточная частица, обменная частица — это тип частицы в квантовой теории поля, которая порождает силы между другими частицами. Эти частицы служат квантами определённого вида физического поля. Квантовые теории поля описывают природу в терминах квантовых полей. Силу между двумя частицами можно описать либо как действие силового поля, создаваемого одной частицей в координатах другой частицы, либо как обмен виртуальными частицами-переносчиками силы между ними.

Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнение Лагранжа:

$$\frac{dL}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.1}$$

устанавливает связь между ускорениями, скоростями и координатами, тем самым представляя собой уравнения движения системы. систему s уравнений второго порядка для s неизвестных функций $q_i(t)$.

Для простоты далее s координат $q_1, q_2 \dots q_s$ просто обозначается q. Общее решение такой системы содержит $2s$ произвольных постоянных. Для полного определения движения механической системы необходимо задать начальные условия: все координаты q и скорости $\dot{q}$.

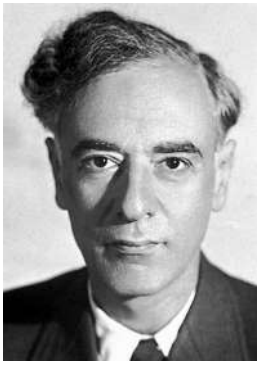


Рис. 2.3: Лев Давидович Ландау (1908-1968)— советский физик-теоретик, основатель научной школы, академик АН СССР (избран в 1946 году). Один из основоположников отечественной теоретической физики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1962 года за пионерские исследования в теории конденсированного состояния, в особенности жидкого гелия.

Для системы, состоящей из невзаимодействующих, но делящих общий ресурс подсистем (подробнее об этом сказано ниже), функция Лагранжа системы равна сумме функций Лагранжа подсистем. Полная производная от действия равна функции Лагранжа определяется путём взятия производной от действия S:

$$\frac{dS}{dt} = L \tag{2.2}$$

Ниже будет использовано также Уравнение Гамильтона-Якоби первого порядка, где частные производные от действия S по координатам совпадают с импульсами $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$:

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{2.3}$$

Выбор обобщенных координат q совершенно свободен, ими могут быть любые s величин, однозначно определяющие положение системы в пространстве [Лан04].

[Лан04]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

Каждая точка фазового пространства отвечает определенному состоянию системы в обобщенных координатах(p, q). В ходе эволюции системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую фазовую траекторию. Для системы, совершающей одномерное финитное движение и характеризующуюся некоторым параметром α, определяющим свойства самой системы (внешнего поля, в котором система находится). Когда этот параметр медленно меняется со временем, т.е. за время периода движения системы, тогда такое изменение считается адиабатическим. В этом случае интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq \tag{2.4}$$

взятый по траектории движения при заданных и параметра α. Величина I остается в рассматриваемом приближении постоянной при изменении параметра α, т.е. является адиабатическим инвариантом.

По теореме Лиувилля объем фазового пространства обладает свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям, сохраняющим гамильтониан и интегралы движения, в частности энергии, импульса, момента импульса. [Лан04] [стр. 192-193]

[Лан04]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

Несложно по аналогии доказать инвариантность интегралов:

$$\begin{gathered} \iint \sum_i dp_i dq_i \\ \iiiint \sum_{i \neq k} dp_i dq_i dp_k dq_k \end{gathered} \tag{2.5}$$

в которых интегрирование производится по заданным дву-, трёх, четырех- и т.д. -мерным многообразиям в фазовом пространстве (счетчик i - нумерует подсистему в составе исследуемой системы).

Рис. 2.4: Джеймс Клерк Максвелл 1871-1879. — английский физик, создатель классической электродинамики, со-основатель статистической физики.

Наряду с действием - фазовым объёмом при адиабатическом изменении сохраняются и другие термодинамические переменные: энергия, число частиц, энтропия, свободная энергия, энтальпия, термодинамический потенциал.

Это наталкивает на мысль о наличии связи между инвариантам исследуемых подсистем в составе системы и простыми числами.

2.1 Фазовое пространство и энтропия

Известные формулы распределения плотности вероятности нахождения частиц изучаются в физматемат-школах [ЛАЛ69], это распределение Больцмана $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$, т. н. барометрическая формула и распределении Максвелла в координатно-импульсном представлении q, p (для школьников более привычна формула, выраженная через скорости):

[ЛАЛ69]: Ландау и др. (1969), Курс общей физики. Механика и молекулярная физика

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi\hbar k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}{2mk_BT}} dp_x dp_y dp_z \qquad (2.6)$$

Обе формулы дают представление о статистическом ансамбле, который следует рассмотреть детальнее. (Далее по тексту температура T задается в энергетических единицах и постоянная Больцмана k_B) опускается, как это принято в традициях теоретической физики $k_BT \rightarrow T$ 1 электрон-вольт = 11606 град. Аналогично постоянная Больцмана ниже опускается в формулах для выражения энтропии S).

Принцип равной вероятности заключается в том, что в изолированной системе, находящейся в состоянии теплового равновесия, каждое микроскопическое состояние, принадлежащее совокупности реализуется с одной и той же вероятностью.

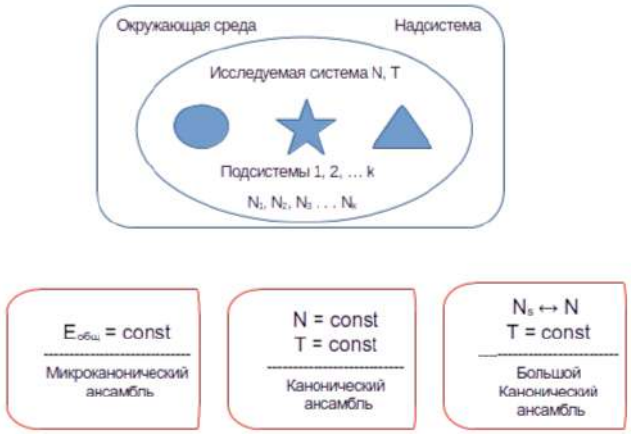


Рис. 2.5: Исследуемая (термодинамическая) система - выделенная для наблюдения часть Вселенной, состоящая из подсистем с заданным числом частиц, энергией и температурой.

Для совокупности двух подсистем распределение ρ_{12} выражается как произведение функций распределения ρ_1 и ρ_2 отдельных подсистем, при этом $\rho_{12} = \rho_1\rho_2$ Применяя натуральный логарифм к обеим частям уравнения, получим:

$$ln\ \rho_{12} = ln\ \rho_1 + ln\ \rho_2 \qquad (2.7)$$

что демонстрирует аддитивность логарифма функции распределения. Из этого следует, что логарифм функции

Микросостояние - это конкретная конфигурация системы, которая описывает точные положения и импульсы всех отдельных частиц, составляющих систему. Каждое микросостояние имеет определенную вероятность возникновения в процессе движения молекул. Макросостояние системы относится к ее макроскопическим свойствам, например таким свойствами являются температура, давление, объем и плотность.

распределения не только является интегралом движения (величиной, сохраняющейся во времени), но и обладает свойством аддитивности $\Longrightarrow$ для составной системы значение логарифма функции распределения равно сумме соответствующих величин для её подсистем. Такое свойство играет ключевую роль в статистической механике при анализе сложных систем.

Статистический ансамбль, определяемый принципом равной вероятности микроскопических состояний, или, более точно, распределением вероятности вида 2.11 называется микроканоническим ансамблем, а распределение — микроканоническим распределением. Таким образом, микроканонический ансамбль описывает изолированную систему, которая достигла состояния теплового равновесия.

Принцип неопределённости Гейзенберга

Принцип неопределённости Гейзенберга выражается в формуле: $\Delta p \Delta q \geqslant \hbar/2$ Он проявляется и на макроуровне в преобразованиях Фурье, в спектрах и сигналах: невозможно одновременно сузить полосу спектр и длительность сигнала

Принцип неопределённости Гейзенберга с позиции математики и физики хорошо проанализирован в работе [Мыш72].

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика. Специальные курсы

Множество микроскопических состояний в квантовой статистической механике образует дискретную счетную совокупность квантовых состояний, определяемых квантовым числом l (В статистической механике обычно рассматривают системы, ограниченные в пространстве, так что квантовое число l дискретно. Системы с неограниченными размерами рассматриваются как предельный случай конечных систем.)

В основе статистической физики лежит постулат равновероятности микросостояний, являющийся развитием принципа симметрии.

Можно дать следующее очевидное, но важное для дальнейших выводов определение.

Определение 2.2 Однократность учёта каждого микросостояния Подсчет каждого квантового микросостояния производится без повтора.

Это определение следует из квантовой физики. См. рассуждения в §31 [ЛЛ02], где Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц

[ЛЛ02]: Ландау и др. (2002), Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика

пишут: С точки зрения классической статистической физики необходимость такого понимания статистического интегрирования связана с тем, что в противном случае нарушилась бы мультипликативность статистического веса, а с ним и аддитивность энтропии и других термодинамических величин. Для подготовленного читателя можно также сослаться на четвертую теорему Федгольма. Она гласит, что множество характеристических чисел уравнения не более чем счётно, с единственной возможной предельной точкой на бесконечности. Напомним, что характеристическое число однозначно связано с энергетическим уровнем, это его обратная величина. Подробнее см. в 6.1.

2.2 Статистический вес и плотность состояний

Поскольку потенциальная энергия определяется в точности до постоянной, упорядочим значения энергетические уровни по возрастанию и считаем их положительными.

Каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Тем самым будет перемещаться и весь участок. При этом функция распределения остается постоянной вдоль фазовой траектории подсистемы. Для квазиклассического случая, где законы квантовой механики можно заменить уравнениями Гамильтона, которые являются переформулировкой хорошо известных из школы уравнений Ньютона.

Рассмотрим следующий дифференциал:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s} \\ \Delta\Gamma_0 &\sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Величину $\Delta\Gamma$ называют статистическим весом микроскопического состояния подсистемы, а ее логарифм — энтропией [ЛЛ76]. (В нижней строке только что приведенных формул выражение Γ_0 характеризует дискретность пространства, его оценка сделана из принципа неопределённости). Определим плотность вероятности ρ нахождения частицы в окрестности заданной точки r:

[ЛЛ76]: Ландау и др. (1976), Теоретическая физика. Том. 5. Статистическая физика. Часть 1

$$\rho(r,t) = |\Psi(r,t)|^2 \tag{2.9}$$

и запишем условие нормировки по всему многообразию $\mathscr{M}$ с учётом только что определённой вероятности:

$$\sum_{\mathscr{M}} \rho(\bar{E})\Delta q \Delta p = 1 \tag{2.10}$$

Число квантовых состояний, лежащих в интервале энергии $\bar{E} \in (E, E+\delta E)$ обозначается как $d\Gamma$ (у Р. Кубо введено обозначение [Куб07] $\Omega_0 \to \Gamma, \Omega \to \Delta\Gamma$, которые представляется неудачным в силу обозначения указанной литерой термодинамического потенциала в отечественной литературе).

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Простой вид формулы 2.8 в действительности не отражает всей сложности при подсчёте статистического веса. Статистический вес тесно связан с симметрией исследуемой системы, приводимыми представлениями группы симметрии, которые в общем случае могут подчиниться правилам тензорного произведения 3.2. Поэтому наряду с приведенной рассмотрим альтернативное определение, на которое будем опираться в дальнейшем.

Пусть многообразие $\mathscr{M}$ является совокупностью всех возможных микроскопических состояний, в которых может находиться система при заданных макроскопических условиях. В классическом случае $\mathscr{M}$ является определенным подпространством фазового пространства, а в квантовомеханическом — совокупностью квантовых состояний системы. Вероятность реализации данных микроскопических состояний системы определяется вероятностью того, что одно из микросконических состояний реализуется в элементе объема $\Delta\Gamma$ фазового пространства:

$$\begin{aligned} Pr(\Delta\Gamma) &= \int\limits_{\Delta\Gamma \in \mathscr{M}} w(q,p)\, d\Gamma \\ Pr(l) &= w(l), \quad (l \in \mathscr{M}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

(где Pr - сокращенное от $Probability$). Формулы приведены для классического и квантово-механического случая соответственно. [Куб07].

Выбрав систему отчета с покоящимся центром масс (полный импульс момента импульса равны нулю), выразим статистический вес через энергию по формуле:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(E)}{dE}\Delta E \tag{2.12}$$

Выше через $\Delta\Gamma(E)$ обозначается число квантовых состояний со значением энергии E' в интервала $E \leq E' \leq E + \delta E$. Величину $\Delta\Gamma$ называют статистическим весом микроскопического состояния системы, а ее логарифм S— энтропией.

Распределение вероятностей по энергии задаётся выражением:

$$W(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE}w(E). \tag{2.13}$$

Интеграл по всем вероятностям состояний подсистемы образует полную группу событий $\Rightarrow$ условие нормировки для функции плотности вероятности W(E):

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathscr{M}} W(E)dE = 1 \\ \sum_{l}^{L} W\Delta\Gamma = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} W_{i,j}\Delta\Gamma_{i,j} = 1\end{gathered} \tag{2.14}$$

для классического и квантово-механического случая соответственно, причём в нижней формуле суммирование происходит по квантовым состояниям l, сгруппированным по каждой из подсистем $1, 2 \ldots k$ входящих в исследуемую систему. Напомним, что многообразие $\mathscr{M}$ является совокупностью всех возможных микроскопических состояний, в которых может находиться система при заданных макроскопических условиях, квантовое число l счетчик дискретной совокупности квантовых состояний.

Полное число микрососотояний Γ является функцией от энергии исследуемой системы E, числа частиц в этой системе N, объема V и некоторого параметра X, как например напряженности электромагнитного / гравитационного поля:

$$\Gamma(E,N,V,X) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3(N_a+N_b+N_c\ldots)}N_a!N_b!N_c!\ldots}\int_{H\leq E} d\Gamma$$

$$\Gamma(E,N,V,X) = \sum_{0<E_l<E} 1 \tag{2.15}$$

для классического и квантово-механического случая соответственно. В обеих формулах многообразие $\mathcal{M}$ в фазовом пространстве и собственные значения H - гамильтониана системы рассматривается для диапазона энергий $E < H < E + \delta E$.

Уникальный учёт каждого микросостояния В квантовой механике тождественные частицы неразличимы — это симметрия перестановок тождественных частиц. Следовательно, результат интегрирования по фазовому пространству делится на число перестановок из комбинаторных формул, что объясняет появление множителей $N_a!N_b!N_c!\ldots$ в знаменателе, обеспечивающих уникальный учёт каждого микросостояния.

Заметим, что в квантовой механике тождественные частицы неразличимы - это симметрия относительно перестановок одинаковых частиц. Поэтому результат от интегрирования по фазовому объему делится на число перестановок по формулам комбинаторики - так объясняется появление сомножителей вида $N_a!N_b!N_c!\ldots$ в знаменателе.

Выразим дифференциал для функции распределения вероятности в фазовом пространстве и плотность вероятности ρ обнаружить объект в заданных координатах фазового пространства через очевидную формулу:

$$dw = \rho(q_1,q_2,\ldots q_s,p_1,p_2,\ldots p_s)dpdq = e^{-\frac{E(p,q)}{T}}dpdq \tag{2.16}$$

В большинстве формул здесь температура T задается в энергетических единицах и постоянная Больцмана k_B) опускается, как это принято в традициях теоретической физики $k_BT \to T$ 1 электрон-вольт = 11606 град. Аналогично постоянная Больцмана опускается в формулах для выражения энтропии S

- вероятность отыскать исследуемый объект в заданных бесконечно малых интервалах s координат и s импульсов в пределах: $q_i \ldots q_i + dq_i, p_i \ldots p_i + dp_i$. - сокращённо в формуле 2.16 и далее по тексту это обозначается как $dpdq$ и рассматривается как «элемент объема» фазового пространства $\Delta\Gamma$. При этом плотность вероятности выражается через энергию системы $\rho = e^{-\frac{E(p,q)}{T}}$.

Снова, существенно упрощая изложение, избегая общий случай тензорного произведения представлений групп симметрии, рассмотренный ниже, рассмотрим замкнутую систему в целом (т.е изолированную от иных систем, например, помещенную в термостат), где определены $\Delta\Gamma_1$, $\Delta\Gamma_2$, $\Delta\Gamma_3$ ... — статистические веса ее различных подсистем. Если каждая из k подсистем, образующих вместе исследуемую систему, может находиться в одном из $\Delta\Gamma_\alpha$

состояний, то фазовые объемы состояний перемножаются, а соответствующие энтропии складываются, что иллюстрируют выражения:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= \prod_{\alpha} \Delta\Gamma_{\alpha} \\ S &= \sum_{\alpha} S_{\alpha} \end{aligned} \tag{2.17}$$

$\Delta\Gamma_i$ — это статистический вес, т.е. число микросостояний в i-й ячейке фазового пространства (или для i-го уровня энергии). Утверждение $\Delta\Gamma_i$ и $\Delta\Gamma_j$ являются независимыми случайными величинами означает, что флуктуации числа состояний в одной ячейке фазового пространства не зависят от флуктуаций в другой. Это обычное предположение для макроскопических подсистем.

Для системы, имеющей дискретный спектр энергии, количество таких независимых случайных величин $\Delta\Gamma_i$ определяется количеством энергетических уровней исследуемой системы. В общем случае их число может быть очень большим или даже счетным бесконечным.

Заметим, что функция, описывающая фазовое пространство 2.5, мультипликативна и допускает разделение переменных по подсистемам в составе исследуемой системы (прослеживается аналогия со статистическим весом, но более точная формула свёртки для статистических весов подсистем приводится ниже).

Метод звёзд и полос

Интересно отметить, что объем фазового пространства 2.17 число микросостояний в исследуемой системе для случая бозонов рассчитывается с помощью известного в комбинаторике метода звёзд и полос. Для нахождения количества способов размещения N_j одинаковых шаров по G_i различимым ящикам представим шары в виде последовательности из N_j точек, а разделение между ящиками в виде $G_j - 1$ вертикальных отрезков. Общее количество элементов (точек и отрезков) составляет $N_j + G_i - 1$ Число способов выбрать позиции для $G_j - 1$ черточек среди этих элементов равно числу сочетаний из

$$a = \binom{N_j+G_i-1}{G_i-1} = \frac{(N_j+G_i-1)!}{(G_i-1)!N_j!} \tag{2.18}$$

Свойство аддитивности является важным свойством энтропии (наряду с другими термодинамическими переменными: энергия, число частиц, энтальпия, свободная энергия, термодинамический потенциал).

Пусть, что в исследуемой системе наблюдается физическая величина (наблюдаемая). С микроскопической точки зрения есть динамическая величина и является функцией микроскопических переменных. В классической механике микроскопическое значение наблюдаемой определяется функцией от обобщённых координат фазовой точки, а в квантовой механике среднее значение такой наблюдаемой выражается следующим образом: .

$$A(l) = \int \phi^* A \phi d\tau = \langle l|A|l\rangle \tag{2.19}$$

Итак, фазовое пространство дискретно 2.8 и является мультипликативной функцией от обобщенных координат. Здесь выполняются принципы мультипликативности фазового объема 2.17 аддитивности энтропии.

Нам пригодится следующая формула из квантовой механики, определяющая среднее значение оператора A, которое, как доказывается в квантовой физике, совпадает со значением наблюдаемой A:

$$\langle A\rangle = \frac{\langle \Psi, A\Psi\rangle}{\langle \Psi, \Psi\rangle}. \tag{2.20}$$

Эту формулу можно интерпретировать с позиции теории вероятностей, математической статистики: усреднение необходимо производить по всем микросостояниям.

См. также Приложение 13 (Пространство Лебега, Гильберта. Операторы).

3 Алгебра и симметрия

Как и в классической механике наличие интегралов движения тесно связано с симметрией квантово-механической

системы. Пусть система инвариантна относительно некоторого преобразования $\hat{U}$, при этом физический смысл имеют лишь унитарные преобразование, сохраняющие нормы векторов и свойства эрмитовости операторов. Поскольку динамика системы определяется её гамильтонианом, свойство инвариантности означает, что при таком преобразовании H

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1} = \hat{H} \tag{3.1}$$

(Для случая классической механики аналогично применимы скобки Пуассона) Другими словами, оператор $\hat{U}$ коммутирует с гамильтонианом $\hat{H}$, а их коммутатор равен нулю:

$$\left[\hat{U}, \hat{H}\right] = \hat{U}\hat{H} - \hat{H}\hat{U} = 0 \tag{3.2}$$

Если оператор $\hat{U}$ не содержит времени, то ему должен отвечать некоторый закон сохранения. Тогда собственный вектор Ψ_E гамильтониана $\hat{H}$ имеющий определённую энергию E, при преобразовании $\hat{U}$ переходит в вектор Ψ'_E, обладающий той же энергией $\Psi'_E = \hat{U}\Psi_E$.

Любой оператор $\widehat{Q}$ выражается через

$$\left\langle n|\widehat{Q}|m\right\rangle = \int \psi_n^* \widehat{Q}\psi_m \, dq \tag{3.3}$$

Если $\widehat{Q}$ явно не зависит от времени и коммутирует с гамильтонианом, его матричные элементы $\left\langle n|\widehat{Q}|m\right\rangle$ не меняются со временем. Это квантовая форма интегралов движения - величин, сохраняемых при канонических преобразованиях: импульс, момента импульса, объем фазового пространства при адиабатическом изменении и др. Важно отменить, что для нашего случая все собственные значения- энергии микросостояний вещественны, то это означает что оператор H эрмитов $H = \overline{H^*}$ (в алгебре матриц принята традиция обозначать эрмитово сопряжение $H = H^\dagger$). Замечательное свойство эрмитовости оператора обеспечивает коммутативность гамильтониана с рядом операторов.

Спектральная теорема для эрмитовых матриц

Любая эрмитова матрица приводится к диагональному виду посредством унитарного преобразования. Этот фундаментальный результат линейной алгебры заключается в следующем.

Пусть A — эрмитова матрица ($A = A^\dagger$, где $A^\dagger$ — эрмитово сопряжение). Тогда существуют: унитарная матрица U ($U^\dagger U = UU^\dagger = I$) диагональная матрица D с вещественными элементами на диагонали, такие, что выполняется равенство:

$$A = UDU^\dagger.$$

Иными словами, матрица A унитарно диагонализуема.

- Все собственные значения эрмитовой матрицы вещественны. Это следует из того, что диагональные элементы D являются собственными значениями A.
- Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Матрица U состоит из ортонормированных собственных векторов A.
- Столбцы матрицы U образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$.

Эрмитовы матрицы играют ключевую роль в ряде областей: квантовая механика (операторы физических величин), теория сигналов и обработка данных; оптимизация и численные методы.

Как известно, физическое измерение в квантовой механике соответствует воздействию оператора физической величины на вектор состояния системы. Так называемые чистые состояния, в которых физическая величина имеет строго определённое значение, соответствуют собственным векторам, при этом значение величины в данном состоянии — это собственное число вектора чистого состояния.

Преобразование G устанавливает взаимнооднозначное соответствие между динамическими переменными: заданная переменная B преобразуется в новую переменную По предположению образ B' имеет тот же спектр, что и B, а собственные состояния для каждого собственного значения переменной B' являются образами собственных состо-

яний, соответствующих тому же собственному значению переменной B. Эти два условия выражают требование сохранения физических свойств при преобразовании динамических переменных. Как правило, в физических приложениях оператор линеен, за исключением оператора обращения времени (пример антилинейного оператора). Различные преобразования, встречающиеся в физике, образуют определенные группы преобразований. Каждой такой группе преобразований $\mathcal{G}$ сопоставляется группа G операторов, реализующих эти преобразования.

Определение 3.1 Принято называть некоторую совокупность преобразований группой преобразований, если она вместе с любыми двумя преобразованиями содержит преобразование, получающееся в результате их последовательного выполнения, и вместе с каждым преобразованием содержит обратное преобразование.

Пусть имеется $\mathcal{G}$ группа преобразований $g_1, g_2, g_3 \dots$ и каждому элементу g_i, этого множества можно сопоставить оператор $\hat{T}(g)$, определяющий преобразование векторов и операторов в пространстве состояний. Оператор $\hat{T}(g)$ - это представление группы, он задается своими физическими свойствами только с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$. Мы получим множество $[T]$ операторов преобразования, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из группы $\mathcal{G}$. А именно, для каждого произведения $g_k = g_i g_j$ имеем:

$$T_k = e^{i\alpha_j^k} T_i T_j \tag{3.4}$$

где $e^{i\alpha_j^k}$ — некоторая фаза, зависящая от выбора фазы у $T_i T_j$. Для того чтобы [T] было группой, необходимо, чтобы все α_j^k,- обращались в нуль. Тогда группа [T] станет изоморфна группе $\mathcal{G}$. Такая возможность имеется для ряда групп, но не для всех. [Mec79] В частности, это возможно для группы перестановок, но невозможно для группы вращений, если система содержит нечетное число частиц с полуцелым спином. Несложно обеспечить выбор $\mathcal{G}$ таким образом, чтобы множество $[T]$ операторов преобразования представляло бы собой группу $\hat{G}$, гомоморфную группе $\mathcal{G}$.

[Mec79]: Мессиа (1979), Квантовая механика, в 2 т

Итак, с каждой группой преобразований связано некото-

рое число законов сохранения. Всякий раз, когда сохраняющаяся наблюдаемая имеет классический аналог, эти законы сохранения идентичны соответствующим классическим законам. Ниже указаны наиболее часто встречающиеся из них:

1. Трансляционная инвариантность и сохранение полного импульса. Необходимое и достаточное условие инвариантности гамильтониана относительно трансляций состоит в инвариантности его относительно инфинитезимальных трансляций;
2. Инвариантность относительно вращений и сохранение момента импульса;
3. Инвариантность относительно отражений и сохранение четности. Из инвариантности гамильтониана относительно отражений в точке $\left[\hat{H}, \hat{S_0}\right] = 0$ следует, что четность S_0 является интегралом движения.
4. Инвариантность относительно перестановок и сохранение симметрии. В системе, состоящей из тождественных частиц, гамильтониан инвариантности относительно любой перестановки P этих частиц $\left[\hat{H}, \hat{S_0}\right] = 0$ при всех . $\Longrightarrow$ что $\forall$ наблюдаемая (величина), в квантовой физике, построенная из , является интегралом движения.

Всякая наблюдаемая является некоторой вещественной функцией $F(\xi)$ фундаментальных наблюдаемых $f(\xi_1)$, $f(\xi_2) \ldots$, $f(\xi_n)$, системы. Образ этой наблюдаемой есть $B' \equiv F(\xi')$ Преобразование G полностью определяется, если известны законы преобразования основных наблюдаемых, т. е. если известны функции $f(\xi_1)$, $f(\xi_2) \ldots$, $f(\xi_n)$, таких что

$$G\left[\xi_n\right] \equiv \xi_n' = f(\xi_n) \tag{3.5}$$

Поскольку рассматриваемые преобразования сохраняют алгебраические соотношения, постольку есть лишь две возможности: преобразование а) сохраняет фундаментальные перестановочные соотношения, б) меняет их знак. В первом случае оператор , соответствующий преобразованию, линеен, во втором— антилинеен.

Оператор должен удовлетворять соотношению $\xi_n' = T\xi_n T^+$ содержащим все физические свойства . Однако этих равенств недостаточно для полного определения

T. Можно подобрать T_1 — другой унитарный (или антиунитарный) оператор, удовлетворяющий тем же соотношениям. Но в этом случае будет верным соотношение $T_1 \xi T_1^+ = \xi'$ (опуская индекс n для упрощения записи) $\Longrightarrow$ $T_1 T \xi T T_1^+ = \xi' \Longrightarrow [TT_1, \xi] = 0$ для $\forall \xi$.

Если предполагать неприводимость пространства состояний R^m по отношению к наблюдаемым ξ, т. е. что в R^m не содержится подпространств, инвариантных относительно ξ, то последняя формула будет верной тогда и только тогда, когда оператор $T_1 T = E$ пропорционален единичному. Этот результат следует из первой леммы Шура 3.2 и наталкивает на связь с формулой для взаимнопростых чисел наибольший общий делитель которых равен единице: $(m.n) = 1$. Объяснить такую взаимосвязь поможет гомоморфизм алгебр.

Определение 3.2 Отображение f из алгебры A в алгебру B называется гомоморфизмом, если оно линейно и сохраняет операцию умножения, т.е. $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$ для любых $x, y \in A$, рис. 3.6. Образ Im, f гомоморфизма f является подалгеброй алгебры B, а его ядро Ker, f — идеалом алгебры A.

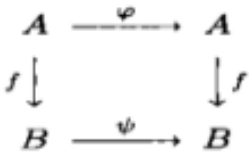


Рис. 3.6: Групповой гомоморфизм — это отображение, сохраняющее групповую операцию.

3.1 Симметрия. Группы. Характеры

Все представления рассматриваются над полем $\mathbb{C}$ - алгебраически замкнутым полем.

Абелева группа — группа, в которой операция коммутативна: $\forall g_1, g_2 \in G$ имеем $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Представление группы — гомоморфизм группы в группу линейных операторов на векторном пространстве. Если представление неприводимо, его нельзя разложить в прямую сумму меньших представлений.

Размерность представления — размерность векторного пространства, на котором действуют операторы представления.

Пусть в пространстве R^m задано представление D конечной группы G. Если в пространстве R^m существует подпространство R^k (при этом $(0 < k < m)$), инвариантное относительно всех преобразований D, то представление называется приводимым - т.е. $\forall x \in R^k$ результат $D(x) \in R^k$. Если же в пространстве R^m нельзя выделить инвариантное подпространство, то представление называется неприводимым.

Для унитарных представлений

Несложно доказать, что когда приводимое представление D является унитарным, то ортогональное дополнение подпространства R^k, которое мы обозначим через R^{m-k}, также инвариантно относительно преобразований D. Выбирая в качестве k первых ортов орты подпространства R^k, в качестве последних $m-k$ ортов - орты подпространства R^{m-k}, можно добиться квазидиагонального вида матрицы представления D.

Если пространство R^m разлагается на инвариантные подпространства, в каждом из которых реализуется неприводимое представление, то представление D называют вполне приводимым.

Представление D является приводимым если существует такая неособенная матрица V, что путем преобразования подобия матрица преставления что $V^{-1}DV$ приобретает блочно-диагональный вид, где каждый блок соответствует неприводимому представлению. [Вин02].

[Вин02]: Винберг (2002), Курс алгебры. 3-е изд

Лемма 3.1 Если приводимое представление D является унитарным, то ортогональное дополнение подпространства R^k, которое мы обозначаем R^{m-k}, также инвариантно относительно преобразований D. Выбор первых k базисных элементов в качестве базиса первого подпространства и последних m базисных элементов в качестве базиса подпространства $R^{(m-k)}$ приводит к блочно-диагональной форме матрицы представления D.

Для иллюстрации пусть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ будет базисом для R^k, а $\{v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ — базисом для R^{m-k}. Объединённый базис $\{v_1, \ldots, v_m\}$ преобразует D в блочно-диагональный

вид:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G \tag{3.6}$$

где D_1 действует на R^k, а D_2 — на R^{m-k}.

Для неприводимого представления любой оператор, который коммутирует со всеми операторами представления, должен быть скалярным вида cE, где c — число. Далее следуют леммы Шура, из которых выводится соотношение ортогональности для матричных элементов унитарного представления:

Лемма 3.2 (Леммы Шура) $\forall g \in G$

1. Матрица M, коммутирующая со всеми матрицами неприводимого представления, кратна единичной матрице E: $MD(g) = D(g)M \Longrightarrow Mx = c\,x$ (M является скаляром, т.е. умножением E на число c).
2. Пусть $D^{(1)}(g)$ и $D^{(2)}(g)$ — матрицы двух неприводимых, неэквивалентных представлений группы G порядков n_1 и n_2 соответственно. Тогда любая прямоугольная матрица M с n_1 столбцами и n_2 строками, удовлетворяющая соотношению $MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M$ для $\forall g \in G$, должна быть нулевой матрицей.

В случае унитарных неприводимых представлений $D^{(i)}$, $D^{(j)}$ порядков n_i и n_j соответственно для группы G с m элементами из первой и второй групп, из лемм Шура следует соотношение ортогональности для матричных элементов.

Пусть группа линейных операторов $\hat{T}_g$ гомоморфна группе G: $g_1, g_2 \dots g_m$ - . Тогда представление произвольного линейного оператора 3.4, быть разложено по ортам в линейном пространстве R^m, где m - размерность пространства и одновременно степень представления группы G.

$$T(\hat{g}_1)_k = \sum_{r=1}^{r=m} D_{r,k}\mathbf{e_r} \tag{3.7}$$

Матрицы $D(g_i)$ образуют представление порядка m группы G. Здесь R^m - это пространство представления, $e_1, e_2 \dots e_m$ - базис представления. Работа с линейными операторами сводится к работе с матрицами. При переходе к новому

базису V матрицы преставления испытывают преобразования подобия $V^{-1}DV$. Если все матрицы представления являются унитарными, то и само представление называют унитарным - оно сохраняет длину вектора.

Для неприводимого представления любой оператор, коммутирующий со всеми операторами представления, обязан быть скалярным вида cE, где c - это число. Из леммы Шура 3.2 вытекает соотношение ортогональности 3.8 матричных элементов унитарного представления.

В случае неприводимых унитарных представлений $D^{(i)}$, $D^{(j)}$ порядка n_i и n_j соответственно для группы G, насчитывающей m элементов из первой и второй леммы Шура вытекает соотношение ортогональности для матричных элементов (Для наглядности следует представить себе шахматную доску и вспомнить как работает $\delta_{i,j}$):

$$\sum_{g\in G} D^{(i)}_{\mu\nu}(g)\overline{D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g)} = \frac{m}{n_i}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{ij} \tag{3.8}$$

Это соотношение интерпретируется как условие ортогональности и нормировки векторов в m - мерном пространстве. Имеется ввиду вектор $D^{(i)}_{\mu\nu}(g_1), D^{(i)}_{\mu\nu}(g_2)\dots D^{(i)}_{\mu\nu}(g_m)$ или $D^{(i)}_{\mu\nu}$, разложенный по компонентам и аналогично для $D^{(j)}$. Число таких векторов, соответствующих одному неприводимому представлению $= n_i^2$:

$$\sum_i n_i^2 = m \tag{3.9}$$

что в сумме равно размерности пространства матричных элементов неприводимого представления. Это следует из теоремы Бернсайда.

Определение 3.3 Следующее выражение определяет характер группового представления — комплекснозначную функцию $\chi(ab) \not\equiv 0$, такую что $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

Вычислим характер представления группы — функцию, определённую на группе, возвращающая след матрицы для исследуемого элемента g в представлении (см. более детально о характере ниже 4):

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{i=m} D_{ii}(g) = \mathrm{Tr}(D) \tag{3.10}$$

Оператор Tr используется наряду с Sp и обозначает след матрицы

Свойства характеров представлений группы [Ван79]:

[Ван79]: Ван дер Варден (1979), Алгебра

- Эквивалентные представления имеют одинаковые характеры $\chi(D) = \chi(V)^{-1}(D)V(g)$, поскольку след матрицы инвариантен относительно преобразования подобия.
- Характеры матриц представления, соответствующие элементам одного класса группы G, совпадают между собой. Характеры постоянны на классах сопряженности, другими словами характер - это функция класса.
- Характеры неприводимых представлений обладают свойством ортогональности:

$$\sum_{g \in G} \chi^i(g)\overline{\chi^j(g)} = m\delta_{i,j} \tag{3.11}$$

  - это легко выводится из 3.8.
- Характер $\chi(g)$ вполне приводимого представления D равен сумме характеров всех неприводимых представлений, на которые оно может быть разложено. Разложение на неприводимые представления единственно с точностью до эквивалентности.

$$\begin{aligned} \chi(g) &= \sum_j r_j \chi^{(j)}(g) \\ r_j &= \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \overline{\chi}(g)\chi^{(j)}(g) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Где число r_j - подсчитывает, сколько раз неприводимое представление $D^{(j)}$ входит в разложение приводимого представления D, что символически записывается с помощью формулы (аналогично разложению приводимого представления на компоненты неприводимых представлений:

$$G \cong \bigoplus_j r_j G^{(j)} \tag{3.13}$$

Знак $\oplus$ обозначает не сумму матриц, а разложение на

неприводимые представления. Более подробно о характерах см. в Приложении 5.

В физике коэффициенты Клебша-Гордана — это числа, возникающие при связи моментов импульса в квантовой механике. Они появляются как коэффициенты разложения собственных состояний полного момента импульса по несвязанному тензорному произведению базисных состояний.

Разложение приводимых представлений

Разложение композиции приводимых представлений $D^{(i)} \otimes D^{(j)}$ на неприводимые может быть выполнено с использованием коэффициентов Клебша-Гордана:

$$D^{(i)}(g) \otimes D^{(j)}(g) = \sum_l \gamma_{i,j,l} D^{(l)}(g), \tag{3.14}$$

Если $V^{(i)}$ является представлением некоторой группы симметрии (например, унитарной группы G, действующей на $\mathbb{R}^m$), то согласно общей теории представлений компактных или полупростых групп, оно может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений:

$$V_i = \bigoplus_j r_{i,j} W_j, \tag{3.15}$$

где W_j — неприводимые представления, а $r_{i,j}$ — их кратности.

Когда G является тензорным произведением представлений:

$$G = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cdots \otimes V_k \tag{3.16}$$

его разложение на неприводимые компоненты V_j соответствует выделению симметричных подпространств (например, полного углового момента в системе спинов). Если V_i разлагается на компоненты как в 3.15, то G далее разлагается согласно формуле:

$$G = \bigotimes_{j=1}^{k} \left(\bigoplus_i r_{i,j} W_j \right) = \bigoplus_{j_1, j_2, \ldots, j_k} (r_{1 j_1} \cdots r_{k j_k})(W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_k}). \tag{3.17}$$

Взаимосвязь определяется правилами композиции представлений, которые в свою очередь зависят от конкретной группы симметрии. Очевидно, что фундамен-

тальные принципы алгебры уходят корнями в области физики и симметрии.

4 Распределение Гиббса и Дзета-функция

В этой секции и далее $gcd(m,n)$ - сокращенное обозначение наибольшего общего делителя, в частности $gcd(m,n) = 1$ - обозначение взаимно простых чисел, $\hbar$ - постоянная Планка N - число частиц, бозонов, фотонов, c - скорость света, w - частота волны де Бройля l - длина волны де Бройля вместо привычного λ, $\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{l}$ - волновой вектор, указывающий направление волны, μ - химический потенциал, T - температура, V - объём, F - свободная энергия газа, за счет изменения которой в термодинамике совершается работа, что объясняет удобство использования этой переменной.

Микроканоническое распределение Гиббса выводится из формулы 2.7, постулирующей равновесность и независимость каждого микросостояния термодинамической системы

$$\begin{aligned} dw &= const\ \rho\ \delta(E - E') \\ dw &= const\ \delta(E - E') \prod_{\alpha} d\Gamma_{\alpha} \end{aligned} \tag{4.1}$$

В первой строке формулы выражена вероятность нахождения исследуемой системы через плотность распределения вероятностей в квазиклассическом случае, во второй строке формулы приведена вероятность нахождения исследуемой системы в некотором состоянии $d\Gamma$ в квантомеханическом представлении. В основе статистической физики лежит постулат равновероятности микросостояний, являющийся развитием принципа симметрии.

Любопытно отметить, что свободная энергия газа является простым следствием условия нормировки канонического распределения Гиббса. Условие нормировки позволяет вычислить свободную энергию F через вероятности квантовых состояний:

$$1 = \sum_n^N w_n = e^{\frac{F}{T}} \sum_n^N e^{-\frac{E_n}{T}}$$
$$\Rightarrow F = -T\, ln \sum_n^N e^{-\frac{E_n}{T}} \tag{4.2}$$

В этой работе температура T задается в энергетических единицах и постоянная Больцмана k_B) опускается, как это принято в традициях теоретической физики $k_B T \rightarrow T$ 1 электрон-вольт = 11606 град. Аналогично постоянная Больцмана опускается в формулах для выражения энтропии S

Это наглядный пример связи между математикой, теоретической физикой и лабораторным экспериментом. В термодинамике свободная энергия F, энтропия S, энергия E, объем V, давления P, температура T ряд других переменных выводятся друг из друга и контролируются. Первые три перечисленные переменные являются аддитивными функциями.

Опираясь на этот постулат равновероятности всех доступных исследуемой системе микросостояний, вытекающий из симметрии, Гиббс вывел формулу 8:

Z-сумма - статистическая сумма соответствует суммированию вероятностей по всем микросостояниям для заданного значения интервала энергии, условия равенства единице суммы вероятностей по полной группе событий и выводится из условия нормировки аналогично приведённому 2.14.

Матрица плотности канонического распределения Гиббса находится по формуле:

$$\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \quad \left(\beta = \frac{1}{T}\right) \tag{4.3}$$

Пусть $\phi'_E = |E\rangle'$ - собственный вектор гамильтониана $\hat{H}$ и $\mathscr{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$ тогда:

Оператор Tr используется наряду с Sp и обозначает след матрицы

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathscr{H}} = \sum_{E'} e^{-\beta E'} \tag{4.4}$$

Статистический оператор представляет собой положительный оператор с единичным следом, который в дискретном базисе представляется квадратной матрицей (конечномерной или бесконечномерной).

Статистическая сумма входит в распределение Гиббса в виде нормировочного множителя (она не зависит от j, обеспечивая равенство единице суммы вероятностей:

$$\sum_j P_j = \frac{1}{Z}\sum_j e^{-\beta E_j} = \frac{1}{Z}Z = 1. \tag{4.5}$$

Если система имеющая объём V и содержащее $N = N_a + N_b + N_c \ldots$ частиц находится в равновесии с термостатом при температуре (в квазистационарном случае подсистемы, образующие одну исследуемую систему имеют одну и ту же температуру и β), то вероятность её микроскопических состояний определяется следующими выражениями:

$$Pr(d\Gamma) = \frac{1}{\prod_{a,b,c\ldots} N_a!N_b!N_c!\ldots\,(2\pi\hbar)^{3N}}\, e^{-\beta\mathscr{H}_N}\,\frac{d\Gamma}{Z_N} \tag{4.6}$$

а статистическая сумма:

$$Z_N = \frac{1}{\prod_{a,b,c\ldots} N_a!N_b!N_c!\ldots,(2\pi\hbar)^{3N_a}}\int e^{-\beta\mathscr{H}_N}\,d\Gamma \tag{4.7}$$

в классическом случае в квантвомеханическом случае. В дальнейшем индекс N у Z-суммы для простоты опускается. Появление множителей вида $N_a!N_b!N_c!\ldots,$ в знаменателе следует из комбинаторики и обусловлено перестановочной симметрией, необходимостью избегания повторного подсчета микрососотояний фазового пространства.

Упомянутые выше распределения Больцмана и Максвелла являются частными случаями канонического распределения Гиббса. В силу идентичности молекул газа при анализе распределения достаточно рассмотреть фазовое пространство лишь одной молекулы, выразить энергию в импульсном представлении в координатах dp. Далее интегрирование по обобщенным координатам dq системы можно заменить на простое умножение на объем сосуда — аналогичный алгоритм применяется для распределения Максвелла (2.6). Это значительно упрощает вычисления.

Важно помнить, что статистический вес $\Delta\Gamma$ удовлетворяет соотношению для квазистационарных термодинамических систем:

$$\Delta\Gamma \geq 0, \quad \lim_{E\to\infty} \Delta\Gamma(E)\, e^{-\alpha E} = 0 \quad (\alpha > 0) \tag{4.8}$$

Внимательный взгляд на 9.1 позволяет сделать вывод, что Z-сумма (статистическая сумма) для канонического ансамбля определяется через преобразование Лапласа от статистического его веса:

$$Z\left(\beta\right) = \int_{E_0}^{\infty} e^{-\beta E} \Delta\Gamma\left(E\right)\, dE,$$

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} Z(\beta) e^{\beta E}\, d\beta$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\beta' + i\beta'') e^{(\beta'+i\beta'')E}\, d\beta'', \quad (\beta' > 0).$$

где E_0 - наинизший уровень системы. Нижние формулы - это нахождение статистического веса $\Delta\Gamma(E)$ путем обратного преобразование Лапласа от Z - суммы. Интеграл берётся по контуру в плоскости $\beta \in \mathbb{C}$ образованного вертикальный прямой $\beta = \beta'$ и замыкаемого дугой полуокружности на ∞. При этом подынтегральное выражение на дуге обращается в ноль, а интеграл от аналитический функции считается с находится с помощью теореме о вычетах.

Для нахождения статистического веса исследуемой системы I + II, состоящей из подсистем I, II применяется операций свёртки статистических весов:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{\mathrm{I+II}}\left(E\right) &= \int \Delta\Gamma_{\mathrm{I}}\left(E'\right) \Delta\Gamma_{\mathrm{II}}\left(E - E'\right)\, dE' \\ &= \int \Delta\Gamma_{\mathrm{I}}\left(E - E''\right) \Delta\Gamma_{\mathrm{II}}\left(E''\right)\, dE''. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Это соответствует произведению Z-сумм:

$$Z(\beta)_{\mathrm{I+II}} = Z(\beta)_{\mathrm{I}} \cdot Z(\beta)_{\mathrm{II}} \tag{4.10}$$

См. §2 Кубо [Куб07].

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Целочисленная группа $\{E_i\}$

Рассмотрим выражение для гамильтониана изучаемой системы, объединяющей k подсистем. Таким образом, гамильтониан выражается как: $\hat{H}_{\text{Общ.}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \dots \hat{H}_k$. Кроме того, используя произвольное определение нулевого уровня потенциальной энергии, можно рассматривать все энергетические уровни для исследования:

- $E \geq 0$ (минимальное значение энергии для осциллятора вследствие принципа неопределенности равно $\frac{1}{2}\hbar\omega$);
- в силу того, что $\left\|\hat{H}_{\text{Общ.}}\right\| < \infty$ конечна и энергия квантуется целыми числами, необходимо выбрать соответствующую единицу измерения энергии так, чтобы $\Delta E = 1$;
- представляет собой упорядоченное (или частично упорядоченное множество в случае кратных собственных значений) в порядке возрастания $0 \leq E_0 \leq E_2 \cdots \leq E_m$.

С учётом сделанных допущений, заметим, что среди множества собственных значений гамильтониана исследуемой системы могут встречаться кратные собственные значения $E_n = \Delta E \cdot n$, а также пробелы в ряде натуральных чисел $\mathbb{N}$. С помощью диагональной матрицы U с вещественными коэффициентами $u_{n,n} = \frac{n}{E_n}$ (и $\frac{E_n}{n}$ для U^{-1}) можно осуществить переход к ортогональному базису собственных функций, состоящему из последовательных эквидистантных целочисленных уровней энергии

В дальнейшем с помощью простых чисел эти несложные соображения будут обобщены на случай произвольной термодинамической системы, описываемой распределением Гиббса.

Определение 4.1 (Эквидистантные энергетические уровни) Пусть собственные значения гамильтониана исследуемой системы представляет собой ряд последовательных натуральных чисел энергии $E_n = \Delta E \cdot n$ в некоторых энергетических единицах. Тогда соответствующие таким собственным значениям (энергии) волновые функции будут обозначаться в виде ряда: $|1\rangle, |2\rangle, |2\rangle \dots |m\rangle$. Это позволит работать с $\{E_i\}$ по правилам целочисленной группы

В квазистационарном состоянии полная энергия рассмат-

риваемой системы сохраняется, поэтому множество $\{E_m\}$ замкнуто относительно операции сложения/вычитания. С точки зрения физики, операции, связанные с переходами между энергетическими уровнями, можно рассматривать как единую операцию $\circ$.

Например, операторы рождения и уничтожения, широко используемые в квантовой механике, включая изучение гармонических осцилляторов. Оператор уничтожения (обычно обозначаемый $\hat{a}$) уменьшает число частиц в данном состоянии на единицу. Оператор рождения (обычно обозначаемый $\hat{a}^\dagger$) увеличивает число частиц в данном состоянии на единицу, он сопряжён оператору уничтожения. Возможно определение случайной функции от двух аргументов, $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, и рассмотрение работы этой функции как одной операции $(\circ)$ в группе $\{E_m\}$.

Замечание 4.1 Заметим, что изложенные соображения относительно оператора энергии противоречат существующим парадигмам, но как будет показано ниже, групповые операции применимы для случая нормированных статистических сумм. Кроме того, применение оператора проектора Гамильтона на подпространство собственных значений энергии является общепринятым.

Однако прежде необходимо подробнее рассмотреть базовые сведения из теории групп применительно к статистической сумме и определить понятие нормированной статистической суммы.

Определение 4.2 Говорят, что $\langle S \rangle$ является подгруппой, порождённой S. В частности, если S состоит всего из одного элемента g, то $\langle S \rangle = \langle g \rangle$ является циклической подгруппой, порождённой элементом g.

Замечание 4.2 Элемент g^k циклической группы $G = \langle g \rangle$ (порядок(G) = n) является порождающим $\langle g \rangle$ тогда и только тогда, когда $gcd(k, n) = 1$ (НОД(k, n)=1).

Определение 4.3 Для любого подмножества $S \subseteq A$ множество всех линейных комбинаций $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n$ $(a_i \in S, k_i \in \mathbb{Z})$ является наименьшей подгруппой в A, содержащей S. Она называется подгруппой, порождённой S, и обозначается $\langle S \rangle$. Если $\langle S \rangle = A$, то говорят, что группа A порождена множеством S, и S называется порождающим множеством группы A.

Выше все операции над статистическими суммами произведены для для фермионов. По утверждению Кубо выводы при работе со статистическими суммами для случая бозонов будут более громоздкими, но останутся аналогичными.

Замечание 4.3 (Если порядок группы простой) Если порядок группы $ord(G) = p$ — простое число, то группа: $G = \langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}\}$) содержит ровно p элементов, где e — единичный элемент группы G, так что $\forall g_n \quad e\, g_n = g_n$. G является циклической группой, порождённой элементом g_n.

5 Ортогональность. Сепарабельность. p-Число

В этом разделе $gcd(p, q)$, когда применяется к числам, обозначает наибольший общий делитель p и q.

статистическая сумма Z_i представляет собой ряд членов $e^{-\beta E_i} = \frac{1}{p_i}$ и становится (конечной/бесконечной) циклической подгруппой G, порождённой $\langle g \rangle$ ($g = \frac{1}{p}$ в дальнейшем индекс i для простоты может быть опущен), причём каждое микросостояние строится из элементов группы, порождённой простыми числами.

В каноническом ансамбле нормировка матрицы плотности уже включает деление на статистическую сумму Z 4.5. Однако групповая структура потребует дополнительной нормировки самих Z-сумм:

$$\tilde{Z}(\beta) = \frac{Z(\beta)}{Z_0(\beta)} \tag{5.1}$$

где $Z_0(\beta)$ — статистическая сумма системы отсчёта (например, системы с $d\Gamma_0(E) = \delta(E)$ и $Z_0(\beta) = 1$ — основное состояние. Почему в качестве системы отсчёта для нормированных $\tilde{Z}(\beta)$-сумм выбрана дельта-функция от энергии? — Потому что из определения дельта-функции, введённой Полем Дираком:

$$Z_0(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} \delta(E)\, e^{-\beta E}\, dE = e^{-\beta \cdot 0} = 1 \tag{5.2}$$

Предложение 5.1 (Аксиомы групп для $\tilde{Z}$) Проверка аксиом групп для нормированных статистических сумм:

1. Произведение нормированных $\tilde{Z}(\beta)$-сумм должно соответствовать свёртке статистических весов (4.9). Это верно, поскольку $\tilde{Z}(\beta)_{\text{I+II}} = \tilde{Z}(\beta)_{\text{I}} \cdot \tilde{Z}(\beta)_{\text{II}}$ (4.10).
2. Нейтральный элемент — это $\tilde{Z}_0(\beta)$, соответствующий системе $d\Gamma(E) \ = \delta(E)$
3. $\exists$ обратный элемент $\forall \quad \tilde{Z}_n(\beta) \quad \exists\, \tilde{Z}_n(\beta)^{-1}$, такой

что: $\tilde{Z}_n(\beta) \cdot \tilde{Z}_n(\beta)^{-1} = 1$

Замечание 5.1 В дальнейшем $\tilde{Z}_m(\beta)$ обозначается как $\tilde{Z}_m$, и аргумент β для простоты может быть опущен.

Статистическая сумма - характеристическая f случайной величины

$\tilde{Z}_0(\beta) = 1$ соответствует системе с фиксированной энергией $E = 0$ (основное состояние, дельта-функция Дирака $\delta(E)$). После такой нормировки $\tilde{Z}(\beta)$ становится характеристической функцией флуктуаций энергии $\Delta E = E - E_0$ относительно основного состояния. Действительно, $\tilde{Z}(\beta) = e^{-\beta(E-E_0)}$.

Таким образом, нормированная статистическая сумма $\tilde{Z}(\beta)$ является характеристической функцией для случайной величины - флуктуирующей энергии системы. Это позволяет применять весь аппарат теории вероятностей (вычисление моментов, кумулянтов, анализ распределения) к термодинамическим флуктуациям.

[Вин02]: Винберг (2002), Курс алгебры. 3-е изд

Следующая лемма доказывается очевидно [Вин02]:

Лемма 5.2 Кольцо $\mathbb{Z}_n$ является полем тогда и только тогда, когда n — простое число

В ортонормированной системе статистические веса, соответствующие разным микросостояниям $\Delta\Gamma_i$ и $\Delta\Gamma_j$, независимы, и соответствующие функции распределения X_i и X_j также независимы. Рассмотрим характеристические функции, введённые русским математиком А.М. Ляпуновым [Гму23] $\xi(t)$ этих величин, представляющие собой преобразование Лапласа. Проверим, что $\{\xi\}$ также образует группу относительно умножения.

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

Характеристическая функция для x_k, где параметры k — математическое ожидание x_k, σ — стандартное отклонение, и σ^2 — дисперсия x_k:

$$\xi_k(t) = M\left[e^{itx_k}\right] = e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \tag{5.3}$$

Нормированные характеристические функции, аналогичные 5.1, получаются делением на ξ_0:

$$\tilde{\xi}_k = \frac{\xi_k}{\xi_0} = \frac{e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}} = e^{ikt} \tag{5.4}$$

Групповая структура $\left\{\tilde{\xi}_k\right\}_{k=0}^{p-1}$ состоит из функций вида e^{ikt} и образует группу относительно умножения. Аксиомы группы были проверены по аналогии 5.1.

Определение 5.1 (Прямая сумма подгрупп) (Аддитивная) абелева группа A называется разлагающейся в прямую сумму подгрупп $A_1, A_2 \dots A_k$, если каждый элемент $a \in A$ может быть единственным образом представлен в виде $a = a_1 + a_2 \dots a_k$, где $a_i \in A_i$. В этом случае пишут:

$$A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k \tag{5.5}$$

Прямая сумма (аддитивных) абелевых групп $A_1, A_2 \dots A_k$ — это абелева группа $A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k$, состоящая из всех последовательностей $a = a_1 + a_2 \dots a_k$, где $a_i \in A_i$, с операцией покомпонентного сложения. Например, $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_2 \cdots \oplus \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}^k$.

Если группы $A_1, A_2 \dots A_k$ конечны, то $|A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k| = |A_1|\,|A_2| \dots |A_k|$. Для случая двух подгрупп A_1, A_2 единственность представления $a = a_1 + a_2$ равносильна условию $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

В контексте мультипликативных абелевых групп 3.16 предпочтительным методом является прямое умножение. В случае составного представления групп следует рассматривать следующее уравнение: $A_1 \otimes A_2 \cdots \otimes A_k$.

Последнее определение может быть применено к статистическому весу Γ рассматриваемой системы.

Определение 5.2 Две системы изоморфно эквивалентны если они структурно аналогичны, и существует биективное отображение f (обозначаемое как $\rightarrow$), которое показывает это:

$$f : \mathbb{Z} \mapsto G \quad m \mapsto g^m \quad f : \mathbb{Z}_k \to G \quad [m] \mapsto g^m \tag{5.6}$$

для бесконечных и конечных групп соответственно, где $[m]$ обозначает класс вычетов $(mod\,\Gamma)$.

Лемма 5.3 (Ортогональность и взаимная простота) Для обеспечение фундаментальных термодинамических соотношений исследуемой системы необходимы простые числа. Чтобы совокупность $\left\{\psi_i\right\} \in \mathscr{L}_2(G;\rho)$ и $\{E_i\}$ удо-

влетворяла соотношению ортогональности $\langle \psi_{E_p} | \psi_{E_q} \rangle = \delta_{p,q}$ ($\frac{1}{p} \mapsto e^{-\beta E_p} = e^{-\beta p}$, $\frac{1}{q} \mapsto e^{-\beta E_q} = e^{-\beta q}$), должно выполняться условие: $\gcd(p,q) = 1, \quad p \neq q$, т.е. необходимо и достаточно, чтобы числа p и q были взаимно простыми.

Доказательство леммы 5.3 от противного.

В ортонормированной системе, в силу ортогональности волновых функций 1.2, соответствующих различным собственным значениям, статистические веса $\Delta\Gamma_i$ и $\Delta\Gamma_j$ различных микросостояний являются независимыми случайными величинами. Как показано для статистического веса и статистической суммы 3.1 (в предположении эквидистантных энергетических уровней) $\exists p \mapsto e^{\beta E_p} = e^{\beta p}$, $q \mapsto e^{\beta E_q} = e^{\beta q}$ ($\beta = \frac{1}{T}$ и $\Delta E = 1$, где T — температура рассматриваемой системы, рассматриваемая как единый параметр для системы и всех подсистем), из независимости микросостояний, определяемых уровнем энергии 2.15, и определения статистической суммы 4.4 следует, что одно и то же микросостояние как функция уровня энергии l должно быть уникальным и не повторяться в ряде Z-суммы, т.е. выражение $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}$ должно быть уникальным в формуле:

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots k_n p_n \mapsto \sum_{p<N;\, \alpha=1,2\dots\infty} \left(p_1^{\gamma_1} p_1^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}\right)^{-1} = \tilde{Z_1}^{k_1} \tilde{Z_2}^{k_2} \dots \tilde{Z_n}^{k_n} \tag{5.7}$$

где $\gamma_i = k_i \alpha$ и $\forall k_i, \gamma_i, \alpha, N \in \mathbb{N}$ и α последовательно пробегает ряд натуральных чисел. Следовательно, согласно Определению 5.2, это условие выражает плотность вероятности каждого микросостояния, как функции от энергии.

Согласно основной теореме арифметики каждое целое число, большее 1, является простым или может быть единственным образом представлено в виде произведения простых чисел с точностью до порядка сомножителей. §1 [Чан74].

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

Следовательно, для $\forall a = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k} \dots$ и $a \leq N$, если $\forall i,j \quad gcd(p_i, p_j) = 1, \implies \forall i,k \quad \gcd(p_i, p_k) = 1$, т.е. отношение взаимной простоты числа является рефлексивным

и транзитивным $\Longrightarrow$ если в последовательности натуральных чисел $p_1, p_2, p_3 \cdots \leq N$ все числа попарно просты $gcd(p_i, p_j)$, $\Longrightarrow$ каждое число в последовательности $\forall p_i \in a = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k} \ldots \quad a \leq N$ и a является простым.

Преобразование Лапласа — это линейный оператор $Lu = F$ с областью определения $\mathscr{M}_L$. Обозначим через $\mathscr{R}_L$ — область значений оператора L. Обратное преобразование Лапласа находится с помощью обратного линейного оператора $u = L^{-1}F$. Легко доказать, что системы функций $\{\psi_k\}$ и $\{L_{\psi_k}\}$ одновременно линейно независимы [ЖВ22]. Следовательно, нормированные статистической суммы $\tilde{Z}(\beta)_m, \tilde{Z}(\beta)_n$ при $m \neq n$ как образы случайных величин должны быть порождены на основе взаимно простых чисел $\overline{gcd(m,n) = 1 \quad m \neq n}$. Лемма доказана. □.

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

Статистический вес Γ подчиняется флуктуациям по нормальному закону [ЛЛ02]. Это можно учесть, вводя случайные матрицы:

- Пусть $\hat{H}$ — гамильтониан системы, и его энергетические уровни $\{E_n\}$ случайны (как в теории случайных матриц).
- Тогда плотность состояний $\rho(E)$ может быть описана гауссовским ансамблем.

[ЛЛ02]: Ландау и др. (2002), Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика

Согласно центральной предельной теореме для группы G, если флуктуации малы, то $ln\,\tilde{Z}$ будет распределён нормально. Это позволяет применить логнормальное распределение для $\tilde{Z}$. Для более подробного изложения см. приложение 10.

В последующем исследовании будет рассматриваться диагональная матрица энергий.

В рассматриваемой модели каждое собственное значение энергии E_i повторяется в соответствии с кратностью r_i. Это матричное представление можно обобщить, рассматривая алгебру операторов над гильбертовым пространством системы.

Определение 5.3 (Диагональный оператор энергии) Определим диагональный оператор энергии (или гамильто-

ниан в энергетическом представлении):

$$\hat{H} = diag(\underbrace{E_1, \ldots, E_1}_{r_1 \text{ раз}}, \underbrace{E_2, \ldots, E_2}_{r_2 \text{ раз}}, \underbrace{E_3, \ldots, E_3}_{r_3 \text{ раз}}, \ldots) \quad (5.8)$$

Или, в более компактной форме:

$$\hat{H} = \bigoplus_i (E_i I_{r_i}), \quad (5.9)$$

где I_{r_i} — единичная матрица размера r_i

К введённому оператору $\hat{H}$ рассматриваемой системы 5.3 возможно применить Определение 4.3.

Совместное рассмотрение подсистем в составе исследуемой системы соответствует операции объединения наборов собственных значений уравнения Шрёдингена - это следует из его линейности. В случае введения проекторов P_{E_i} * в подпространства с энергией E_n, статистическая сумма, упомянутая в уравнении 4.4, должна быть записана следующим образом:

$$Z_n(\beta) = tr(\hat{\rho}) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\mathscr{H}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i\, e^{-\beta E_n} \;\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{r_i}} \quad (5.10)$$

Статистическая сумма Z_n, как конечная, так бесконечная, циклическая группа G, порождается элементом $e^{-\beta E_n}$. Справедливость этого утверждения зависит от рассматриваемой математической модели. В физике не существуют системы, характеризующиеся бесконечными $E_.$, энтропией $S_.$ и фазовым пространством. Таким образом, можно заключить, что верхний предел в последней формуле равен $i \leq N < \infty$, где $N \in \mathbb{N}$. Можно обратиться к формулам, связывающим фазовое простанство и энтропию $\Delta\Gamma = e^S$ (см. 2.17 и 3.1)

Факторизация статистической суммы

Ранее была отмечена связь статистической суммы и энергии: $Z(\beta) = \mathscr{L}\,[\Delta\Gamma(E)]$, при этом $\Delta\Gamma(E)$ эволюционирует в пространстве энергий, а $Z(\beta)$ - в пространстве

* Для более подробного изложения см. ниже гипотезу Гольдбаха-Эйлера 2

обратных температур.

Ранг группы k подсистем проявляется здесь не как число ячеек $\Delta\Gamma(E)_i$, а как число полюсов (или независимых экспонент) в представлении статистической суммы. В естественном базисе, где каждому простому числу p_i также можно поставить в соответствие множитель в статистической сумме вида $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$ (или подобный), ранг k будет определять, что статистическая сумма $\tilde{Z}(\beta)$ факторизуется в произведение k независимых сомножителей, каждый из которых соответствует своей базисной подгруппе:

$$\tilde{Z}(\beta) = \prod_{i=1}^{k} \tilde{Z}_i(\beta) \tag{5.11}$$

Это означает, что полная система распадается на k статистически независимых подсистем - это прямо вытекает из разложения статистической суммы. Каждая такая подсистема (базисная мода) имеет свою собственную, бесконечную лестницу микросостояний.

Выше было показано, что $\tilde{Z}_n(\beta)$ изоморфно эквивалентна проектору введённого оператора энергии $P_{E_i}\hat{H} = \hat{H}_i$, где $\hat{H}, \hat{H}_i$ — гамильтониан рассматриваемой системы и его подпистемы i соответственно 5.3. Этот результат согласуется с выводами о структурном изоморфизме для групп 5.6.

Без потери общности $\forall$ ортогональная система функций $\{\psi_k\}$ термодинамической системы может быть получена через порождающий элемент группы по формуле, содержащей амплитуду, фазовый множитель и осциллирующую часть:

$$\psi_{p_n}^{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E p_n t\right), \quad i^2 = -1 \tag{5.12}$$

где простое число $p_n \mapsto exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E p_n t\right) = exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_n t\right)$, $\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ — функция дробной части, обозначаемая фигурными скобками $\{\}$, t — время, $\hbar$ — постоянная Планка, $\Delta E = 1$ в соответствии со следствием об эквидистантных энергетических уровнях 4.1. Можно показать, что соответствующие матрицы представлений для волновых

функций $\psi_{p_n}^{(\nu)}$ и $\psi_{p_m}^{(\mu)}$ коммутируют, в согласии с гипотезой о том, что они являются неприводимыми и унитарными представлениями подгрупп группы G порядка p_n и p_m соответственно.

Линейная независимость собственных подпространств. Лемма верна как для вещественных, так и для комплексных собственных значений.

Лемма 5.4 Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), а $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — попарно различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, а $e_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$ — произвольные ненулевые собственные векторы, отвечающие этим значениям, то система $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ линейно независима.

Доказательство. Проведём индукцию по k. База: $k = 1$. Один ненулевой вектор линейно независим по определению. Предположение индукции: Пусть утверждение верно для любых $k-1$ собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Шаг индукции: Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k = 0, \qquad e_i \in V_{\lambda_i}. \tag{1}$$

Применим к обеим частям оператор $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, получим

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \tag{2}$$

Вычтем из равенства (2) равенство (1), умноженное на λ_k:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0.$$

Это — линейная комбинация $k-1$ собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$. По предположению индукции они линейно независимы, поэтому для всех $i = 1, \ldots, k-1$:

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0.$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_k$, то $\alpha_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$. Подставляя $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ в (1), получаем $\alpha_k e_k = 0$, откуда $\alpha_k = 0$ (поскольку $e_k \neq 0$).

Таким образом, все коэффициенты α_i равны нулю, что доказывает линейную независимость системы $\{e_1, \ldots, e_k\}$. □

Исходя из доказанной леммы, руководствуясь тем, что оба сомножителя естественного базиса 5.12 - полные ортогональные системы функций, проверим условие нормировки:

$$\left\langle \psi_{p_m}^{(\mu)} | \psi_{p_m}^{(\mu)} \right\rangle = \delta_{m,n}\delta_{\mu,\nu} \tag{5.13}$$

Может быть осуществлена из общих соображений: различным собственным значениям соответствуют ортогональные волновые функции. Важно обратить внимание, что оба сомножителя в формуле выше соответствуют полной ортонормированной системе функций.

Леммы Шура влекут за собой соотношение ортогональности для матричных элементов 3.6. Свойство приводимости представлений группы симметрии определяется физическими свойствами исследуемой системы. В дальнейшем рассмотренный базис будет обозначаться как естественный базис для волновых функций.

Указанные меры позволяют нам обеспечить соответствие предложенной математической модели фундаментальным теоремам абстрактной алгебры.

6 Дифракционная решётка. Естественный базис для волновой функции.

Физический подход к верификации математического доказательства позволяет сравнивать явления схожей природы. Поскольку электричество и магнетизм, явление интерференции и дифракции изучаются в школе, мы переформулируем задачу статистической физики в терминах спектрального разложения света с помощью дифракционной решётки. Если в случае статистической физики использование простых чисел обеспечивало условие уникальности каждого микросостояния, то при работе с дифракционными решётками простые числа помогают предотвратить перекрытие спектров. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля каждая точка (каждая щель) на волновом фронте, дошедшем до решётки, становится источником вторичных когерентных сферических волн.

Математический вывод для интенсивности света на дифракционной решётке дословно переносится на расчёт вероятности в квантовой механике путём замены напряжённости электрического поля $E \longrightarrow \psi$ — на волновую функцию, а интенсивности света $I \longrightarrow Pr(obability) = \left|\Psi^2\right|$ на вероятность нахождения системы в исследуемом квантовом состоянии: Формула для расчёта интенсивности света

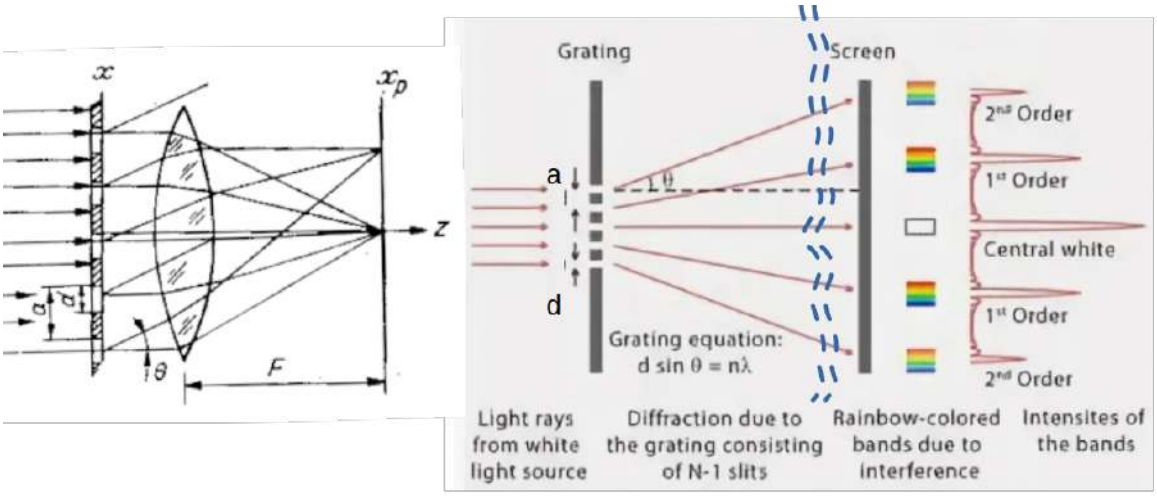


Рис. 6.7: Дифракционная картина монохроматической волны наблюдается на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы (слева). Одновременно дифракционная решётка может функционировать как спектрометр для случая белого света (справа собирающая линза опущена для простоты).

дифракционной решётки выводится из решения задачи дифракции электромагнитной волны на экране с помощью интеграла Кирхгофа, который может быть вычислен в элементарных функциях для случая плоских электромагнитных волн (приближение Фраунгофера) или волн, исходящих из точки (приближение Френеля), как описано в формуле ниже для напряжённости электрического поля:

$$E(P) = \frac{k}{2\pi i z} \iint_S E(x,y) \exp\left\{i\left(kz - \omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} dxdy$$

$$x \leq d_x \leq x_p \leq \sqrt{\lambda z}, \quad y \leq d_y \leq y_p \leq \sqrt{\lambda z} \quad i^2 = -1 \tag{6.1}$$

Неравенства в нижней части формулы 6.1 необходимы для применения разложения волн Фраунгофера.

Согласно принципу Гюйгенса–Френеля каждая точка (каждая щель) на волновом фронте, дошедшем до решётки, становится источником вторичных когерентных сферических волн. Поскольку щели идентичны и освещены одинаково (когерентно), амплитуда напряжённости

электрического поля (E_0) и начальная фаза (φ_0) волны, исходящей из каждой щели, одинаковы для всех щелей в направлении нормали ($\theta = 0$). Начальная фаза φ_0 может быть принята равной нулю для удобства. Эта разность хода приводит к разности фаз (δ) между волнами от соседних щелей: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin(\theta)$

Плоская монохроматическая падающая волна с длиной волны λ падает перпендикулярно плоскости решётки. В этой формуле k — волновой вектор $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, а k_x, k_y — его проекции на плоскость экрана, причём $k_x = k\theta$. Оси координат x и y отсчитывают координаты решётки и расположены параллельно плоскости экрана, тогда как z направлена ортогонально экрану и проходит через его центр. Параллельные лучи фокусируются линзой, координаты x_p, y_p отсчитывают координаты на экране и расположены в его плоскости. d_x, d_y обозначают расстояние между соседними штрихами или щелями на дифракционной решётке вдоль оси x, y соответственно (период дифракционной решётки).

Согласно теореме Остроградского–Гаусса, позволяющей вычислить напряжённость электрического поля, для щелевидного отверстия (цилиндрическая симметрия, одномерный случай) множитель в интеграле Кирхгофа следует заменить:

$$\frac{k}{2\pi i R} \to \sqrt{\frac{k}{2\pi i z}} \tag{6.2}$$

На основании вышеизложенного легко найти интенсивность поля на экране в соответствии с разностью хода от соседних щелей: Для волн, распространяющихся от двух соседних щелей (например, n-й и $(n+1)$-й) под углом θ, возникает разность хода (Δl): $\Delta l = d \cdot \sin(\theta)$

$$E(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{na}^{na+d} E_0 \, e^{-ikx^2} dx \right) e^{i(k_z - \omega t)} \tag{6.3}$$

Здесь N — общее число щелей в дифракционной решётке, освещённых падающей на неё волной под углом θ (при $\theta = 0$ луч света ортогонален решётке), F — фокусное расстояние вдоль оси Z. Сумма геометрической прогрессии с

N членами: $Sum = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$ Подставляя $q = \exp(i\cdot\delta)$: $Sum = \frac{1-\exp(i\cdot N\cdot\delta)}{1-\exp(i\cdot\delta)}$. Для упрощения Суммы используем формулу Эйлера ($\exp(i\alpha) = \cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$) и алгебраические преобразования: $Sum = \frac{[1-\cos(N\delta)-i\sin(N\delta)]}{[1-\cos(\delta)-i\sin(\delta)]}$ Умножим числитель и знаменатель на $\exp(-i\cdot\delta/2)$ [Пар83]. Классическое упрощение даёт: $S = \frac{\sin(N\cdot\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cdot\exp(i\cdot(N-1)\cdot\delta/2)$ † Выполнив интегрирование и просуммировав полученную геометрическую прогрессию, найдём интенсивность.

[Пар83]: Парселл (1983), Берклеевский курс физики

$$
\begin{aligned}
I(x_p) &= \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{kE_0^2}{2\pi F}\cdot\left|e^{-ik\theta a}-1\right|^2\cdot\left|\frac{e^{-ikN\theta a}-1}{e^{-ik\theta a}-1}\right|^2 \\
&= \frac{cN^2E_0^2k d^2}{8\pi^2F}\cdot\left(\frac{\sin U}{U}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N\alpha}{N\sin\alpha}\right)^2 \qquad (6.4)\\
I(\theta) &= I_0\cdot\left(\frac{\sin U}{U}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(N\alpha)}{N\sin\alpha}\right)^2
\end{aligned}
$$

Где $\alpha = \frac{k\theta a}{2}$; $U = \frac{k\theta d}{2} = \frac{d}{a}\cdot\alpha$. Интенсивность суммарной волны: Интенсивность света I пропорциональна квадрату амплитуды ($I \propto A^2$): $I_{\text{Общ.}}(\theta) \propto [A_{\text{Общ.}}(\theta)]^2 = E_0^2\cdot\left[\frac{\sin^2(N\cdot\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}\right]$ Обозначим интенсивность от одной щели в направлении θ как $I_0(\theta) \propto E_0^2$. Тогда согласно [МЧ14]: $I_{\text{Общ.}}(\theta) = I_0(\theta)\cdot\left[\frac{\sin^2(N\cdot\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}\right]$

[МЧ14]: Мешков и др. (2014), Электромагнитное поле. Часть 2. Электромагнитные волны и оптика

В точках, где аргумент α принимает значения

$$\alpha_m = m\pi; \quad \theta_m = \frac{2m\pi}{ka} = m\frac{\lambda}{a}, \qquad (6.5)$$

располагаются главные максимумы. Число m называется порядком максимума или дифракционным порядком. Их величина убывает с номером порядка m как

$$I_m = I_0\left(\frac{\sin U_m}{U_m}\right)^2 \sim \frac{I_0}{m^2}. \qquad (6.6)$$

Заметим, что расстояние между максимумами обратно пропорционально периоду структуры a. Помимо главных

† Модуль этого выражения ($|S|$) даёт амплитуду суммарной волны (с точностью до фазового множителя, не влияющего на интенсивность), а экспонента $\exp(i\cdot(N-1)\cdot\delta/2)$ описывает фазовый сдвиг суммарной волны относительно нулевой щели.

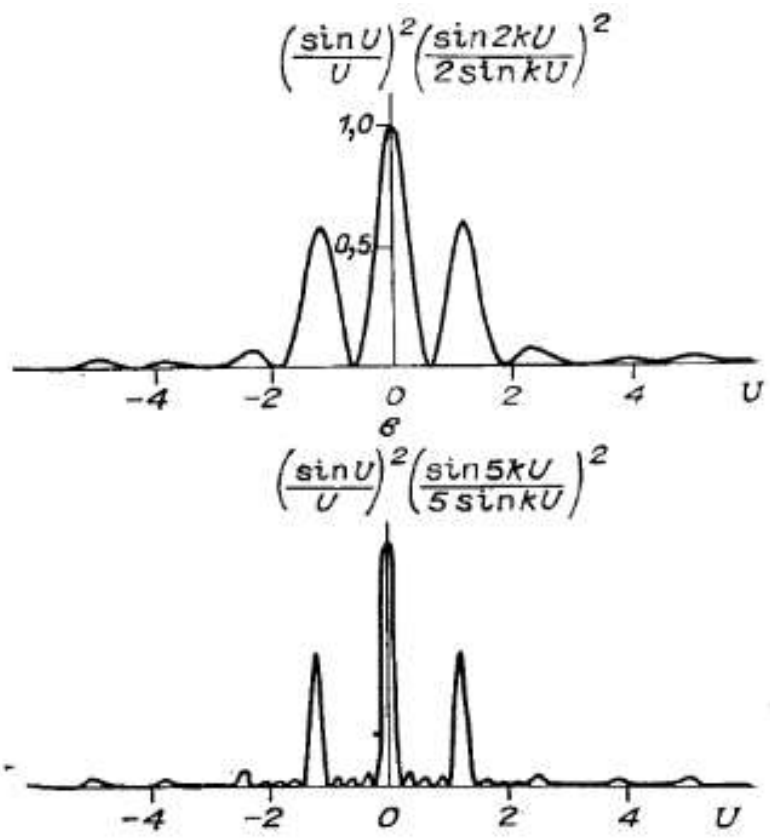


Рис. 6.8: Случаи $N = 3$ (сверху) и $N = 5$ (снизу) — общее число щелей в дифракционной решётке, освещённых падающей на неё волной

максимумов, функция $I(0)$ содержит вторичные максимумы, расположенные в точках

$$N\alpha_n = (2n+1)\pi/2; \quad \alpha_n \neq m\pi; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.7}$$

и их интенсивности составляют $I_n \sim I_0 N^2 U_n^2$, $U_n = d\alpha_n/a$. Для вторичных максимумов, расположенных между m-м и $(m+1)$-м главными максимумами, значение параметра $\alpha_n \sim m\pi$, следовательно

$$I_n \sim \frac{I_0}{N^2 m^2} \cdot \left(\frac{a}{\pi d}\right)^2 \sim \frac{I_m}{N^2}. \tag{6.8}$$

Поиск математического доказательства в отрыве от явлений материального мира (волны света, "распространяющиеся в эфире") может завести в тупик

Таким образом, вторичные максимумы в N^2 раз меньше главных и в практически интересных случаях ($N \gg 1$) неразличимы. Это обстоятельство хорошо иллюстрируется кривыми, приведёнными на рис. 6.8.

Дифракционные решётки являются ключевым элементом для сложной пространственной фильтрации и управления волновым фронтом любого происхождения (свет, радио-

волны, звук). Использование каскада из двух или более дифракционных решёток позволяет манипулировать отдельными «фракциями» (пространственными частотами) волнового поля, что представляет собой мощный инструмент в науке и технике. При падении белого света на решётку он разлагается в спектр. Для фильтрации определённой длины волны (монохроматического света) один из спектральных порядков (например, первый порядок) выделяется путём физического блокирования всех остальных.

Здесь крайне важно избежать перекрытия порядков, которое возникает, когда:

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2 \tag{6.9}$$

где m_1 и m_2 — различные дифракционные порядки. (В реальных спектрометрах инженеры и учёные используют несколько методов для решения этой проблемы: оптические фильтры, сортировку порядков по дисперсии, использование низких порядков и т.д.). Если периоды решёток a в каскаде дифракционных решёток относятся друг к другу как простые числа, это помогает преодолеть проблему спектрального перекрытия.

С этой точки зрения работа каскада дифракционных решёток (включая случаи квантовых дифракционных решёток [Woj16]) аналогична задаче уникального учёта каждого микросостояния в статистической физике. Таким образом, ранее определенной естественный базис имеет аналогию на целого класса физических явлений, известных из курса школьной программы.

[Woj16]: Wojciechowski (2016), «Quantum diffraction grating: A possible new description of nuclear elastic scattering»

Свет материален

Для школьников это хорошо известно. Но в середине XIX века, когда подготовил свои труды по ζ-функции Риман, уже были известны явление интерференции волн и дифракции от щели, распределение интенсивности света от дифракционной решётки. Почему бы не объяснить с этих позиций смысл ζ-функции? Однако потребовались ещё полстолетия до революционных преобразований в физике для зарождения квантовой механики, выводов, касающихся симметрии решения

уравнений Шрёдингера, связи статистической физикой с теорией вероятностей.

Можно сопоставить формулу с выводами, касающимися фазы волны, для случая WKB и интегралов Фейнмана. 6.12. Из термодинамики известно, от плотность вероятности ρ нахождения частицы в окрестности заданной точки 2.9 однозначно определяется как функция от энергии - это легко понять школьнику из распределений Больцмана и Максвелла - 2.1.

Поиск математического доказательства в отрыве от явлений материального мира (волны света, "распространяющиеся в эфире") может завести в тупик.

6.1 Обобщение аналогий естественного базиса и формулы дифракционной решетки

В этом подразделе и следующем разделе $\phi(a)$ обозначает функцию Эйлера — количество натуральных чисел, взаимно простых с a и не превосходящих a. В частности, для $a = p$ (где p — простое число), $\phi(p) = p - 1$, а для $a = p^\alpha$, имеем $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = a\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Для общего случая, $\phi(a) = a\prod_{p|a}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, где $p \mid a$ обозначает все простые делители a.

Функция Эйлера мультипликативна

Заметим, что наряду с определённой выше функцией функция Эйлера мультипликативна, что соответствует принципу перемножения фазовых объемов подсистем, образующих исследуемую систему 2.17. В составе отдельной подсистемы возможно разделение фазового объема по тем переменным, которые соответствуют интегралам движения и согласуются с симметрией исследуемой системы см. 2.5. Этот процесс конечен и он определяется во-первых дискретностью. фазового пространства, во вторых симметрией исследуемой системы.

Связь естественного базиса и формулы дифракционной решетки не просто удобна, но и фундаментальна. Она позволяет нам интерпретировать дифракционную решётку как устройство, преобразующую исследуемую систему

в суперпозицию состояний с определенным импульсом, эффективно измеряя проекцию импульса на экран в фокальной плоскости. Таким образом, фазовый множитель в уравнении 5.12 может быть отождествлен с характером группового представления (см. уравнение 3.10).

С этой точки зрения, уравнение 5.12 наглядно демонстрирует, как с помощью единственного элемента порождается бесконечный ряд микросостояний. Этот принцип воплощен в статистической сумме. Однако, выбирая ортонормированный базис, вычисление средних можно ограничить числом микросостояний, равным порядку лежащей в основе циклической подгруппы, p. Следовательно, среднее значение любой наблюдаемой величины будет легко определяться уравнением 2.20. Этот ряд абсолютно сходится, когда Z-суммы нормированы (уравнение 5.1).

Выбор простых чисел критически важен в этом формализме. Он гарантирует уникальный учет каждого микросостояния в статистической физике. Он необходим для идеальной работы каскада дифракционных решеток — спектрометра без перекрывающихся спектров. Для дифракционных решеток это означает выбор отношений между периодами решеток (в целых единицах) с фиксированным числом щелей. В рамках приближения Фраунгофера мы можем упростить вычисления, предположив в уравнении 6.4, что отношения между общими числами щелей $N_1, N_2 \ldots$ являются простыми числами, при сохранении постоянной общей апертуры каскада.

Это требование взаимной простоты целых чисел обосновано тождеством Безу, которое гарантирует, что как теоретико-числовой, так и физический подходы эквивалентны.

Замечание 6.1 Примечательно, что работа идеального каскада дифракционных решеток описывается китайской теоремой об остатках легко доказываемую по индукции аналогично Лемме 7.1.

Тождество Безу — это следующая теорема. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа, не все равные 0. Тогда существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что выполняется соотношение: $gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

Согласно уравнению 6.3, начальная фаза (φ_0) волны, исходящей из каждой щели в нормальном направлении ($\theta = 0$), представлена единичным элементом e циклической группы $\left\{e, g, \ldots g^{p-1}\right\}$.

Использование естественного базиса, в дальнейшем обозначаемого как в уравнении 5.12, позволяет применять функцию Эйлера $\phi(n)$. Эта функция подсчитывает количество смежных классов в мультипликативной группе по модулю n (где $n = \Delta\Gamma$). Как установлено в первом абзаце этого подраздела, (порядок) циклической подгруппы равен $ord = \phi(n) + 1$.

История представления о свете как о форме материи

Идея о том, что свет — это материя, зародилась ещё в античности. Одним из первых, кто рассматривал свет как материальный объект, был Эпикур — древнегреческий философ, представитель атомистической школы. Он, как и его предшественник Демокрит, считал, что всё в мире состоит из атомов, и свет не является исключением. Эпикур полагал, что свет — это особый вид материи, состоящий из мельчайших частиц, которые движутся в пространстве.

Позже эту идею развил Лукреций Кар — римский поэт и философ, автор поэмы «О природе вещей». Он также рассматривал свет как материальный поток частиц.

В XVII веке идею о материальности света возродил Пьер Гассенди — французский философ и учёный. В своём труде Syntagma Philosophicum («Философский трактат»), опубликованном посмертно в 1658 году, он развивал атомистическую теорию материи. Гассенди утверждал, что свет — это поток особых частиц (atomi lucificae), которые относятся к разным типам (например, цветам). Эти частицы, по его мнению, идентичны атомам тепла и движутся с чрезвычайно высокой скоростью.

В то же время Исаак Ньютон разработал корпускулярную теорию света, ставшую классической. Согласно ей, свет состоит из мельчайших частиц — корпускул, испускаемых светящимися телами. Эти частицы движутся по прямой линии с конечной скоростью, обладают массой и импульсом. Ньютон опирался на существующие атомистические идеи, в том числе Гассенди, для разработки своей концепции.

Противоположную точку зрения высказывали сторонники волновой теории (Рене Декарт, Роберт Гук, Хри-

стиан Гюйгенс). Они считали, что свет — это волны, распространяющиеся в особой среде — эфире. Гюйгенс в своём «Трактате о свете» (1690) развил эту идею, предложив принцип, который позже назвали принципом Гюйгенса–Френеля.

В XIX веке волновая теория восторжествовала благодаря работам Томаса Юнга и Огюстена Френеля, которые экспериментально подтвердили явления интерференции и дифракции, объяснимые только с позиций волновой теории. Затем Джеймс Клерк Максвелл сформулировал теорию электромагнетизма, согласно которой свет — это электромагнитная волна. Эксперименты Генриха Герца блестяще подтвердили эту теорию.

В начале XX века были обнаружены квантовые свойства света (фотоэффект, эффект Комптона), что привело к революционной идее о двойственной природе света — корпускулярно-волновом дуализме. Свет может проявлять как волновые, так и корпускулярные (квантовые) свойства в зависимости от условий эксперимента.

Таким образом, представление о свете как о форме материи имеет древние корни. Его развитие прошло через многовековую конкуренцию теорий и серию фундаментальных открытий, которые в итоге привели к современному, сложному и удивительному пониманию природы света.

7 Теорема о квантовой природе p-чисел

Поскольку произведение $c_i c_i^*$ дает вероятность нахождения термодинамической системы в состоянии $|i\rangle$ с собственным значением энергию E_i (как видно из уравнения 1.3), следует, что собственные значения операторных уравнений определяют коэффициенты c_i и c_i^* в суперпозиции стационарных решений $\Psi(q,t)$ уравнения Шрёдингера.

Определение 7.1 p-примарная абелева группа (где p — фиксированное простое число) — это абелева группа $(A,+)$ такая, что порядок любого элемента в A являет-

ся степенью p. $(\mathbb{Z}_{p^n}, +)$ — аддитивная группа классов вычетов по модулю p^n.

Разложение абелевой группы в прямое произведение циклических групп следует из теоремы о структуре конечных абелевых групп. Любая конечная абелева группа может быть разложена в прямую сумму своих циклических подгрупп, порядки которых являются степенями простых чисел. Мультипликативная запись не меняет сути разложения — это лишь альтернативный способ обозначения групповой операции.

Лемма 7.1 Если a пробегает полную приведённую систему вычетов по модулю m, а a' пробегает полную приведённую систему вычетов по модулю m', то $am' + a'm$ пробегает полную приведённую систему вычетов по модулю mm'

(гл. 2 §2 [Чан74])

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

Доказательство. Для доказательства леммы от противного заметим, что имеется mm' целых чисел вида $am' + a'm$. Покажем, что они попарно несравнимы по модулю mm'. Предположим обратное: $a'_1 m + a_1 m' \equiv a'_2 m + a_2 m' \pmod{mm'}$. Тогда $a_1 m' \equiv a_2 m' \pmod{m}$, откуда, с учётом $gcd(m, m') = 1$, следует, что $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$. Аналогично, $a'_1 \equiv a'_2 \pmod{m'}$. Обратное неверно. □

Прежде, чем сформулировать теорему в развитие Леммы об оротогональности и взаимной простоте, 5.3 сделаем ряд важных замечаний.

Говоря о биекции $p_i \mapsto e^{\beta E_i}$, можно также суммировать геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{p}$ и установить аналогичное отношения биекции $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$

Предложение 7.2 Поскольку множество простых чисел счётно, вместо натуральных чисел для случая эквидистантного спектра 4.1 можно использовать бесконечную последовательность простых чисел, нумеруя энергетические уровни - собственные числа и соответствующие им волновые функции простыми числами p. Другими словами, можно считать $\Delta E_p = p$ и $E_n = \Delta E_p \cdot n = p \cdot n$. С помощью унитарных преобразований можно осуществить переход к только что описанному базису. В равной мере ниже будет использованы гомоморфизмы $p \mapsto e^{\beta p}$, $\frac{1}{p} \mapsto e^{-\beta p}$ Также в определённом ниже естественном базисе, каждому простому числу p_i будет

сопоставлен множитель в статистической сумме вида $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$ (или подобное выражение).

Рассмотрим квантовую систему, чьё гильбертово пространство состояний $\mathscr{H}$ сепарабельно и бесконечномерно. Выберем специальный базис, уже определенный нами как естественный базис.

Формулировка теоремы

Теорема 7.1 (О квантовой природе простых чисел) Пусть квантовая система находится в состоянии термодинамического равновесия, описываемого каноническим ансамблем при обратной температуре $\beta = \frac{1}{T}$. В естественном базисе, состоящим из полной ортонормированной системе волновых функций $\{|\psi_{p_k}\rangle\}$ с собственными числами (энергетическими уровнями) равными простым числам p_i при этом $\Delta E_{p_i} = p_i$ и $E_n = \Delta E_{p_i} \cdot n = p_i \cdot n$. Тогда этот базис и соответствующий ему статистический оператор $\hat{\rho}_\beta$ обладают следующими свойствами:

1. Диагональность и явный вид. Матрица плотности диагональна в этом базисе. Её диагональные элементы (статистические веса) задаются распределением Гиббса по простым числам.
2. Универсальность представления. Для произвольной квантовой системы с гамильтонианом $\hat{H}$, имеющим дискретный спектр, существует унитарное преобразование $\hat{U}$, переводящее её собственный энергетический базис в полный ортонормированный естественный базис $\{|\psi_{p_k}\rangle\}$ (с точностью до вырождения и перенормировки энергии). В этом представлении исходный гамильтониан $\hat{H}$ преобразуется к виду $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$, а его спектр отображается в подмножество множества простых чисел (с возможным повторением, если спектр вырожден). Диагональ матрицы плотности канонического ансамбля для исходной системы в данном представлении будет определяться распределением Гиббса по этому арифметизированному спектру.

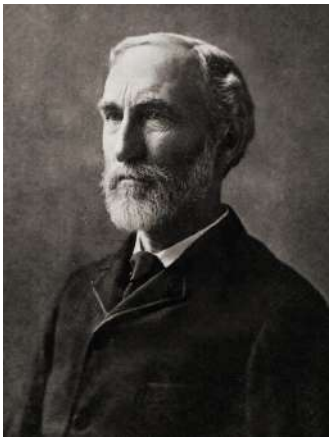


Рис. 7.9: Джозайя Уиллард Гиббс (1839 - 1903) — американский физик-теоретик, один из создателей термодинамики и статистической механики.

Доказательство: Согласно лемме об ортогональности и взаимной простоте 5.3: $\underline{Z}^{(i)} = \langle g_i \rangle$, где $g_i = \frac{1}{p_i}$ для конкретного значения энергии $p_i \mapsto e^{\beta E_i}$ и каждое E_i повторяется в соответствии с кратностью r_m, $\hat{\rho}_i$ изоморфно

эквивалентен оператору проектора $P_{E_i}\hat{H}$ 5.3, а нормированная статистическая сумма $\tilde{Z}(\beta)$ является характером абелевой циклической энергетической группы $G = \mathbb{Z}_{E_{\text{Общ.}}}$. Пусть $n = E_{\text{Общ.}}$, тогда аддитивная группа классов вычетов по модулю обозначается как $\mathbb{Z}_n$ (здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел):

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n \dots [n-1]_n\} \tag{7.1}$$

(где $n = E_{\text{Общ.}}$) — это классы вычетов $mod\, n$. Согласно лемме о взаимной простоте 5.3, среди всех классов вычетов нас интересуют только приведённые классы вычетов $[k]_n$ такие, что $gcd(k,n) = 1$. При этом условии взаимной простоты возможны обычные алгебраические операции в кольце вычетов. Выразим матрицу плотности вероятности через естественный базис для волновых функций 5.12, согласно определению плотности вероятности: $|\Psi|^2 = \sum\limits_{\mu,\nu} c_\mu^* \cdot c_\nu \psi_\mu^* \psi_\nu$ произведём усреднение по квантовым состояниям $\langle\rangle$:

$$\left\langle \psi_{p_m}^{(\mu)} | \psi_{p_n}^{(\nu)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_m p_n}} \left\langle exp\left(i2\pi \frac{r}{p_m p_n}\right) \right\rangle_r \cdot \left\langle \sum_{m,n} exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E(p_m - p_n)t\right) \right\rangle_{m,n}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{p_m-1} \int dq \psi_{p_m}^{(\mu)*} \psi_{p_m}^{(\mu)}}{p_m} \delta(m,n) = \frac{p_m}{p_m}\delta(m,n) = \delta(m,n) \quad i^2 = -1 \tag{7.2}$$

Согласно Лемме 7.1 выражение $r = mp_n - np_m$ для $m \neq n$ пробегает полную приведённую систему вычетов по модулю $mod(p_m p_n)$ и, в свою очередь, множитель со знаком $\sum$ образует дельта-функцию Дирака $\delta_{m,\mu}$ [Куб07]. Интеграл $\langle\rangle$ по каждому классу вычетов $\sum\limits_{\mu=0}^{p_m-1} \int dq \psi_{p_m}^{(\mu)*} \psi_{p_m}^{(\mu)} = 1$ даёт единицу, ($\forall$ элемент группы $\tilde{Z}$ имеет обратный элемент), а в сумме число таких вычетов равно p_m. Как отмечалось выше, для разных собственных значений соответствующие волновые функции ортогональны. Следовательно, первый сомножитель в строке первой формулы выше упрощается до: $\mu = \nu$ и $\frac{1}{\sqrt{p_m p_n}} \longrightarrow \frac{1}{p_m}$ и выражение $r = 1, \dots p_m - 1$ пробегает полную приведённую систему вычетов по модулю $mod(p_m p_n)$. $\forall p_m$ может рассматриваться как случайная величина или вектор, ортогональ-

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

ный другим $p_m \perp p_q, \quad p \neq q$. Каждое собственное значение энергии, даже без учёта вырождения, повторяется p_m раз. Это не меняет среднего значения для вычисления наблюдаемой, но имеет важные следствия.

Здесь $\otimes$ обозначает прямое произведение матриц, ссылаясь на формулу: $\left\{\underline{A} \otimes \underline{B}\right\}_{i\alpha,k\beta} = a_{i,k} b_{\alpha,\beta}$

Статистическая сумма $\left\{\tilde{Z}_m\right\}$, вычисляется через след диагональной матрицы плотности $\hat{\rho}_m = \left\langle g_m \right\rangle$. В свою матрица плотности - это результат тензорного умножения суперматриц 4.3: $\hat{\rho}_m = \left\langle g \right\rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_m = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_m), \quad \hat{\rho}_m = \left\langle g_m \right\rangle = \frac{1}{p_m} \\ = diag\left\{e, g, \dots g^{p_m-1} \dots\right\} \\ g_m = \frac{1}{p_m},\ p_m \mapsto e^{\beta E_m} \\ \hat{\rho}_m = diag\left\{e, g, \dots g^{p_m-1}\right\} \\ \otimes diag\left\{I_{p_m}, \left(\frac{1}{p}\right)^{p} I_{p_m}, \left(\frac{1}{p}\right)^{2p} I_{p_m}, \left(\frac{1}{p}\right)^{3p} I_{p_m} \dots\right\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

где I_{p_m} — единичная матрица размером $p_m \times p_m$, p_m — простое число (наряду с этим используется сокращённая запись, где индекс опускается: p).

Таким образом формируется полная ортогональная система функций $\psi^{(\mu)}_{p_m}$ в пространстве Лебега с весом. Гамильтониан произвольной термодинамической системы разлагается в этом базисе на сумму независимых слагаемых $H = \sum_{i=1}^{k} H_i$, где H_i действует только на подсистему i, то каноническая матрица плотности имеет вид:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z} = \frac{\prod_{i=1}^{k} e^{-\beta\hat{H}_i}}{\prod_{i=1}^{k} Z_i} = \bigotimes_{i=1}^{k} \frac{e^{-\beta\hat{H}_i}}{Z_i} = \bigotimes_{i=1}^{k} \hat{\rho}_i, \tag{7.4}$$

где

$$\hat{\rho}_i = \frac{e^{-\beta\hat{H}_i}}{Z_i}$$

— матрица плотности i-й подсистемы, а $Z_i = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}_i}$ — её статистическая сумма. Это непосредственно следует из факторизации статистической суммы и экспоненты оператора Гамильтона.

Достаточно вычислить среднее значение наблюдаемой только для $diag\left\{e, g, \dots g^{p-1}\right\}$ первых элементов циклической группы, порождённой элементом 7.3 (группы кручения), и экстраполировать результат на все микросостояния. □.

Теорема о квантовой природе простых чисел определяет лишь общие свойства уравнения Шрёдингера. Для решения конкретной задачи необходимо разрешить дифференциальное уравнение в частных производных, учесть значения волновой функции / её производных на границе области локализации (включая точку на бесконечности).

Вместе с тем нахождение гамильтониана исследуемой знание свойств её симметрии позволяет существенно упростить поиск решения, вычислить наблюдаемые (энергию, импульс, энтропию и др. термодинамические величины).

Следствие 7.3 (Естественный базис - полная ортогональная система функций) Без ограничения общности всегда можно выбрать естественный базис для произвольной волновой функции опивающей термодинамическую систему, в котором главная диагональ её статистической матрицы в энергетическом представлении состоит из собственных значений, созданных на основе ряда простых чисел с кратностью каждого собственного значения, равной простому числу. В результате формируется полная ортогональная система функций в пространстве Лебега с весом.

Упрощение благодаря выбору базиса

В естественном базисе вместо бесконечной статистической матрицы может быть использована конечная. Пусть система обладает симметрией, описываемой конечной циклической группой порядка p_m. Тогда задача нахождения статистического среднего наблюдаемой сводится к элементарному усреднению по главной диагонали в этом p_m-мерном базисе. Вычисление среднего по формуле 2.20 сводится к работе с конечной диагональной матрицей, состоящей из сегментов длиной p_m. В случае наличия вырожденных уровней энергии

(кратных алгебраических корней g_m) ситуация качественно ни изменяется - длины сегментов увеличиваются с учетом кратности $p_m g_m$ см. ниже.

В самом деле, пусть исследуемая система содержит k подгрупп. Тогда такая система описывается прямым произведением k таких конечных групп. Её гильбертово пространство будет тензорным произведением k пространств размерностью p_m соответственно. Таким образом, вместо одной бесконечной матрицы достаточно произвести усреднение по набору конечных матриц (их тензорным произведением). Это огромное упрощение вытекает из свойства симметрии.

Следствие 7.4 (Важное свойство естественного базиса для волновой функции) В упомянутом выше естественном базисе для волновой функции 5.12 каждое значение энергии, даже без учёта вырождения, встречается p_m раз, где p_m — m-ое по порядку возрастания простое число. Генерирующий статистическую сумму элемент $\frac{1}{p_m}$ для $\forall p_m$ может рассматриваться как случайная величина или вектор, ортогональный другим.

Достаточно породить циклическую подгруппу $\underline{F} \subset \underline{Z}$ порядка p. Согласно теореме Лагранжа, если $\underline{F}$ является подгруппой группы $\underline{Z}$, то $\left|\underline{Z}\right| = \left[\underline{Z} : \underline{F}\right] \cdot \left|\underline{F}\right|$. Пусть число микросостояний $\Delta\Gamma$ делится на простое число p с остатком:

$$\Delta\Gamma = ap + b, \quad b < p \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta\Gamma}{p} = a \quad \text{микросостояний.} \tag{7.5}$$

Тогда можно экстраполировать ряд статистических сумм на остаточные элементы или отбросить их как пренебрежимо малые слагаемые. Учитывая абсолютную сходимость ряда статистических сумм по признаку Даламбера, сумму ряда можно вычислить без труда. Приближённые вычислительные методы являются распространённым подходом в области квантовой механики [Миг13]. Как пишет А. Мессиа: Практически ни одна из физических систем не может быть изучена без использования подходящего приближённого метода [Мес79].

[Миг13]: Мигдал (2013), Приближенные методы квантовой механики

[Мес79]: Мессиа (1979), Квантовая механика, в 2 т

Как следствие выбора естественного базиса для волновых функций, рассмотренного ранее, вычисление среднего значения наблюдаемых может быть значительно упрощено. Это видно из выражений 2.20 и 7.3, где среднее значение наблюдаемой вычисляется по конечному числу микросостояний, порождённых элементом $\langle g \rangle$ циклических групп $diag\left\{e, g, \dots g^{p-1}\right\}$. Кроме того, применяется ортогональность с весом 1.1, вычисленным согласно элементарным правилам бесконечной геометрической прогрессии с вещественным знаменателем $\left(\frac{1}{p}\right)^p$.

Замечание 7.1 Теорема устанавливает глубокий изоморфизм между структурой канонического ансамбля в квантовой статистической механике и мультипликативной структурой множества простых чисел. Это позволяет применять методы теории чисел к задачам статистической физики и наоборот.

Определение 7.2 В теории групп подгруппа H группы G может быть использована для разложения основного множества G на непересекающиеся подмножества одинакового размера, называемые смежными классами. В общем случае существуют левые смежные классы и правые смежные классы. Очевидно, что для абелевой группы левые и правые смежные классы эквивалентны.

Замечание 7.2 (Не только идеальные газы) Важно помнить, что фундаментальные законы статистической физики (особенно следует выделить симметрию) применимы к любым материальным объектам. Именно из этих законов следуют общие концепции наблюдения переменных, принципы взаимодействия, лабораторных измерений, верификации математических теорий.

Следствие 7.5 (Назначение простых чисел) Назначение простых чисел - обеспечить реализацию свойства симметрии произвольной системы, выполнения соотношения ортогональности волновых функций. Другими словами простые числа , обеспечивают сепарабельность (от лат. separo - отделять) - возможность разделения объекта на отдельные составные части с сохранением их свойств. Это отделимость частей составной системы

в качестве самостоятельных и полностью независимых объектов. Именно благодаря простым числам можно обеспечить состояния изолированности либо напротив - состояние квантовой запутанности (когерентности).

Согласно Определению 4.3 простые числа p_n являются наименьшей подгруппой, содержащей множество всех линейных комбинаций вида $k_1p_1 + k_2p_2 + \cdots + k_mp_m$ и гомоморфной статистической сумме $\tilde{Z_1}^{k_1}\tilde{Z_2}^{k_2}\ldots\tilde{Z_m}^{k_m}$. Обратное преобразование Лапласа от произведения статистической суммы будет тождественно операции свёртки над статистическими весами $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \ldots, \Delta\Gamma_k$. Эта формула соответствует характеру конечной абелевой группы. Антиподом сепарабельности является связанность (запутанность) из Леммы об ортогональности и взаимной простоте 5.3 следует вывод, что для обеспечения уникальности подсчета каждого микросостояния необходимо избавиться от общих делителей в выражении 5.7. Для этого результат необходимо поделить на функцию Эйлера $\phi(a)$. Подобный прием был использован выше в формуле для подсчета статистической суммы смеси газов путём включения множителей вида $N_a!N_b!N_c!\ldots,$ в знаменателе формулы 4.7.

В результате произведение статистических сумм образует мультипликативную абелеву группу, изоморфную $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ группе приведённых классов вычетов по модулю $(mod\, m)$, при этом порядок $m = \phi(a)$ - значению функции Эйлера 4.2. См. подробнее в приложении 4.

Может ли рассмотренная теорема быть сформулирована сугубо в терминах линейных операторов с ограниченными дискретными спектральными мерами финитных квадратично-интегрируемых функций? По мнению автора ответ отрицательный: постулаты в математике покоятся на принципах физики. Для иллюстрации достаточно обратиться к Началам Евклида [Эвк48]. Почему принято, как очевидное и недоказуемое утверждение, что при повороте, параллельном переносе сохраняется длина? - потому, что это рассмотренные выше инварианты квантовой механики, вытекающие из трансляционной симметрии, поворотной симметрии, сохраняющие решение уравнение Шрёдингера. В основе геометрии и математики в целом лежит наблюдение и эмпирический опыт.

[Эвк48]: Эвклид (1948), Начала Евклида Книга II Перевод Д.Д.Мордухай-Болтовского

Математические постулаты покоятся на принципах статистической физики.

Для любознательных читателей

Приведённое доказательство изложено с ориентацией на знания старших классов школы и первых курсов физики-математических факультетов вузов. Для более глубокого знакомства с теорией простых чисел читатели могут обратиться к литературе:

[МП22], [АР87], [Пра], [Сиз07].

[МП22]: Манин и др. (2022), Введение в современную теорию чисел

[АР87]: Аэрленд и др. (1987), Классическое введение в современную теорию чисел

[Пра]: Прахар (), Распределение простых чисел

[Сиз07]: Сизый (2007), Лекции по теории чисел

В то же время кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ не изоморфно группе характеристических функций $\tilde{Z}$. (Для этого любое целое число должно быть обратимо относительно операции умножения. Но это возможно только в случае поля, как, например, для ранее обсуждавшейся группы $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n.

Последовательность простых чисел (обратных величин) порождает $\left\{\tilde{Z}_p\right\}$, что соответствует полной ортонормированной системе волновых функций, являющихся решениями уравнения Шрёдингера. Возможны многократные повторения собственных значений, вплоть до сколь угодно больших величин.

Следствие 7.6 (Циклическая группа простого порядка и $\phi(x)$ Эйлера) Приведённый выше результат для случая циклической группы простого порядка может быть выражен через функцию Эйлера по формуле $\phi(\Gamma) + 1$. Для больших значений коэффициент $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma} \to 1$

Очевидно, $\phi(n) < n$ в силу определения и свойства функции Эйлера 6.1, для случая $n = p^m, m > 1$ (p - простое и $\frac{1}{p} > \epsilon$), $\phi(n) = n(1 - \epsilon) \Longrightarrow$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = 1. \tag{7.6}$$

В работе [Чан74] приведена более точная оценка $\phi(n)$ с помощью сумматорной функции.

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

Для получения дополнительной информации см. Приложение 10.

Поправочный коэффициент $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma}$

Ранее в формуле 2.15, был сделан вывод, что результат

интегрирования по фазовому пространству делится на число перестановок в знаменателе для обеспечения уникального учёта каждого микросостояния. Исходя из тех же соображений, необходимо ввести поправочный коэффициент $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma}$, учитывающий порядок группы: число смежных классов вполне приводимых представлений плюс единица. Согласно 4.9 и теореме о структуре конечных абелевых групп, предполагая $n = \Gamma$:

$$\frac{\phi(n)+1}{n} = \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{n} \geq \prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{n} \to \frac{1}{\zeta(1)} \tag{7.7}$$

Где p — простое число, $p \leq n = \Gamma$. Очевидно, что число простых делителей n меньше числа простых чисел, не превосходящих n, причём каждый множитель под знаком произведения меньше 1. ($\pi(x)$ — функция подсчёта простых чисел, количество простых чисел, меньших или равных n, $\pi(n) \sim \frac{n}{ln\, n}$.)

Более подробно вопросы связи фазового пространства с энтропией и простыми числами обсуждается в главе 3.

Из теорем Фредгольма I, II для указанной статистической матрицы существует изоморфная система алгебраических уравнений, где собственными значениями являются простые числа, повторяющиеся на диагонали с учётом кратности вырождения 6.1.

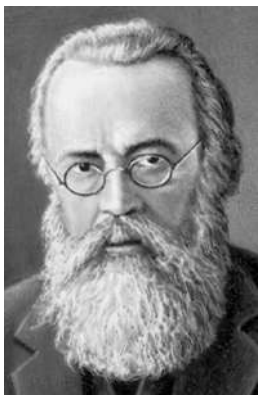


Рис. 7.10: Владимир Андреевич Стеклов (1863-1926) — русский математик и механик. Действительный член Петербургской академии наук. Вице-президент АН СССР (1919—1926). Организатор и первый директор Физико-математического института РАН, названного после смерти В. А. Стеклова его именем.

Поскольку плотность вероятности пропорциональна квадрату амплитуды волновой функции, $\forall$ волновая функция $\{\Psi_n\} \in \mathscr{L}_2$ может быть выражена как функция плотности вероятности $|\Psi|^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n, \quad \rho = \frac{1}{p}$ и фазы S как мнимого числа, т.е. экспоненты в ζ-функции, содержащей нетривиальные нули $s = \frac{1}{2} + it$. Квадрат модуля характеристического числа $\left|\mu_i\right|^2 = \frac{1}{p}$ для интегрального уравнения Фредгольма (например, пропагатора свободной частицы 6.11) является квадратом модуля собственного значения $|\lambda_i|^2 = p$ оператора $\hat{E}$ 5.3, где p — простое число. Это матричное представление может быть обобщено путём рассмотрения алгебры операторов над гильбертовым пространством системы. Объём фазового пространства находится из определителя этой матрицы

$det\,\hat{H}$ — характеристического многочлена:

$$det\,\hat{H} = (\lambda - p_i)^{g_i}$$
$$\Delta\Gamma = \prod_{i=1}^{k} p_i^{g_i} \tag{7.8}$$

Замечание 7.3 В рассматриваемой модели каждое E_i повторяется в соответствии с кратностью g_i.

С формальной точки зрения, ζ-функция определена как произведение вида 7.7 для случая всех $\tilde{Z}$, возведённых во все возможные степени. ζ-функция была идентифицирована как универсальная шкала и нормализатор. Это можно сравнить с бесконечно размеченным полем, где микросостояния потенциально могут быть размещены.

Таким образом, простое число связывается с вероятностью, с конкретным микроканоническим состоянием и с энергией подсистемы в изучаемой системе. Аддитивные свойства энергии, энтропии и числа частиц в подсистемах, образующих изучаемую систему, являются, по сути, проявлениями явлений симметрии.

Предположение о существовании нетривиальных нулей вне $\frac{1}{2} + it$ на $\mathbb{C}$

Поскольку рассматриваемая система ортонормированных функций в гильбертовом пространстве для $\forall$ решений уравнения Шрёдингера является полной, приведённые выше рассуждения подразумевают, что другие решения вне этой ортонормированной системы противоречат равенству Парсеваля–Стеклова. Это означает, что нетривиальные нули ζ-функции, расположенные вне прямой $s = \frac{1}{2} + it$ на $\mathbb{C}$, не могут моделировать материальные объекты во вселенной. Предположение о существовании нетривиальных нулей вне этой прямой приводит к апории.

Следовательно, гипотеза Римана доказана. □

Замечание 7.4 Для энергетических уровней должно применяться логнормальное распределение 5.3 и 5.4.

Математические теоремы должны проходить эмпирическую проверку. Логически непротиворечивое утверждение, которое не соответствует ни одному объекту в природе, ложно (апория). Такое предположение не может быть проверено или эмпирически испытано. Апория (от греч. $\alpha\pi\text{ø}\rho\upsilon\alpha$ — безвыходное положение, тупиковая ситуация) — это фиктивный, логически корректный сценарий (утверждение, предположение или вывод), который не может существовать в реальности.

Согласно центральной предельной теореме для группы G, если флуктуации малы, то $ln\,\tilde{Z}$ будет распределён нормально. Это фундаментальный принцип, лежащий в основе доказательства гипотезы ABC в следующей главе.

8 Гипотеза Римана для школьников

Для понимания фундаментальной предпосылки доказательства гипотезы Римана, учащимся предлагается обратиться к формуле квантового излучения Планка, открытой Максом Планком в 1900 году. В настоящем исследовании выдвигается гипотеза, что излучение изучается не в вакууме, а в материальной среде. Условие того, что газ является идеальным, зависит от слабого взаимодействия с веществом. Существование минимального количества вещества является необходимым условием для существования рассматриваемого явления. Установление теплового равновесия в поле излучения имеет первостепенное значение.

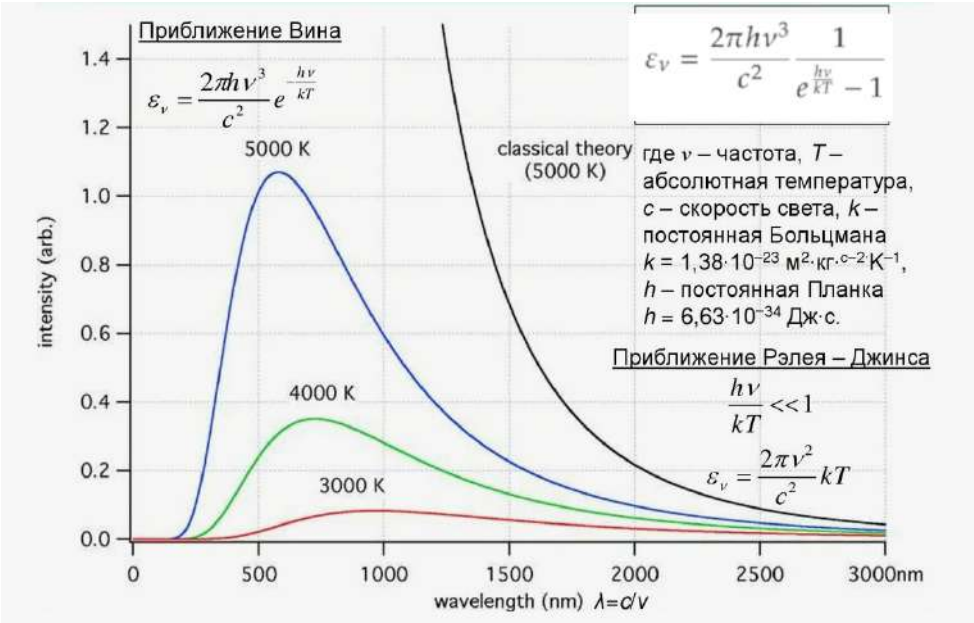


Рис. 8.11: Формула Планка. Распределения энергии по частотам. Приближение Вина (область коротких волн) приближение Рэлея - Джинса (область длинных волн).

Общее число изучаемых фотонов, обозначаемое как N, — это переменная, определяемая из условий теплового равновесия. Очевидно, что минимизация свободной энергии газа, обозначаемой как F, при заданных температуре T и объеме V приводит к следующему необходимому условию:

$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu = 0$, что означает, что химический потенциал фотонного газа равен нулю.

Формула Планка имеет вид для плотности по энергии и излучательной способности (соотношение $\varepsilon = \frac{c}{4}u$):

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$
$$\omega = 2\pi\nu \tag{8.1}$$
$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Она позволяет вычислить вероятность обнаружения энергии соответствующей гармоники (обертона) в спектральном разложении по всему спектру. Ряд, основанный на $f(n)$, сходится абсолютно (в нашем случае $\omega = \Delta\omega n$, где $\Delta\omega = 1$ за счёт выбора соответствующим единиц длин волн и частоты). В области высоких частот формулу Планка можно приблизить формулой Вина:

$$dE_\omega = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\,\omega^3 e^{-\hbar\omega/k_B T}\,d\omega. \tag{8.2}$$

Рис. 8.12: Макс Карл Эрнст Людвиг Планк — немецкий физик-теоретик, основоположник квантовой физики. Сформулировал второе начало термодинамики в виде принципа возрастания энтропии и использовал его для решения различных задач физической химии

Для последнего случая спектральная плотность энергии черного тела представляет собой абсолютно сходящийся ряд от вполне мультипликативной функции, рассмотренной ранее в главе, посвященной ζ - функции 1.3. (Доказательство этой леммы аналогично доказательству эквивалентности обоих определений ζ - функции.)

Спектр черного излучения содержит весь диапазон длин волн, за пределами которого излучения нет, а следовательно нет решения уравнения Шрёдингера для термодинамической системы (квазистационарный случай). Это наглядное следствие полноты системы ортонормированных функций.

Формула квантового излучения Планка представляет собой представление ζ-функции в полной системе ортонормированных функций с весом. Можно сопоставить $p_i \mapsto e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} = e^{\beta E_i}$ $\frac{1}{p_i} \mapsto e^{-\beta E_i}$ и суммируя геометрическую прогрессию установить отношения биекции (взаимно однозначного соответствия), а именно: числу p_i

будет сопоставлен множитель в статистической сумме вида $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$ (или подобное выражение). $\Longrightarrow$ вывод о подобии выражения спектральной плотности энергии излучения абсолютно черного тела и ζ -функции с точностью до весового множителя 1.1.

Следствие 8.1 Переход к ортонормированному базису в энергетическом представлении, с учетом весовых коэффициентов в виде простых чисел, обеспечит полную идентичность формул квантового излучения Планка и определения ζ-функции.

Как и в случае дифракционной решётки, здесь важно избежать избежать спектрального перекрытия порядков дифракционной решётки 6.9 за счет выбора взаимно простых чисел согласно лемме об ортогональности и взаимной простоте 5.3. Формула ряда Дирихле 1.1 исключает повторения натуральных чисел в ряде. Аналогично функция Эйлера $\phi(n)$ служит для предотвращения дублирования частот в спектре излучения абсолютно черного тела. Для охвата всего спектра излучения чёрного излучения ($\omega = \Delta\omega n$, где обеспечено $\Delta\omega = 1$, за счёт выбора соответствующим единиц длин волн и частоты, $n \in \mathbb{N}$) потребуются весь ряд простых чисел $p \in \mathbb{P}$ - их число счётно бесконечно.

$\phi(\Delta\omega n) = \phi(n) \quad \Delta\omega = 1$ в соответствующем масштабе частот

В результате реализуется принцип однократности учета каждого микросостояния 2.2.

Замечание 8.1 $\phi(n)$ — количество целых чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n, — согласуется с последовательностью 1.3 и исключает двойной подсчет частот (однократный учет каждого микросостояния).

В данном случае амплитуда и фаза волны соответствуют значениям нетривиального нуля ζ-функции, расположенного на мнимой оси $s = \frac{1}{2} + it$. Это представляет полный спектр излучения абсолютно черного тела, а следовательно, и частицы. $\Longrightarrow$ ζ-функция выражает а) принципы равной вероятности микроканонических состояний, который вытекает из симметрии, заложенной в каноническом распределении Гиббса б) полноты системы ортонормированных волновых функций в виде ранее рассмотренного естественного базиса.

Следствие 8.2 Формула квантового излучения Планка точно описывает весь спектр излучения абсолютно чёрного тела. Это излучение является фундаментальным; не существует волн де Бройля, равно как и материальных частиц, вне рассмотренного теплового равновесия. Поскольку химический потенциал фотонного газа равен нулю и обеспечено идеальное тепловое равновесие между веществом и излучением, всё исследуемое вещество и испускаемый им свет охватываются рассмотренным спектром. Не существует никакой иной материи, чье излучение существовало бы за пределами спектра излучения чёрного тела. Таким образом, верификация гипотезы Римана может быть произведена путем глубокого осмысления физического явления, схематически представленного на графике 8.11, поиска параллелей с явлением рассеяния света на дифракционной решётке, недопущением наложением порядка (перекрытием спектра) и простыми числами.

Нули на мнимой оси $s = \frac{1}{2}$ на $\mathbb{C}$ соответствуют узлам волновой функции. Почему именно узлы? Дело в том, что при выводе формулы Планка неявно используются условия излучения Зоммерфельда [ЖВ22]. Эти условия выводятся из решения $u(x,t) = u(x)e^{iwt}$ уравнения Гельмгольца как задачи на собственные значения для оператора Лапласа. Этот вывод можно сравнить с выводом Римана, который утверждал, что количество нетривиальных нулей ζ-функции бесконечно 2.17.

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

Интеграл Ферми-Дирака Γ -функция и ζ-функцией Римана

Для подготовленного читателя интересно будет рассмотреть следующую связь между Рассматривается интеграл:

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{z^{x-1}\,dz}{e^z + 1}, \quad x > 0.$$

Этот интеграл встречается в статистической физике (распределение Ферми-Дирака) и теории чисел.

Разложение в ряд Воспользуемся разложением в гео-

метрический ряд:

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nz}.$$

Умножая на z^{x-1}, получаем:

$$\frac{z^{x-1}}{e^z+1} = z^{x-1}e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nz} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{x-1}e^{-(n+1)z}.$$

Почленное интегрирование Интегрируем почленно, используя определение гамма-функции:

$$\int_0^{\infty} z^{x-1}e^{-az}\,dz = \frac{\Gamma(x)}{a^x}, \quad a>0.$$

При $a = n+1$:

$$\int_0^{\infty} z^{x-1}e^{-(n+1)z}\,dz = \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

Тогда:

$$I(x) = \Gamma(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}.$$

Связь с η- и ζ-функциями Сделаем замену индекса $m = n+1$:

$$I(x) = \Gamma(x)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^x}.$$

Это ряд Дирихле для эта-функции:

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Известное тождество:

$$\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x),$$

где $\zeta(x)$ — функция Римана. Доказательство:

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}\\ &= \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x).\end{aligned}$$

Окончательная формула Таким образом:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{z^{x-1}dz}{e^z+1} = \Gamma(x)\,\eta(x) = (1-2^{1-x})\,\Gamma(x)\,\zeta(x)}.$$

Частный случай $x = 1$ При $x = 1$ множитель $(1-2^{1-1}) = 0$, а $\zeta(1)$ расходится, что даёт неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Вычислим интеграл непосредственно:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^z+1}.$$

Подстановка $t = e^z$, $dz = dt/t$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt.$$

$$= [\ln t - \ln(t+1)]_1^\infty = \lim_{T\to\infty} \ln\frac{T}{T+1} - (0-\ln 2) = 0+\ln 2 = \ln 2.$$

Таким образом:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dz}{e^z+1} = \ln 2}.$$

Краткий вывод

Представленная формула связывает интеграл типа Ферми-Дирака с Γ-функцией и ζ-функцией Римана через η-функцию Дирихле. Эта связь полезна как в теоретической физике, так и в аналитической теории чисел.

Физические законы должны обладать математической красотой

По словам физика Поля Дирака "Физические законы должны обладать математической красотой" (Psysical laws shoul have mathematical beauty). Эта фраза была написана им на доске во время лекции в Московском университете в 1956 году, когда его спросили о понимании философии физики.

Рис. 8.13: Поль Адриен Морис Дирак (1902-1984) — английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933г.

Методологическая установка Дирака также нашла отражение в его статье, посвящённой столетнему юбилею со дня рождения Эйнштейна, где он подчёркивал, что в первую очередь нужно руководствоваться соображениями

математической красоты, не придавая особого значения расхождениям с опытом. Вера в математическую красоту, как критерий истинности физических теорий была одним из ключевых принципов в научной методологии Поля Дирака.

Однако по мнению автора, ощущение красоты - антропологический критерий истинности выработался в процессе 4.1 миллиардов лет эволюции жизни на Земле. Известны примеры красивых движений животных и птиц, выступлений спортсменов, соответствующих принципам наименьшего действия. Красота проявляется в Золотом сечении в природе. Музыка имеет тесную связь с математикой. Интуитивное ощущение красоты помогает человеку (и надо полагать животным) быстро выработать правильное решение, основанное на адаптации к природным законам (отфильтровать нежизнеспособные траектории развития).

Вместе с тем верификация доказательства не может базироваться лишь на эстетических критериях. Есть многочисленные примеры красивых заведомо ложных псевдонаучных экспертиз, научных заблуждений и предубеждений, которых пойдет речь в следующих главах.

Проблема Гольдбаха

Проблема Гольдбаха-Эйлера | 2

1 Введение

В 1742 году математик Кристиан Гольдбах написал письмо Леонарду Эйлеру, в котором высказал предположение о том, что любое нечётное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел. Эйлер заинтересовался этой проблемой и выдвинул более сильную гипотезу: любое чётное число, большее двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Первое утверждение называется тернарной проблемой Гольдбаха, а второе — бинарной проблемой Гольдбаха или проблемой Эйлера. В чём эта проблема заключается? - любое чётное число, более двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Теорема 1.1 (Бинарная проблема Гольдбаха-Эйлера) Любое чётное число, начиная с четырёх, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Это утверждение оставалось открытым в математике вплоть до 2025 года - до первой публикации настоящей работы.

Существует более слабая версия гипотезы — тернарная проблема Гольдбаха, которая утверждает, что любое нечётное число, начиная с семи, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел. В 2013 году перуанский математик Харальд Гельфготт доказал эту версию.

Из справедливости бинарной гипотезы Гольдбаха следует справедливость тернарной: если любое чётное число, начиная с четырёх, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел, то, добавляя три к каждому чётному числу, можно получить все нечётные числа, начиная с семи.

1 Введение 79
2 Подготовка к доказательству 81
3 Факторизация статсуммы и функция Эйлера 85
4 Конечномерная матрица. Естественный базис 86
5 Дифракционный подход к анализу периодических структур 87
6 Связь с групповой структурой 92
7 Китайская теорема об остатках 95
7.1 КТО в модели естественного базиса . 98
7.2 Доказательство КТО 100
8 Решение находится в термодинамике . 106
8.1 Размерность пространства 109
8.2 Оператор проектор P 110
8.3 След оператора . . 111
8.4 Характер группы . 112
8.5 Постулат Бертрана 116
8.6 Аддитивность Tr. Характеры. Разложение представлений 117
9 Доказательство гипотезы Гольдбаха-Эйлера 119

Для любознательных читателей

Приведённое доказательство изложено с ориентацией на знания старших классов школы и первых курсов физики-математических факультетов вузов. Для более глубокого знакомства с теорией простых чисел читатели могут обратиться к литературе:

[Бор+85], [Кар83].

[Бор+85]: Боревич ЗИ и др. (1985), Теория чисел

[Кар83]: Карацуба (1983), Основы аналитической теории чисел

Рис. 1.1: Кристиан Гольдбах - прусский и российский математик, действительный член, первый конференц-секретарь и советник Академии наук и искусств, тайный советник.

Эквивалентная формулировка бинарной гипотезы Гольдбаха: любое целое число больше единицы может быть представлено как среднее арифметическое двух (возможно, одинаковых) простых чисел.

В 1937 году математик СССР Иван Матвеевич Виноградов и Теодор Эстерманн доказали, что почти все чётные числа могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел [Вин18]

Рис. 1.2: Иван Матвеевич Виноградов 1891-1983. — советский математик, академик АН СССР (1929) по Отделению физико-математических наук.Его работы посвящены аналитической теории чисел; основные результаты получены благодаря созданному им методу тригонометрических сумм, ставшему одним из основных подходов к решению задач аналитической теории чисел

Метод тригонометрических сумм Виноградова

Суть метода: выписывается точная формула, выражающая число решений изучаемого уравнения или число дробных долей изучаемой функции, попадающих в заданный интервал, или число целых точек в заданной области, в виде интеграла от тригонометрической суммы; точная формула представляется суммой двух слагаемых – главного и дополнительного. Главное слагаемое составляет главный член асимптотической формулы, дополнительное – остаточный. В таких аддитивных задачах, как проблема Варинга или проблема Гольдбаха, главное слагаемое исследуется методом, близким к круговому методу Харди–Литтлвуда–Рамануджанав

[Вин18]: Виноградов (2018), Основы теории чисел

в орме тригонометрических сумм Виноградова.

В 1966 году Чэнь Цзинжунь доказал, что любое достаточно большое чётное число может быть представлено либо в виде суммы двух простых чисел, либо в виде суммы простого числа и полупростого (произведения двух простых чисел). Например, $100 = 23 + 7 \cdot 11$.

На апрель 2012 года бинарная гипотеза Гольдбаха была проверена [Woo00] для всех чётных чисел, не превышающих $4 \cdot 10^{18}$.

В 2013 году тернарная гипотеза Гольдбаха была окончательно доказана Харальдом Гельфготтом. Из справедливости тернарной гипотезы Гольдбаха, доказанной в 2013 году, следует, что любое чётное число может быть представлено в виде суммы не более чем четырёх простых чисел.

Замечание 1.1 В сочетании с гипотезой Римана проблема Гольдбаха включена в список проблем Гильберта под номером восемь.

Сложность поиска доказательства косвенно указывает на выбор ненадлежащих методов исследований, упущение возможностей междисциплинарных подходов.

Рис. 1.3: Чэнь Цзинжунь 陈景润 (1933–1996) — китайский математик, работавший в области теории чисел. В 1980 году был избран академиком Китайской академии наук. Наиболее известен доказательством теоремы Чэня (1966) — крупного результата, связанного с проблемой Гольдбаха. В 1982 году получил Национальную премию по естественным наукам первой степени.

[Woo00]: Woon (2000), «On partitions of Goldbach's conjecture»

2 Подготовка к доказательству

Замечание 2.1 (Важные обозначения) В данной секции используются p, p_n, q, q_n обозначающие простые числа, $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, — волновой вектор

Необходимо сделать обобщение материала предыдущий главы с позиции алгебры и теории групп.

Может показаться странным, что даже не зная функции распределения простых чисел $\pi(x)$, легко сделать несложные выводы, которые оказываются достаточными для доказательства теорем в теории чисел. Именно эксперимент, термодинамика позволяют сделать фундаментальные обобщения в математике. Почему? - потому что мир материален, и физика микромира и макромира одинакова, действуют принцип соответствия текста и принцип неопределенности Гейзенберга. Таким образом, простые

числа моделируют систему, состоящую из подсистем, которые не взаимодействуют, но связаны общим ресурсом - фазовым пространством. К сожалению, ряд учёных отождествляют понятие взаимодействие и связь, что является ошибочным: обособленность есть отсутствие связи, но не просто отсутствие, а разъединённость - [Сел03] - сепарабельность.

[Сел03]: Селиванов (2003), Поиск ошибочного и правильного

Определение 2.1 (Сепарабельность) Сепарабельность (от лат. separabilis — "отделимый") — многозначный научный термин, используемый в разных дисциплинах. Он обозначает возможность разделения объекта на отдельные составные части с сохранением их свойств.

Примеры:

- R^n и C^n — сепарабельны (плотное подмножество — векторы с рациональными координатами);
- пространство непрерывных функций $C[0,1]$ — сепарабельно (плотно множество многочленов с рациональными коэффициентами);
- гильбертово пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда имеет счётный ортонормированный базис.

Ещё одни пример из школьной физики: смесь идеальных газов. В последнем случае объём сосуда также является разделяемым общим ресурсом.

Изложим выводы Главы 1 с позиции алгебры теории групп.

Простое число p в естественном базисе служит образующим элементом конечной циклической подгруппы, Первый тензорный множитель $diag\left\{e, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\right\}$ — это в точности циклическая группа порядка p, порожденная элементом g. Эта группа изоморфна Z/pZ.

Второй тензорный множитель $diag\left\{\underline{I}, \frac{1}{p^p}\underline{I}, \frac{1}{p^{2p}}\underline{I}, \ldots\right\}$ — это группа, порожденная элементом $\left(\frac{1}{p}\right)^p$ умножить на $\underline{I}$ единичную матрицу размером $p \times p$. Поскольку p — простое число и $\left(\frac{1}{p}\right)^p \neq 1 \Longrightarrow$ все его степени различны, эта группа является бесконечной циклической группой, изоморфной $\mathbb{Z}$.

Полная группа, как прямое произведение: статистическая сумма $\tilde{Z}_m(\beta)$, определенная в Главе, посвящённой ζ-функции Римана 4.4, представлена как тензорное произведение (в данном контексте эквивалентное прямому произведению для абелевых групп) этих двух подгрупп. Следовательно, полная группа, порожденная одним образующим элементом g_m, изоморфна прямой сумме (для простоты β опускаем):

$$\tilde{Z}_p \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

Определение 2.2 (Группа кручения) Элемент g группы G называется элементом кручения, если он имеет конечный порядок, то есть существует натуральное n, такое что $g^n = e$, где e обозначат нейтральный элемент группы. Группа называется периодической (или группой кручения), если все её элементы являются элементами кручения, и группой без кручения, если единственный элемент кручения — нейтральный.

При этом периодическая часть (подгруппа кручения) имеет порядок p, её элементы $(a, 0)$. Свободная часть (бескоординатная часть) - $\mathbb{Z}$ (кольцо целых чисел)является бесконечной циклической группой — это свободная часть нашей группы. Её элементы $(0, b)$ имеют бесконечный порядок. Ранг абелевой группы определяется как ранг её свободной части, т.е. количество образующих в бескоординатной части. В данном случае свободная часть $\tilde{Z}_m$ имеет ранг 1.

Покомпонентное сложение

Обозначения $(a, 0)$ и $(0, b)$. Поскольку группа изоморфна прямой сумме $\tilde{Z}_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, каждый ее элемент можно однозначно представить в виде упорядоченной пары: (a, b) где: первая компонента (a) — это элемент конечной циклической группы $\mathbb{Z}/p$, а вторая компонента (b)— это элемент $\mathbb{Z}$. Групповая операция (сложение) выполняется покомпонентно: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 \mod(p), b_1 + b_2)$. Роль в структуре группы: Множество всех таких элементов $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ образует подгруппу кручения (периодическую часть) исследуемой группы, которая изоморфна $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, поря-

док любого такого элемента делит p. Множество всех элементов $\{(0, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ образует свободную часть исследуемой группы, которая изоморфна $\mathbb{Z}$

Теперь вернемся к естественному базису и его интерпретации на принципах дискретной симметрии (порядки в дифракционной решётке), к полной системе, порожденной всеми простыми числами $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Каждому простому числу p_i соответствует своя группа:

$$\tilde{Z}_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

Полная система, обозначаемая здесь как $\check{D}$, является произведением (или прямой суммой) всех этих групп по всем простым числам. Эта система сочетает в себе две структуры:

- Структура "энергетической решетки", соответствующей возможности независимо возбуждать в любую целую степень кратные энергетические уровни;
- Структура "конечной симметрии": Для каждого простого p имеется конечная циклическая группа $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, описывающая дискретную симметрию (дифракционные порядки) внутри каждой моды.

В терминах общепринятого изоморфизма для мультипликативной группы положительных рациональных чисел может быть описана следующим выражением:

$$\mathbb{Q}^+ \cong \bigoplus_{p \text{ prime}} \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

С учетом фундаментальная теорема о структуре мультипликативной группы положительных рациональных чисел.

Ранг группы $\mathbb{D}$: Свободная часть этой группы — это бесконечная прямая сумма $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$. Её ранг — это количество образующих, которое равно счетной бесконечности $\mathbb{N}_0$. Каждое простое число дает одну "бесконечную" степень свободы в экспоненте (показателе степени).

Каждое простое число p_i является образующим элементом для одной из циклических компонент в свободной части группы. Именно поэтому множество всех простых

чисел образует базис свободной части группы D. Мощность этого базиса и есть ранг.

Corollary 2.1 (Группы, порожденными p числами) Простые числа являются фундаментальными "атомами" или "образующими" в этой структуре. Но ранг — это не само простое число p, а количество таких независимых простых чисел в порождающем множестве. Для группы, порожденной одним p, ранг равен 1. Для группы, порожденной всеми простыми числами, ранг равен бесконечности.

3 Факторизация статсуммы и функция Эйлера

Выражение: $\tilde{Z}_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ по числу смежных классов, равно функции Эйлера от дифференциала статистического веса $\Delta\phi(\Gamma)$ также определённого в Главе 1 3.1.

Факторизация $\tilde{Z}(\beta)$ возможна для независимых подсистем. Пусть в исследуемой системе насчитывается k независимых подсистем $\Longrightarrow$ k подгрупп статистически независимы, тогда полная статистическая сумма равна произведению статистических сумм подсистем.

Proposition 3.1 ($\phi(n) =$ числу образующих элементов группы) Функция Эйлера $\phi(n)$ для числа n дает количество чисел, меньших n и взаимно простых с ним, т.е. посчитывает число приведённых вычетов $mod\,(n)$. В теории групп для циклической группы порядка n функция Эйлера $\phi(n)$ равно числу образующих элементов этой группы.

Рис. 3.4: Леонард Эйлер (1707-1783) (нем. Leonhard Euler) — швейцарский, прусский и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук).

Если дифференциал статистического веса $\Delta\Gamma$ (число доступных состояний) отождествить с неким натуральным числом, то $\Delta\phi(\Gamma)$ будет давать количество неприводимых представлений группы симметрии или (независимых) конфигураций $\tilde{Z}(\beta)$.

Число k (ранг) — количество независимых образующих, также может быть связано с $\Delta\phi(\Gamma)$, например если само $\Delta\Gamma$ является произведением простых чисел. (Об этой

связи, зависящей от симметрии исследуемой системы рассказывается ниже).

4 Конечномерная матрица. Естественный базис

С учетом ранее приведенной формулы нахождения среднего значения наблюдаемой через статистическую матрицу 2.20, создаваемой в результате тензорного произведения конечных матриц размером $p_i \times p_i$ для k независимых подсистем $p_1, p_2 ... p_k$ в естественном базисе. Без потери общности $\forall$ линейно независимых квазистационарных функций ортонормированная система $\{\psi_k\}$ может быть получена через порождающий элемент группы по формуле, содержащей амплитуду, фазовый множитель и осциллирующую часть. Структура уравнения 5.12 имеет прямую физическую аналогию с дифракцией Фраунгофера.

Фазовый множитель $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$, где $\nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1$ повторяет компоненту в формуле дифракции 6.3, которая определяет картину интенсивности на экране. Аналогично, $\sum_{n=0}^{N-1}\left(\int_{na}^{na+d} E_0\, e^{-ikx^2} dx\right)$ соответствует части 6.3 другой множитель в уравнении, описывающей плоскую волну, с определенной частотой (уровнем энергии). Можно убедиться, что собственные функции, соответствующие разным частотам (длинам волн), образуют полный базис для системы волновых функций. Умножение числителя и знаменателя в формуле расчета наблюдаемой на одно и то же число p_i не меняет значения среднего.

Каждое состояние $\psi_n^{(\nu)}$ соответствует определенному порядку дифракции n. Разные p_ν задают разные дифракционные решетки (разные системы симметрии)

Ортогональность обеспечивается разными импульсами (как в дифракции разные порядки дают волны, распространяющиеся под разными углами).

Замечание 4.1 (Достаточно для доказательства конечномерных матриц) В естественном базисе производится

усреднение наблюдаемой по конечномерным диагональным матрицам с размером сегмента на главной диагонали без условия кратных корней: p_i, а с условием кратных корней: $g_i p_i$, где g_i - кратность. Важно, что умножение числителя и знаменателя на одно и то же число для нахождения наблюдаемой не меняет значения — следствие нормировки в фактор-пространстве. См. 7.4.

В такой модели выражение $\Delta\Gamma = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$ (где p_i определяется симметрией системы, размерностью неприводимого унитарного представления) становится физически осмысленным.

Статистический вес и число неэквивалентных состояний

Каждая подсистема описывается конечной циклической группой порядка p_i. Состояния параметризуются вычетами по модулю p_i (аналогия с номерами щелей в решетке). Здесь прослеживается связь конечной системы и модулярной арифметики.

Полная система описывается произведением групп:

$$\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \otimes \dots \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z} \tag{4.1}$$

В такой дискретной системе общее число формальных состояний равно $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$. Однако функция Эйлера $\phi(n)$ подсчитывает количество взаимно простых с n элементов. В физических терминах: это состояния, которые не могут быть получены друг из друга простым масштабированием (не сводятся друг к другу преобразованием подобия).

Именно в естественном базисе функций раскрывается глубокую физическую аналогию с дифракцией Фраунгофера, которая наглядно раскрывается в терминах преобразования Фурье, полноты базиса и алгебраической структуры.

5 Дифракционный подход к анализу периодических структур

Рассмотрим дифракцию на одномерной решетке с периодом d. Поле в дальней зоне (при фраунгоферовом приближении) пропорционально:

$$E(\theta) \propto \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik_\perp d v \sin\theta} \tag{5.1}$$

где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, — волновой вектор, а $k_\perp$ — его проекция, ортогональная оси z направленной ортогонально экрану и проходящей через его центр.То есть эта проекция параллельна плоскости экрана. Для случая цилиндрической волны $k_\perp = k_x = k\theta$ отсчитывает координату решётки, расположенной параллельно плоскости экрана (ось координат x_p - координату точки на экране) 6.7.

— волновой вектор, ортогональный оси распространению волн по направлению к экрану (проекция волнового вектора на ось вдоль экрана).

Сопоставление с естественным базисом 5.12:

- $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$ - Фазовый множитель соответствует $\exp(-ik_\perp d\nu \sin\theta) \quad \nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1$
- Параметр $2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ играет роль компоненты волнового вектора, ортогональной экрану

Преобразование Фурье и полнота базиса

Представим функции $\psi_n^{(\nu)}$ в виде:

$$\psi_{p_n}^{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{p_n}} e^{ik_\perp \nu} e^{-i\omega_p t} \quad i^2 = -1 \tag{5.2}$$

где $k_\perp = 2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ — дискретный волновой вектор, $\nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1$, $w_p = \frac{1}{\hbar}\Delta E p_n = \frac{1}{\hbar} p_n$, поскольку $\Delta E = 1$ за счёт выбора надлежащей шкалы энергетических единиц.

Преобразование Фурье и полнота базиса

Замечание 5.1 Напоминаем, что в естественном базисе волновые функции пронумерованы простыми числами 7.2.

Ключевые свойства:

1. Ортогональность и полнота:

$$\sum_{n=0}^{p_\nu - 1} \psi_n^{(\nu)} \psi_n^{(\mu)*} = \delta_{\nu\mu}$$

Это прямое следствие ортогональности экспонент Фурье — аналогично тому, как дифракционные

порядки ортогональны в пространстве углов.
2. Дискретные частоты Фурье: Значения проекции волнового вектора на направление ортогональное экрану k_ν образуют дискретный набор, соответствующий разрешенным направлениям дифракции.
3. Линза как преобразователь Фурье: Линза выполняет преобразование Фурье поля на входной апертуре. Это означает, что $\psi_n^{(\nu)}$ можно интерпретировать как собственные моды оптического преобразователя Фурье.

Физическая интерпретация

В приближении Фраунгофера интенсивность дифракционной решетки пропорциональна:

$$I(\theta) \propto \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik_\perp d\nu \sin\theta} \right|^2 \tag{5.3}$$

Если мы имеем каскад решеток с числами щелей $N_1, N_2, \ldots, N_k$, взаимно простыми попарно, то полная дифракционная картина соответствует произведению:

$$I_{\text{total}}(\theta) \propto \prod_{j=1}^{k} \left| \sum_{n=0}^{N_j-1} e^{-ik_\perp d_j n \sin\theta} \right|^2 \tag{5.4}$$

Замечание 5.2 (Для школьников - Китайская теорема об остатках) Забегая вперед, заметим, что Китайская теорема об остатках (КТО) гарантирует, что различные углы θ дают различные наборы остатков $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, обеспечивая идеальное спектральное разрешение.

Зона Бриллюэна в квантовой механике периодических систем

Помимо дифракционной решётки, в квантовой механике существуют и другие периодические системы (в частности, кристаллические решётки), в которых ключевую роль играет зона Бриллюэна — область в пространстве квазиимпульса k, отражающая симметрию периодического потенциала.

Периодичность и теорема Блоха

В системе с периодом a волновые функции электронов подчиняются теореме Блоха:

$$\psi_k(x) = e^{ikx} u_k(x),$$

где:

- $\psi_k(x)$ — полная волновая функция;
- e^{ikx} — фазовый множитель;
- $u_k(x)$ — периодическая функция с тем же периодом a, что и решётка: $u_k(x + a) = u_k(x)$.

Квазиимпульс и зона Бриллюэна

Квазиимпульс k характеризует состояние электрона в периодическом поле. Первая зона Бриллюэна для одномерной решётки с периодом a определяется интервалом:

$$k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right].$$

Это область, в которой энергия электрона $E(k)$ испытывает полный цикл изменений, а на границах зоны возникают разрывы энергии.

Квантование квазиимпульса в конечной системе

Если система состоит из N элементарных ячеек и удовлетворяет периодическим граничным условиям Борна–Кармана:

$$\psi_k(x + Na) = \psi_k(x),$$

то допустимые значения k становятся дискретными. Подставляя теорему Блоха в граничное условие, получаем:

$$e^{ikNa} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi m}{Na}, \quad m = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Число состояний в зоне Бриллюэна

Для цепочки из N ячеек:

- существует ровно N разрешённых значений k;
- каждому $k_m = \frac{2\pi m}{Na}$ соответствует одно квантовое состояние в каждой энергетической зоне;

- общее число состояний в первой зоне Бриллюэна равно N.

Example 5.1 (Пример для $N = 4$) Рассмотрим одномерную цепочку из $N = 4$ потенциальных ям с периодом a.

Разрешённые значения квазиимпульса k

Подставляем $N = 4$ в формулу квантования:

$$k_m = \frac{2\pi m}{4a} = \frac{\pi m}{2a}, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Получаем 4 дискретных значения:

$$\begin{aligned} m = 0: &\quad k_0 = 0, \\ m = 1: &\quad k_1 = \frac{\pi}{2a}, \\ m = 2: &\quad k_2 = \frac{\pi}{a}, \\ m = 3: &\quad k_3 = \frac{3\pi}{2a}. \end{aligned}$$

Расположение в зоне Бриллюэна

Первая зона Бриллюэна: $k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$. Значения k_m попадают в этот интервал:

- $k_0 = 0$ — центр зоны;
- $k_1 = \frac{\pi}{2a}$ — внутренняя точка;
- $k_2 = \frac{\pi}{a}$ — граница зоны;
- $k_3 = \frac{3\pi}{2a}$ эквивалентно $-\frac{\pi}{2a}$ (из-за периодичности).

Энергетический спектр

Для каждого k_m решается уравнение Шрёдингера с периодическим потенциалом, давая энергию $E(k_m)$. В результате:

- в каждой энергетической зоне образуется $N = 4$ уровня;
- если зон несколько (например, из-за расщепления), в каждой будет по 4 состояния.

Следствие 5.1 (Связь макроскопического параметра системы N с микроскопической структурой) Из рассмот-

ренного материала врезки и примера можно сделать следующие выводы:

1. В конечной периодической системе из N ячеек число разрешённых значений k в первой зоне Бриллюэна равно N;
2. Каждому k_m соответствует одно квантовое состояние в каждой энергетической зоне;
3. Это свойство связывает макроскопический размер системы (N) с микроскопической структурой спектра (k-точки);
4. В бесконечной системе k непрерывно заполняет зону, но в конечной — квантуется, сохраняя общее число состояний.

6 Связь с групповой структурой

Забегая вперёд поясним: характер χ группы G — это гомоморфизм из G в комплексные числа $\mathbb{C}$. Для абелевой группы характеры тоже образуют группу, изоморфную исходной - двойственность Понтрягина.

Здесь проявляется глубокая связь с алгеброй:

- Циклическая группа $\mathbb{Z}/p_\nu\mathbb{Z}$ действует на решетке сдвигами $n \to n + m$
- Базисные функции $\psi_n^{(\nu)}$ являются неприводимыми представлениями этой циклической группы
- Теорема о полноте: Характеры конечной группы образуют полный ортонормированный базис для функций на группе. В данном случае:

$$\chi_\nu(n) = \exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right), \text{ где } \nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1 \tag{6.1}$$

— это в точности характеры циклической группы

Состояния, соответствующие одинаковым вычетам по модулю общих делителей периодов, дают неразличимые направления дифракции.

Определение 6.1 Пусть G — локально компактная абелева топологическая группа. В таком случае группа характеров G (гомоморфизмов из G в $U(1)$) тоже будет локально-компактной и называется двойственной группой по Понтрягину $\hat{G}$.

$U(1)$ (унитарная группа порядка 1) в математике — мультипликативная абелева группа всех комплексных чисел, равных по модулю единице: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Является также одномерной группой Ли и представляет собой окружность.

Это непосредственно следует из того, что фазовый множитель $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$, где $\nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1$ соответствует

$\exp(-ikdv\sin\theta)$ или, говоря в терминах теории чисел, зависит от дробной части $\left\{\frac{v}{p_n}\right\}$, которая совпадает для чисел v, отличающихся на кратное p_n.

Фазовый множитель - характер группового представления

Фазовый множитель может быть отождествлен с характером группового представления. Рассмотрим циклическую группу $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Её характеры имеют вид:

$$\chi_v(n) = \exp\left(2\pi i\frac{v}{p_n}\right), \quad v = 0, 1, \ldots, p-1$$

В нашем случае фазовый множитель действительно является характером представления циклической группы, где $\left\{\frac{v}{p_n}\right\}$ можно интерпретировать как вычет n по модулю p_n. Сравните с характерами регулярного представления 5

Критическая важность простых чисел

Выбор простых чисел действительно критически важен в данном формализме по нескольким причинам. Простые числа гарантируют уникальный учет каждого микросостояния, поскольку:

- Система с простым числом состояний p не имеет нетривиальных подсистем
- Все элементы (кроме единичного) являются образующими циклической группы
- Это обеспечивает максимальную “эффективность” статистического учета

Для каскада дифракционных решеток выбор отношений между числами щелей $N_1, N_2, \ldots$ в виде взаимно простых чисел обеспечивает:

- Отсутствие перекрывающихся спектров разных порядков;
- Максимальное разрешение спектрометра;
- Однозначное восстановление исходного спектра по дифракционной картине.

При сохранении постоянной общей апертуры каскада, взаимная простота чисел щелей N_i гарантирует, что китайская теорема об остатках обеспечивает взаимно одно-

значное соответствие между: множеством $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ остатков по модулям $(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ и углом дифракции (или энергией) исходного излучения.

Требование взаимной простоты целых чисел обосновано тождеством Безу для взаимно простых $(N_1, N_2, \ldots, N_k)$, что соответствует уникальности определения проекции волнового вектора на направление, ортогональное экрану дифракционной решётки и в, конечном счете, обеспечивает однократность учёта каждого микросостояния 2.2.

Тождество Безу — это следующая теорема. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа, не все равные 0. Тогда существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что выполняется соотношение: $gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

Краткое обобщение

Таким образом, алгебраическая структура базиса $\psi_n^{(\nu)}$ и работа идеального каскада дифракционных решеток действительно описываются единым математическим аппаратом, основанным на:

- Теории характеров конечных циклических групп
- Китайской теореме об остатках
- Свойствах взаимно простых чисел

Это обеспечивает глубокую связь между математической структурой, статистической физикой и оптикой дифракционных явлений.

- В дифракционной решетке направления, для которых $m\lambda = d\sin\theta$, дают одинаковые углы дифракции при m и $m + N$ (периодичность)
- В алгебраических терминах: факторизация по подгруппам соответствует отождествлению физически неразличимых направлений

Таблица 6.1: Связь между алгеброй, статфизикой и оптикой дифракционных явлений

Математическая структура	Физическая реализация
Неприводимые представления $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	Дифракционные порядки
Ортогональность характеров	Разрешение по углу в дифракции
Полнота базиса характеров	Полнота мод в преобразовании Фурье
Факторизация по подгруппам	Эквивалентность дифракционных направлений
Циклическая группа сдвигов	Периодичность решетки

Следствие 6.1 (Обобщение) Между алгебраической структурой базиса $\psi_n^{(\nu)}$ и дифракцией Фраунгофера существует не просто аналогия, а глубокая математическая

эквивалентность. Функции $\psi_n^{(\nu)}$ образуют полный базис, который можно интерпретировать как:

1. Собственные моды Фурье-преобразования линзой-/решеткой
2. Неприводимые представления циклической группы сдвигов
3. Дискретные пространственные частоты в дифракционной картине

Это прекрасный пример проявления одной и той же математической структуры в разных физических контекстах — от квантовой механики до Фурье оптики.

Связь с теорией представлений

Для произведения циклических групп $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}\otimes\ldots\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$, где $n=(p_1^{t_1}p_2^{t_2}\ldots p_k^{t_k})$ число неприводимых представлений равно $\phi(n)$. Эта формула имеет ясный физический смысл: она подсчитывает количество физически различимых (неэквивалентных) состояний в системе с заданной симметрией. В контексте модели с конечными матрицами $p_i \times p_i$ (p_i - простое число) возможна дифракционная интерпретация состояний обладающих групповой структурой и являющейся произведением циклических групп. Каждое представление соответствует уникальной физической конфигурации.

7 Китайская теорема об остатках

Для чистых математиков может представляться неприемлемым методом при поиске математического доказательства обращение к моделям из физики, как например, дифракционная решётка, квантовая механика, связанная с периодическими системами, в частности, с кристаллическими решётками. Поэтому рассмотрим один сугубо математический пример - китайскую теорему об остатках, сформулированную разносторонним китайским мыслителем конфуцианской традиции учёным, философом, математиком и астроном Сунь Цзы — автором трактата «Сунь Цзы Суань Цзин», в котором описана упомянутая теорема. Время жизни Сунь Цзы известно приблизительно: III–V века н. э. Теорема была открыта им во время

работы над календарем.

Лемма 7.1 (Лемма о существовании обратного элемента) Если a и b — взаимно простые целые числа ($\gcd(a,b) = 1$), то существует целое число c, такое что

$$ac \equiv 1 \pmod{b}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа

$$a \cdot 1,\ a \cdot 2,\ \ldots,\ a \cdot (b-1).$$

Утверждение 1: ни одно из этих чисел не делится на b.

Если бы $ak \equiv 0 \pmod{b}$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, то $b \mid ak$. Но $\gcd(a,b) = 1$, поэтому $b \mid k$. Однако $1 \leq k < b$, что невозможно.

Утверждение 2: все остатки различны.

Предположим, что $ai \equiv aj \pmod{b}$ для некоторых $i \neq j$. Тогда

$$a(i-j) \equiv 0 \pmod{b}.$$

Поскольку $\gcd(a,b) = 1$, это влечёт $i - j \equiv 0 \pmod{b}$, другими словами, $b \mid (i-j)$. Но $|i-j| < b$, поэтому $i = j$. Противоречие.

Утверждение 3: среди остатков есть 1.

Числа $a \cdot 1,\ a \cdot 2,\ \ldots,\ a \cdot (b-1)$ дают $b-1$ различных ненулевых остатков по модулю b. Следовательно, они пробегают все остатки от 1 до $b-1$.

Таким образом, $\exists \quad c \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, такое что $ac \equiv 1 \pmod{b}$. □

Теорема 7.1 (КТО - китайская теорема об остатках) Пусть даны попарно взаимно простые натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и произвольные целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Тогда система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{a_1}, \\ x \equiv r_2 \pmod{a_2}, \\ \dots \\ x \equiv r_n \pmod{a_n} \end{cases} \tag{7.1}$$

имеет единственное решение по модулю $N = a_1 a_2 \dots a_n$.

Доказательство КТО. Создание вспомогательных величин

Обозначим:

$$N = a_1 a_2 \dots a_n, \quad N_i = \frac{N}{a_i} \quad \text{для каждого } i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку a_i попарно взаимно просты, то N_i и a_i также взаимно просты, другими словами: $\gcd(N_i, a_i) = 1$.

∃ обратных элементов

По лемме о существовании обратного элемента 7.1, для $\forall \quad i$ $\exists$ целое число M_i, такое что

$$M_i N_i \equiv 1 \pmod{a_i}.$$

Нахождение решения

Рассмотрим число

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i M_i N_i.$$

Убедимся, что x удовлетворяет всем сравнениям системы. Фиксируем произвольное $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда:

- Для $i \neq k$ слагаемое $r_i M_i N_i$ содержит множитель N_i, который делится на a_k (поскольку $N_i = \frac{N}{a_i}$, а a_k входит в N и не входит в a_i при $i \neq k$). Следовательно, $r_i M_i N_i \equiv 0 \pmod{a_k}$;
- Для $i = k$ имеем $r_k M_k N_k \equiv r_k \cdot 1 \equiv r_k \pmod{a_k}$ (по определению M_k).

Следовательно, $x \equiv r_k \pmod{a_k}$ для $\forall \quad k = 1, 2, \dots, n$.

Единственность решения

Пусть x' — другое решение системы. Тогда

$$x \equiv x' \pmod{a_i} \quad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это означает, что $x - x'$ делится на каждое a_i. Поскольку a_i попарно взаимно просты, $x - x'$ делится на их произведение N. Следовательно,

$$x \equiv x' \pmod{N},$$

что доказывает единственность решения по модулю N. □

Рассматривается геометрическая модель представления целых чисел в ортогональной системе координат, построенной на базе взаимно простых чисел. Показано, что данная модель является точной интерпретацией Китайской теоремы об остатках (КТО).

7.1 КТО в модели естественного базиса

В естественном базисе $\forall p_m$ может рассматриваться как вектор, ортогональный другим $p_m \perp p_q, \quad p \neq q$, см. 5.12 и 7.2. Каждое собственное значение энергии, даже без учёта вырождения, повторяется p_m раз 7.4, что воплощено в выражении для характера группы 6.1.

Пусть задан набор попарно взаимно простых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Сопоставим каждому a_i базисный вектор $\mathbf{e}_i$ в k-мерном пространстве. Эти векторы ортогональны.

Любое натуральное число N представляется в этом пространстве как радиус-вектор:

$$N = (r_1, r_2, \ldots, r_k) \tag{7.2}$$

где $r_i = N \bmod a_i$ — остаток от деления N на a_i.

Ортогональность базисных векторов ↔ взаимная простота модулей Если модули a_i и a_j не взаимно просты (имеют общий делитель $d > 1$), то изменение остатка по модулю a_i может влиять на допустимые значения остатка по модулю a_j. В геометрической метафоре векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ перестают быть независимыми (не ортогональны).

Взаимная простота гарантирует полную независимость систем сравнений, аналогичную 7.1:

$$N \equiv r_1 \pmod{a_1}, N \equiv r_2 \pmod{a_2}, \dots N \equiv r_k \pmod{a_k}.$$

Аналогично в декартовой системе координат: движение вдоль оси X не меняет координаты Y и Z.

Координаты вектора ↔ набор остатков Каждая координата r_i вектора $\mathbf{N}$ соответствует остатку от деления N на a_i. Таким образом, каждая ось пространства является осью вычетов по модулю a_i.

Существование и единственность представления

- Существование: КТО утверждает, что для любого набора остатков $(r_1, \dots, r_k)$, где $0 \le r_i < a_i$, существует хотя бы одно число N. В геометрической модели это означает, что для любой точки с целыми координатами в множестве

  $$[0, a_1) \times [0, a_2) \times \cdots \times [0, a_k).$$

  существует хотя бы один целочисленный вектор $\mathbf{N}$.
- Единственность: КТО утверждает, что все решения N сравнимы по модулю

  $$M = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k.$$

  В геометрической модели векторы, соответствующие числам N и $N + M$, имеют одинаковые координаты $(r_1, \dots, r_k)$, так как при прибавлении M (делящегося на каждое a_i) остатки не меняются. Таким образом, система координат является циклической по каждой оси с периодом a_i, а полная картина повторяется с периодом M.

Радиус-вектор ↔ изоморфизм колец

Модель иллюстрирует фундаментальный изоморфизм, лежащий в основе КТО:

$$\mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}).$$

где:

- Левая часть — кольцо целых чисел по модулю M.
- Правая часть — прямое произведение колец вычетов по модулям a_i.

Геометрически правая часть соответствует k-мерному ортотопу (orthothope)

$$[0, a_1) \times [0, a_2) \times \cdots \times [0, a_k).$$

в котором операции сложения и умножения выполняются покоординатно (по каждому модулю независимо). Радиус-вектор $\mathbf{N}$ является элементом этого прямого произведения.

Обоснование неслучайности соответствия

Данная геометрическая интерпретация является стандартным и мощным способом представления и доказательства КТО.

Алгебраическая интерпретация КТО может быть интерпретирована как разложение циклической группы $\mathbb{Z}M$ в прямую сумму (произведение) циклических групп $\mathbb{Z}a_1, \ldots, \mathbb{Z}_{a_k}$. Ортогональные векторы $\mathbf{e}_i$ соответствуют образующим этих подгрупп.

Замечание 7.1 (Система остаточных классов - СОК) На данной модели основана система остаточных классов, применяемая в информатике и криптографии. Длинные числа представляются в виде кортежей остатков по независимым модулям, что позволяет выполнять параллельные вычисления (сложение и умножение покоординатно).

7.2 Доказательство КТО

В этой версии конструктивного доказательства КТО В доказательстве КТО использованы “ортогональные” базисные числа e_i, удовлетворяющие условиям:

$$e_i \equiv 1 \pmod{a_i}, \quad e_i \equiv 0 \pmod{a_j} \quad \text{для } j \neq i.$$

Тогда решение системы сравнений выражается как:

$$N = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \cdots + r_k e_k.$$

Базисные векторы геометрической модели соответствуют этим числам e_i.

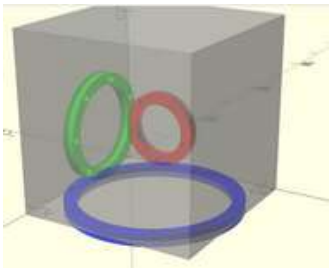


Рис. 7.5: В основе КТО заложена модель, где операции сложения и умножения выполняются покоординатно

Следствие 7.2 (Модель, раскрывающая сущность КТО) Предложенная геометрическая модель не просто соответствует Китайской теореме об остатках, но и раскрывает её суть:

- Набор взаимно простых модулей задаёт ортонормированный базис (с циклической структурой) для представления чисел.
- Арифметика больших чисел в этом представлении сводится к параллельным операциям над малыми координатами.
- Единственность представления в пределах M отражает факт, что пространство является тором

$$T^k = S^1_{a_1} \times S^1_{a_2} \times \cdots \times S^1_{a_k} \tag{7.3}$$

  то есть произведением окружностей длин $a_1, \ldots, a_k$), а натуральные числа "наматываются" на него однозначной спиралью.

Данная модель лежит в основе многих современных алгоритмов вычислительной математики и криптографии. Для наглядности приводим код в OpenScad, моделирующий простанство в виде тора - произведения окружностей, как это записано в последней формуле.

Модель Декартова произведения ортогональных колец

```
###### The_space_is_a_torus.m.m ######
// Параметры
cube_size = 22;   // Ребро куба
ring_radii = [5, 7, 11];
// Радиусы колец [X, Y, Z]
ring_width = 1.5; // Ширина колец
hole_diameter = 1;
// Диаметр отверстий

// Количество отверстий каждого кольца
hole_counts = [5, 7, 11];

// Цвета для разных колец (опционально)
colors = [
[1, 0, 0, 0.7], // Красный для X
```

```
[0, 1, 0, 0.7], // Зелёный для Y
[0, 0, 1, 0.7]  // Синий для Z
];

// Модуль для создания кольца с отверстиями
module create_ring_with_holes(radius, thickness,
hole_count) {
 // Средний радиус для размещения отверстий
 middle_radius = radius - ring_width/2;

 difference() {
  // Основное кольцо
  cylinder(h = thickness, r = radius,
  center = true, $fn = 100);

  // Внутреннее отверстие кольца
  cylinder(h = thickness + 0.1, r = radius
  - ring_width, center = true, $fn = 100);

  // Добавляем отверстия (цикл для создания
  // всех отверстий)
  for (i = [0:hole_count-1]) {
   angle = i * (360/hole_count);

   // Координаты отверстия
   x_pos = middle_radius * cos(angle);
   y_pos = middle_radius * sin(angle);

   // Создаем отверстие
   translate([x_pos, y_pos, 0])
   cylinder(h = thickness + 0.2,
   d = hole_diameter, center = true, $fn = 30);
  }
 }
}

// Создание куба-ограничителя (для визуализации)
%cube([cube_size, cube_size, cube_size],
center = false);

// Создание трёх ортогональных колец
for (i = [0:2]) {
 color(colors[i]) {
  if (i == 0) {
   // Кольцо в плоскости YZ (ортогонально оси X)
   translate([0, ring_radii[0]/sqrt(2)+ring_width,
```

```
    ring_radii[0]/sqrt(2)+ring_width])
    rotate([0, 90, 0])
    create_ring_with_holes(ring_radii[0],
    ring_width, hole_counts[0]);
   }
   else if (i == 1) {
    // Кольцо в плоскости XZ (ортогонально оси Y)
    translate([ring_radii[1]/sqrt(2)+ring_width, 0,
    ring_radii[1]/sqrt(2)+ring_width])
    rotate([90, 0, 0])
    create_ring_with_holes(ring_radii[1],
    ring_width, hole_counts[1]);
   }
   else if (i == 2) {
    // Кольцо в плоскости XY (ортогонально оси Z)
    translate([ring_radii[2]/sqrt(2)+2*ring_width,
    ring_radii[2]/sqrt(2)+2*ring_width, 0])
    rotate([0, 0, 0])
    create_ring_with_holes(ring_radii[2],
    ring_width, hole_counts[2]);
   }
  }
 }
```

Таблица 7.2: Сравнение традиционной позиционной системы и системы остаточных классов (СОК)

Аспект	Традиционная система	Система остаточных классов (СОК)
Сложение	Последовательная обработка разрядов с переносами	Параллельное сложение k координат
Умножение	$O(n^2)$ операций, переносы между разрядами	$O(k)$ параллельных умножений, нет переносов
Параллелизм	Сложно распараллелить	Естественно параллельная
Размер операций	Работа с n-разрядными числами	Работа с малыми числами ($<$ модуля СОК)
Память	Компактное представление	Избыточное представление (k остатков)
Сравнение/знак	Простая операция	Сложная операция, требует конверсии

В системе остаточных классов возникает фундаментальная проблема: невозможно напрямую определить, превы-

сил ли результат вычислений динамический диапазон M. Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.1 (Ограничения системы остаточных классов) ▶

В позиционной системе счисления переполнение легко определяется по количеству разрядов результата.

▶ В СОК информация о величине числа распределена по всем модулям, и для определения факта переполнения требуется выполнение дополнительных операций.

Рассмотрим систему с модулями:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7.$$

Динамический диапазон системы:

$$M = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 3 \times 5 \times 7 = 105.$$

Представление чисел в СОК

$$\text{Число } 100 \longrightarrow (100 \bmod 3,\ 100 \bmod 5,\ 100 \bmod 7) = (1,\ 0,\ 2)$$

$$\text{Число } 10 \longrightarrow (10 \bmod 3,\ 10 \bmod 5,\ 10 \bmod 7) = (1,\ 0,\ 3)$$

Умножение в СОК

Выполним умножение в СОК покоординатно:

$$(1,\ 0,\ 2)\times(1,\ 0,\ 3) = (1\times1 \bmod 3,\ 0\times0 \bmod 5,\ 2\times3 \bmod 7).$$

$$= (1 \bmod 3,\ 0 \bmod 5,\ 6 \bmod 7) = (1,\ 0,\ 6).$$

Проблема интерпретации результата

Фактически:

$$100 \times 10 = 1000.$$

Однако в СОК мы получили вектор $(1,\ 0,\ 6)$. Проверим, каким числам соответствует этот вектор:

$$1000 \bmod 105 = 1000 - 9 \times 105 = 1000 - 945 = 55.$$

Вычислим представление числа 55 в СОК:

$$55 \to (55 \bmod 3,\ 55 \bmod 5,\ 55 \bmod 7) = (1,\ 0,\ 6).$$

Проблема: результат получен неоднозначный.

Следствие 7.3 (Вывод из примера) Получился одинаковый вектор $(1,\ 0,\ 6)$ как для произведения $100 \times 10 = 1000$, так и для числа 55. Это происходит потому, что:

$$1000 \equiv 55 \pmod{105}.$$

Таким образом, в СОК невозможно отличить результат 1000 от результата 55, поскольку они сравнимы по модулю $M = 105$.

Математическая формулировка проблемы

Пусть $M = \prod_{i=1}^{k} a_i$ — динамический диапазон системы. Если результат операции R удовлетворяет условию:

$$R \geq M,$$

то в СОК он будет представлен тем же вектором, что и число:

$$R' = R \bmod M.$$

Это следует из фундаментального свойства СОК:

$$R \leftrightarrow (r_1, r_2, \ldots, r_k) \quad \Leftrightarrow \quad r_i \equiv R \pmod{a_i}.$$

Ограничение СОК, связанное с невозможностью прямого определения переполнения, является следствием самой природы модульного представления чисел. Это ограничение компенсируется значительным выигрышем в скорости выполнения арифметических операций, что делает СОК эффективной для специализированных применений, где переполнение исключено конструктивно (например, в модульной арифметике криптографических алгоритмов).

Следствие 7.4 (КТО помогает объяснить статистическую физику) Аналогичный эффект при работе с дифракционной решёткой заключался в избегании перекрытия порядков 6.9. На уровне статистической физики этот эффект заключается в соблюдении однократность учёта каждого микросостояния 2.2. Китайская теорема об остатках помогает объяснить важные принципы статистической физики школьникам средних классов школы.

8 Решение находится в термодинамике

Выше было сказано, что если группа линейных операторов $\hat{T}_g$ гомоморфна группе G: $g_1, g_2 \dots g_m$, тогда представление произвольного линейного оператора 3.4, быть разложено по ортам в линейном пространстве R^m, где - m - размерность пространства и одновременно степень представления группы G 3.7.

Согласно гипотезе Гольдбаха-Эйлера, мы рассматриваем подмножество чётных натуральных чисел, т.е. N является составным. В силу изоморфизма алгебр 3.2 в рассуждениях ниже рассматривается вполне приводимое 3.6 представление D, такое что $N = dim(D)$. Это не налагает дополнительных ограничений на N, помимо его чётности.

Представление D является приводимым если существует такая неособенная матрица V, что путем преобразования подобия матрица преставления что $V^{-1}DV$ приобретает блочно-диагональный вид, где каждый блок соответствует неприводимому представлению. См. 3.1.

Нам потребуется в дальнейшем понятие размерности гильбертова пространства в квантовой механике $\dim H$.

Интерпретация размерности гильбертова пространства в квантовой механике

Пусть H – гильбертово пространство системы. Обозначим под $\dim H$ максимальное число линейно независимых векторов (волновых функций) в H.

1. $\dim H$ и число независимых волновых функций

По определению базиса гильбертова пространства:

$\dim H$ = максимальное число линейно независимых волновых функций системы.

Любое чистое состояние системы – вектор в H и максимальное число линейно независимых векторов равно $\dim H$.

2. $\dim H$ и собственные векторы оператора Пусть $\hat{A}$ – эрмитов оператор (наблюдаемая) на H.

- Если спектр $\hat{A}$ невырожденный, то существует ровно $\dim H$ различных собственных векторов (по одному на каждое собственное значение).
- Если есть вырождение, то собственное значение λ_k имеет кратность g_k, и ему соответствует подпространство размерности g_k. Тогда:

$$\sum_k g_k = \dim H.$$

Таким образом, общее число линейно независимых собственных векторов эрмитова оператора, диагонализуемого в H, всегда равно $\dim H$, но число разных собственных значений может быть меньше. 3. $\dim H$ и число квантовых уровней системы Под "числом квантовых уровней" обычно понимают число различных собственных значений гамильтониана $\hat{H}$.

Интерпретация размерности гильбертова пространства в квантовой механике

Пример 8.1 (Частица в бесконечно глубокой одномерной яме) Гамильтониан имеет счётный спектр E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), каждому E_n соответствует один собственный вектор (нет вырождения). Здесь:

$$\dim H = \aleph_0 \quad (\text{счётная } \infty), \quad \#\{\text{уровни}\} = \aleph_0.$$

Числа совпадают, потому что нет вырождения.

Интерпретация размерности гильбертова пространства в квантовой механике

Пример 8.2 (Атом водорода (нерелятивистский), без спина) Уровню с главным квантовым числом n соответствует несколько состояний с разными орбитальным (азимутальным) квантовым числом l и магнитным квантовым числом m:

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2.$$

Здесь $\dim H = \infty$ (счётная бесконечность), но число различных энергий E_n конечно для любого ограниченного сверху n и всегда: число уровней до заданного $n < \dim H$, поскольку имеется вырождение.

4. Конечномерный случай Для системы N кубитов (спинов $\frac{1}{2}$):

$$\dim H = 2^N.$$

Это полное число линейно независимых спиновых состояний. Гамильтониан (например, гейзенберговский) может иметь вырождение из-за симметрий, поэтому:

число различных собственных значений $E_k \leq 2^N$.

Равенство достигается только при полном отсутствии вырождения.

Следствие 8.1 (Краткий вывод) Можно сформулировать следующий вывод:

- $\dim H = \sum_k g_k(\hat{A}$ число линейно независимых волновых функций (полный набор состояний);
- $\dim H = \sum_k g_k(\hat{A})$ (для любого эрмитова оператора $\hat{A}$ квантовых уровней (энергий) $\leq \dim H$ строго меньше при вырождении). $\leq \dim H$

Если $\dim H$ конечна, то это максимально возможное число ортогональных состояний системы. Если $\dim H$ бесконечна (счётная), то сравнение с числом уровней требует учёта вырождения спектра гамильтониана.

8.1 Размерность пространства

Пусть $\hat{A}$ - некоторый эрмитов оператор (наблюдаемая) на H. Если спектр $\hat{A}$ невырожденный, то у него ровно $dimH$ различных собственных векторов (по одному на каждое собственное значение).

Если есть вырождение, то одному собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных векторов, но сумма размерностей всех собственных подпространств = $dimH$. Таким образом, общее число линейно независимых собственных векторов эрмитова оператора, диагонализуемого в $H = dimH$, но «разных» в значении "относящихся к разным собственным значениям" может быть меньше.

Пример 8.3 (Соответствует ли $dimH$ числу квантовых уровней системы?) Ответ на вопрос отрицательный, если под числом квантовых уровней понимать число различных собственных значений гамильтониана.

Так, гамильтониан частицы в бесконечно глубокой яме имеет бесконечное число уровней $E_n = 1, 2, 3 \dots$) и каждому E_n соответствует один собственный вектор (ог невырожден). Здесь размерность пространства $dimH$ (счётная бесконечность) совпадает с числом уровней.

Контр пример: вырождение (атом водорода H_2: уровню с главным квантовым числом n соответствует несколько состояний с разными l, m и число уровней (разных $E_n < dimH$ При этом число независимых стационарных состояний (собственных векторов гамильтониана) равно $dimH$.

Собственные векторы H и значения

Если все собственные значения всех матриц H различные то есть нет случайного выражения энергетического уровня, то мы можем утверждать что собственное векторы матрицы H, принадлежащее одному собственному значению λ, преобразуется по одному из неприводимых представлений группы G, следовательно кратности вырождения собственных значений матрицы H в этом случае должны совпадать с порядками неприводимых представлений группы G.

Если нет дополнительного вырождения то каждому энергетическому уровню - собственному значению λ соответствующие канонические переменные в конфигурационном пространстве преобразуются по одному из неприводимых представлений группы G возможность дополнительного выражения связано со случайным совпадением собственных значений матриц потенциальной энергии. За счёт изменение параметров задачи, не приводящих к изменению её симметрии, можно добиться снятия случайного выражения. Утверждение в соответствии собственных значений квантовомеханической системы не приводимым представлениям её группы симметрии будем подразумевать без оговорки возможности случайного вырождения.

8.2 Оператор проектор P

Пусть G — подпространство гильбертова пространства H, а F — его ортогональное дополнение, т.е. $H = G \oplus F$ или $F = H \ominus G$. Это означает, что каждый вектор $h \in H$ может быть единственным образом представлен как $h = g + f$. Вектор g называется проекцией вектора h на G. Оператор, определённый на всём гильбертовом пространстве H, который сопоставляет каждому вектору $h \in H$ его проекцию на подпространство G, называется оператором проекции на G и обозначается символом P_G, так что $g = Ph = P_G h$. Оператор проекции, очевидно, линеен. Более того, его норма $||P|| = 1$.

Свойства P:

$$P^2 h = ph \quad P^2 = P \qquad P^* = P \tag{8.1}$$

Заметим, что если P — оператор проекции на G, то $E - P$, где E — тождественный оператор, также является оператором проекции, и $E - P$ проецирует на $H \ominus G$ [Сад04].

[Сад04]: Садовничий (2004), Теория операторов

Действительно, $(E - P)^* = (E - P)$ и $(E - P)^2 = (E - P)$, и для любого вектора $h \in H$ мы имеем $(E - P)h = h - g = f$, где $f \in H \ominus G$.

Произведение двух операторов проекции P_{G_1} и P_{G_2} является оператором проекции тогда и только тогда, когда они коммутируют:

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1} \tag{8.2}$$

Подпространства G_1 и G_1 ортогональны тогда и только тогда, когда $P_{G_1}P_{G_2} = 0$.

Таким образом гильбертово пространство $H = F \oplus G$ является прямой суммой ортогональных инвариантных подпространств, кроме того ортогональные проекторы P_F и P_G, удовлетворяют следующим выражениям:

$$P_F + P_G = I, \quad P_F P_G = 0,$$

и волновая функция $\Psi \in H$. Обозначим $\Psi_F = P_F\Psi$, $\Psi_G = P_G\Psi$, так что $\Psi = \Psi_F + \Psi_G$ и $\langle\Psi_F|\Psi_G\rangle = 0$.

О равенстве $|\Psi|^2 = |\Psi_F|^2 + |\Psi_G|^2$

В гильбертовом пространстве квадрат нормы вектора:

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2 = \langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi_F + \Psi_G|\Psi_F + \Psi_G\rangle \\ = \langle\Psi_F|\Psi_F\rangle + \langle\Psi_G|\Psi_G\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle\Psi_F|\Psi_G\rangle. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Из ортогональности Ψ_F и Ψ_G последнее слагаемое равно нулю, поэтому

$$\|\Psi\|^2 = \|\Psi_F\|^2 + \|\Psi_G\|^2.$$

Здесь под $|\Psi|^2$ понимать квадрат нормы в H (а не поточечное значение плотности вероятности), поэтому равенство верно.

8.3 След оператора

Пусть A — линейный оператор некоторой наблюдаемой на H. Поскольку F и G инвариантны относительно A (т.е. A не имеет недиагональных блоков между F и G в данном разложении), тогда

$$P_G A P_F = 0, \quad P_F A P_G = 0.$$

Следовательно,

$$A = (P_F + P_G)A(P_F + P_G) = P_F A P_F + P_G A P_G.$$

Обозначим сужения:

$$A_F \equiv P_F A P_F\big|_F : F \to F, \quad A_G \equiv P_G A P_G\big|_G : G \to G.$$

Выберем ортонормированный базис $\{e_i^F\}$ в F и $\{e_j^G\}$ в G; вместе они образуют ортонормированный базис H. Тогда след оператора A в H:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_H(A) &= \sum_i \langle e_i^F | A e_i^F \rangle + \sum_j \langle e_j^G | A e_j^G \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i^F | P_F A P_F e_i^F \rangle + \sum_j \langle e_j^G | P_G A P_G e_j^G \rangle \\ &= \mathrm{Tr}_F(A_F) + \mathrm{Tr}_G(A_G).\end{aligned} \tag{8.4}$$

Здесь использовано, что $Ae_i^F \in F$ (инвариантность), поэтому $P_F A e_i^F = A e_i^F$, и аналогично для G.

Таким образом, при условии инвариантности F и G относительно A верно, что

$$\mathrm{Tr}_H(A) = \mathrm{Tr}_F(A_F) + \mathrm{Tr}_G(A_G). \tag{8.5}$$

8.4 Характер группы

Нам потребуется определение характера группы. Поскольку естественный базис является диагональной матрицей, поскольку диагональные матрицы коммутируют между собой (являются абелевой группой по умножению), принимая во внимание подгруппу кручения, имеем:

Определение 8.1 (Характер χ конечный абелевой группы) Характер χ конечный абелевой группы G - это не равная тождественно нулю комплекснозначная функция определённая на этой группе и обладающая свойством коммутативности $g_i g_j = g_k$.

В результате:

$$\begin{aligned}\chi(g_i)\chi(g_j) = \chi(g_k) \Rightarrow \chi(e) = 1, \\ \chi(g_i g_i^{-1}) = \chi(g_i)\chi(g_i^{-1})) = 1\end{aligned} \tag{8.6}$$

Где под e понимается единичный элемент в группе G. Если группа G имеет порядок m то $\forall g$ в степени m равно единице $g^m = e$.

Характер χ_1, обладающий свойством $\chi_1(g) = 1$ для $\forall g$, именуется как главный характер группы G.

Другие свойства характеров:

$$\begin{aligned} \chi(g) \cdot \chi(g^{-1}) &= e \\ \text{если} \quad ord(G) &= m \\ \Longrightarrow \chi(g^r) = \chi(g)^r &= e \\ \Longrightarrow \chi = \exp(i\frac{2\pi k}{m}) & \\ \chi_1(g) &= 1 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Пример 8.4 Примеры циклических групп и порождающих элементов:

- Аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел является циклической, так как порождается элементом 1;
- Аддитивная группа $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю $(mod\, n)$ является циклической, так как порождается элементом [1].
- Мультипликативная группа C_n комплексных корней n-ой степени из 1 является циклической. Эти корни задаются формулой:
- $\epsilon_k = cos\, \frac{2\pi k}{n} + i\, sin\, \frac{2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, 2, n-1$

Заметим, что элемент g^k циклической группы $G = \langle g \rangle$ является порождающим $\langle g \rangle$ тогда и только тогда, когда $(k, n) = 1$.

Пусть G является произведением циклических групп, при этом r_i - порядок группы G_i и при этом a, соответственно a_i - образующие циклические элементы (под)группы, всего таких подгрупп k. Тогда из $\chi(a)^r = e \Rightarrow \chi(a) = e^{\frac{2\pi ik}{r}}$, где $i^2 = -1$ - мнимая единица, $1, 2 \ldots k \in \mathbb{Z}$ и $m = r_1 r_2 r_3 \ldots r_k$, при этом $\forall a \in G$ может быть единственным образом представлен $a = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \ldots a_k^{t_k}$, где $0 \leq t_i \leq r_i$. Тогда для любого элемента группы $\forall a \in G$ его характер представим в виде произведения:

$$\chi(a) = \chi(a_1)^{t_1} \chi(a_2)^{t_2} \chi(a_3)^{t_3} \ldots \chi(a_k)^{t_k} \tag{8.8}$$

Это соответствует тензорному произведение матриц представления групп, что находится в согласии с изложенными выше физическим принципами об интегралах движения 2.5.

В свою очередь, характеры конечной мультипликативной

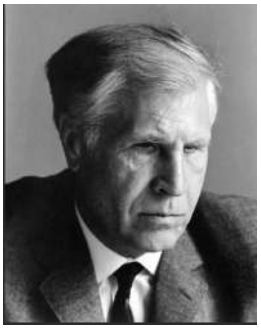


Рис. 8.6: Лев Семёнович Понтрягин (1908-1988) советский математик, один из крупнейших математиков XX века, академик АН СССР (1958; член-корреспондент с 1939). Внёс значительный вклад в алгебраическую и дифференциальную топологию, теорию колебаний, вариационное исчисление, теорию управления, несмотря на полную утрату зрения в результате глазной травмы в 14 лет

Если порядок группы $ord(G) = p$, то группа $\langle g \rangle$ содержит ровно p элементов: $G = \langle g \rangle = \{e, g^2, g^3 \ldots g^{p-1}\}$.

абелевой группы G также образуют абелеву группу $\hat{G}$. Группа характеров $\hat{G}$ - дуальная группа.

Дуальная или двойственная группа Понтрягина

Дуальная (или двойственная) группа Понтрягина — это фундаментальное понятие в гармоническом анализе и теории топологических групп.

Дуальная или двойственная группа Понтрягина

Определение 8.2 (Строгое определение) Пусть G — локально компактная абелева топологическая группа. Тогда её двойственная группа по Понтрягину (обозначается $\widehat{G}$ или $G^\wedge$) определяется как:

$$\widehat{G} = \{\chi : G \to U(1) \mid \chi \text{ — непрерывный гомоморфизм}\},$$

где:

- $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — группа окружности (мультипликативная группа комплексных чисел модуля 1);
- χ — характер группы G (непрерывный гомоморфизм в $U(1)$).

На $\widehat{G}$ задаётся:

- операция умножения: $(\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x)$;
- топология компактно-открытая (равномерная сходимость на компактных подмножествах G).

Дуальная (двойственная) группа Понтрягина позволяет обобщить преобразование Фурье на широкий класс групп.

Дуальная или двойственная группа Понтрягина

Следствие 8.2 (Ключевое свойство: теорема Понтрягина о двойственности) Для любой локально компактной абелевой группы G выполняется канонический изоморфизм:

$$G \cong \widehat{\widehat{G}}.$$

Это означает, что G двойственна сама себе через двукратное дуализирование. Каноническое отображение задаётся формулой:

$$x \mapsto \{\chi \mapsto \chi(x)\},$$

то есть элементу $x \in G$ сопоставляется оценка характеров в точке x.

Рассмотрим примеры двойственных групп.

Дуальная или двойственная группа Понтрягина

Пример 8.5 (Примеры двойственных групп) Примеры двойственных групп следующие.

1. Вещественные числа $\mathbb{R}$:
$$\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R},$$
где характер $\chi_t(x) = e^{2\pi i t x}$ соответствует $t \in \mathbb{R}$.
2. Круг $U(1)$:
$$\widehat{U(1)} \cong \mathbb{Z},$$
характеры имеют вид $\chi_n(z) = z^n$ для $n \in \mathbb{Z}$.
3. Целые числа $\mathbb{Z}$:
$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong U(1),$$
характер $\chi_\theta(n) = e^{2\pi i \theta n}$ соответствует $\theta \in [0, 1)$.
4. Конечные абелевы группы:
$$\widehat{G} \cong G \quad \text{(не канонически)},$$
например, для $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ двойственная группа изоморфна ей самой.

Таким образом, дуальная группа Понтрягина — это мощный инструмент, объединяющий анализ, алгебру и топологию в рамках единого формализма.

Заметим, что в $\hat{G}$ - дуальной группе главный характер χ_1 группы является единичным элементом $\hat{G}$, $\chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1})$ и группы $G \cong \hat{G}$ изоморфны. Этот изоморфизм зависит от разложения $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \dots G_k$, от выбора образующих элементов циклических групп.

Для $\forall a \in G$ верны соотношения:

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = m \quad \text{if} \quad \chi = \chi_1 \quad \sum_{a \in G} \chi(a) = 0 \quad \text{if} \quad \chi \neq \chi_1 \tag{8.9}$$

Для любого натурального $n > 2$ найдётся простое число p в интервале $(n; 2n)$. Постулат сформулировал Жозеф Луи Франсуа Бертран в 1845. Впервые доказал Пафнутий Львович Чебышёв в 1852

Где суммирование произошло по всем элементам группы G, при этом m - порядок группы. Аналогично:

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = m \quad &\text{если} \quad a = E \\ \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = 0 \quad &\text{если} \quad a \neq E \end{aligned} \tag{8.10}$$

Рис. 8.7: Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822-1900) — французский математик, работавший в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятности и термодинамики.

Где суммирование произошло по всем характерам группы $\hat{G}$, при этом m - порядок группы. Интересная связь обнаруживается между характерами конечной абелевой группы и определением характера Дирихле для целых чисел 4.

8.5 Постулат Бертрана

Постулат Бертрана, используется также наименование: теорема Бертрана — Чебышёва.

Предложение 8.3 Для любого натурального $n \geq 2$ найдётся простое число p в интервале $(n; 2n)$

Постулат Бертрана сформулировал французский математик Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822-1900) в 1845 г. и впервые доказал русский математик Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) в 1852. Рамануджан в 1919 году

нашёл более простое доказательство и доказал, что количество простых чисел в интервале $(n; 2n)$ можно ограничить снизу неубывающей последовательностью, которая стремится к бесконечности, такой что в простых числах Рамануджана достигается равенство.

Изящное доказательство, учитывающее вклад и других математиков, приведено в [Чан74]

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

8.6 Аддитивность Tr. Характеры. Разложение представлений

Рис. 8.8: Рамануджан — имя, Срениваса — отчество, Айенгор — каста (1887-1920) (тамильское имя без фамилии). Не имея специального математического образования, получил замечательные результаты в области теории чисел. Наиболее значительна его работа совместно с Годфри Харди по асимптотике числа разбиений $p(n)$.

В нашем случае гильбертово пространство H разлагается в прямую сумму двух инвариантных подпространств. Выедем формулу следа для прямого разложения. Можно записать для оператора A, соответствующего некоторой наблюдаемой:

$$H = G \oplus F, \quad A(G) \subset G, \quad A(F) \subset F.$$

Определение 8.3 (Множество ограниченных обратимых линейных операторов на гильбертовом пространстве) $\mathrm{GL}(H)$ — это множество всех ограниченных обратимых линейных операторов на гильбертовом пространстве H, замкнутое относительно:

- операции композиции операторов (умножения);
- взятия обратного оператора.

Формально:

$$\mathrm{GL}(H) = \{T \in \mathscr{B}(H) \mid T \text{ обратим и } T^{-1} \in \mathscr{B}(H)\},$$

где $\mathscr{B}(H)$ — алгебра ограниченных линейных операторов на H.

Принимая во внимание изотропность гильбертова пространства, направления ортопроекторов $P_\perp$ и $P_\parallel$ эквивалентны. Постулат Бертрана можно одинаково хорошо применить как к параллельным, так и к перпендикулярным проекциям.

Применение к характерам представлений групп

Пусть $\pi : G_{\mathrm{grp}} \to \mathrm{GL}(H)$ – унитарное представление конечной или компактной группы G_{grp}. По условиям Гипотезы Гольдбаха N - чётное, следовательно составное, что соответствует приводимому преставлению, разлагаемому в прямую сумму как минимум двух неприводимых

представлений (ниже будет объяснено, почему можно отыскать именно два):

$$\pi = \pi_G \oplus \pi_F, \quad H = G \oplus F.$$

Характер представления π по определению равен следу оператора представления:

$$\chi_\pi(g) = \mathrm{Tr}_H(\pi(g)).$$

Поскольку $\pi(g)$ в базисе, согласованном с разложением $H = G \oplus F$, имеет блочно-диагональный вид, из аддитивности следа непосредственно следует ключевое свойство:

$$\boxed{\chi_\pi(g) = \chi_{\pi_G}(g) + \chi_{\pi_F}(g)}. \tag{8.11}$$

Следовательно, формула 8.11 является частным случаем этого общего выражения 8.5.

Линейная оболочка векторов

Линейная оболочка векторов

Определение 8.4 Линейная оболочка множества векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ в линейном пространстве L — это множество всех возможных линейных комбинаций этих векторов. Формально:

$$\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \;\middle|\; c_i \in \mathbb{R} \right\},$$

где:

- c_i — скалярные коэффициенты (действительные числа);
- $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ — линейная комбинация векторов.

Иначе говорят, что линейная оболочка натянута на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ключевые свойства

Линейная оболочка является линейным подпространством в L. Это значит, что для любых двух векторов из оболочки их сумма и умножение на скаляр тоже принадлежат оболочке.

Наименьшее подпространство, содержащее исходные векторы

Если есть какое-то подпространство $W \subseteq L$, включающее $v_1, \ldots, v_n$, то

$$\text{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq W.$$

Размерность = рангу системы векторов

Размерность линейной оболочки равна максимальному числу линейно независимых векторов среди $v_1, \ldots, v_n$.

Если векторы линейно независимы, то

$$\dim(\text{span}) = n.$$

9 Доказательство гипотезы Гольдбаха-Эйлера

Опираясь на изложенные выше предпосылки, можно приступить к доказательству гипотезы Гольдбаха-Эйлера.

Унитарная матрица — квадратная матрица с комплексными элементами, результат умножения которой на эрмитово сопряжённую равен единичной $U^\dagger U = UU^\dagger = I$. Для всякой унитарной матрицы U существует такая унитарная матрица V, что $V^* U V$ — диагональна.

Доказательство. Пусть в гильбертовом пространстве L_2 имеется линейный оператор $\hat{A}$, соответствующей наблюдаемой A. По условиям гипотезы, в силу чётности N, представление группы симметрии исследуемой системы D' приводимо и за счет унитарного преобразования: $D = UD'U^\dagger$ можно осуществить переход к другому ортонормированному базису, например к естественному базису 5.12, где доказательство особенно наглядно 9.9.

Имеем ортонормированные базисы $\{e_i^G\}$ в G и $\{e_j^F\}$ в F; вместе они образуют ортонормированный базис H. Тогда след оператора $\hat{A}$ в H выражается как сумма следов его ограничений 8.4 и 8.5.

В естественном базисе $\forall p_m$ может рассматриваться как вектор, ортогональный другим $p_m \perp p_q, \quad p \neq q$, см. 5.12 и 7.2. Каждое собственное значение энергии, даже без учёта вырождения, повторяется p_m раз 7.4, что воплощено в выражении для характера группы 6.1.

Согласно немного переформулированному постулату Бертрана для $\forall$ чётного N $\exists$ простое число $\frac{N}{2} \leq p < N$. Таким образом:

$$\Psi = P_G\Psi \oplus P_F\Psi = P_\perp\Psi \oplus P_\parallel\Psi \tag{9.1}$$

Это означает, что путём унитарных преобразований можно разместить рассматриваемый вектор состояния Ψ для

оператора $\hat{A}$ в линейном подпространстве 8.6, порожденном при помощи двух простых чисел $p_\perp$ и $p_\parallel$.

$$\operatorname{span}\{H\} = \operatorname{span}\{F\} \oplus \operatorname{span}\{G\} \tag{9.2}$$

Важно помнить, что благодаря изотропности пространства постулат Бертрана может применен к любому из двух катетов прямоугольного треугольника. Кроме того естественный базис (5.12) является полной ортонормированной системой функций.

Интерпретация в контексте естественного базиса Пусть в физической модели:

- N – чётное число, интерпретируемое как полная размерность пространства состояний или число квантовых уровней: $N = \dim H$.
- Простые числа p_1 и p_2 соответствуют размерностям неприводимых представлений, на которые разлагается исходное: $p_1 = \dim G$, $p_2 = \dim F$.

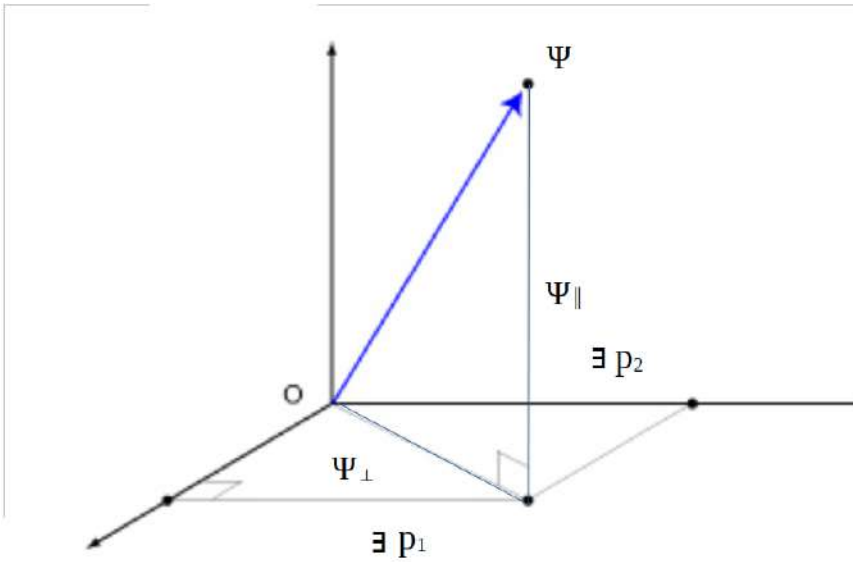


Рис. 9.9: Аддитивность следа оператора при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Характер прямой суммы представлений равен сумме характеров слагаемых: $p_1 + p_2$

Разложение $H = G \oplus F$ с учётом выражения для характеров 8.11 влечёт равенство:

$$\boxed{\begin{aligned} N = \dim H = \dim G + \dim F \\ \text{Если } A = I \text{ то } N = \dim H = p_1 + p_2 \\ = \phi(p_1) + \phi(p_2) + 2 \end{aligned}} \tag{9.3}$$

В гильбертовом пространстве тожественному оператору соответствует единичная матрица I.

В последнем выражении использовано свойство формулы Эйлера для простого числа $\phi(p_1) = p - 1$. Наличие слагаемого 2 как раз соответствует минимальному простому числу, заложенному в формулировке гипотезы Гольдбаха-Эйлера.

Бинарная гипотеза Гольдбаха-Эйлера доказана. □

Замечание 9.1 (Почему пара $p_\perp$ и $p_\parallel$ всегда найдётся?) Если бы пара простых простых чисел $p_\perp$ и $p_\parallel$ не нашлась, то это противоречило бы основным принципам, заложенным в основаниях нашей Вселенной. На этих принципах покоятся основные свойства гильбертова пространства - сепарабельность, при условии существовании счётной полной системы элементов - естественного базиса, порождённого p - числами.

В ходе доказательства использовалась предпосылка, что постулат Бертрана может быть применен к любому из двух катетов прямоугольного треугольника. Почему это возможно? - ответ лежит в плоскости физики.

Замечание 9.2 (Физическая изотропность, а не математическая) Гильбертово/евклидово пространство обладает вращательной симметрией (инвариантностью относительно группы $O(n)$), как математический объект.

Пространство-время специальной теории относительности (пространство Минковского) обладает физической изотропностью (инвариантностью относительно группы Лоренца $SO(1,3)$), которая включает постоянство скорости света.

Гильбертово пространство не моделирует физическое пространство-время. Оно моделирует, например, пространство квантовых состояний, где понятие "скорость света в разных направлениях" просто не имеет смысла. Побробнее см. в Главе о Великой теореме Ферма 15.

Таким образом, приписывать гильбертову пространству свойство физической изотропности — это категориаль-

ная ошибка. Оно математически изотропно в своём собственном смысле, не тожественном изотропности Вселенной.

Итак, исходная предпосылка о разложении системы на две независимые компоненты с образующими p_1 и p_2 приводит к математическому утверждению, совпадающему с бинарной гипотезой Гольдбаха для чётного N.

Следствие 9.1 (Какие принципы заложены в постулате Бертрана?) Аддитивность следа оператора при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств является общим математическим фактом. В теории представлений групп этот факт выражается в аддитивности характеров: характер прямой суммы представлений равен сумме характеров слагаемых. Применение этого принципа к модели, в которой размерности неприводимых компонент отождествляются с простыми числами, естественным образом приводит к соотношению $N = p_1 + p_2$ для чётного N.

Это интуитивно понятно: деление на части предполагает образование по крайней мере двух слагаемых. Вот почему минимальное число членов в разложении любого составного чётного числа на простые равно двум.

ABC-гипотеза: от эксперимента к теории

ABC-гипотеза: от эксперимента к теории | 3

1 Введение

ABC-гипотеза в теории чисел была сформулирована независимо математиками Дэвидом Массером в 1985 году и Джозефом Эстерле в 1988 году. (Далее по тексту: ABC-гипотеза). Формулировка Гипотезы заключается в следующем. Для любых положительных целых взаимнопростых чисел a, b, c, удовлетворяющих уравнению $a+b=c$, произведение радикалов чисел ABC обычно ненамного меньше, чем C. Это можно выразить более точно с помощью формул $max(a,b,c) < K_\epsilon Rad(abc)^{1+\epsilon}$, где K_ϵ зависит только от некоторого положительного действительного числа ϵ. Функция Rad - это радикал чисел a, b, c, равный произведению простых сомножителей, образующих эти числа, но возведенных в первую степень, например, $Rad(8) = Rad(2^3) = 2$, $Rad(1000000) = Rad(2^6 * 5^6) = 30$.

Эквивалентная формулировка ABC гипотезы включает в себя показатель качество тройки

$$q(a,b,c) = \frac{log(c)}{logRad(abc)} = \frac{ln(c)}{lnRad(abc)} \qquad (1.1)$$

которое определяется следующим образом: для $\forall$ положительного действительного числа ϵ $\exists$ только конечное число троек a, b, c из взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению $a + b = c$, таких, что $q(a,b,c) > 1 + \epsilon$.

Выдающиеся математики западного мира потратили много сотен страниц на поиск доказательств, и процесс поиска доказательств продолжается.

2 Ключевая идея доказательства

Давайте рассмотрим пример производства партии заводской продукции, например шкафа купе, где ширина каждой двери соответственно: $A + B = C$ сантиметров

1 Введение 125
2 Ключевая идея доказательства . . 125
3 S и конечномерная редуцированная матрица 130
3.1 $\hat{\rho}$ - матрица плотности и S фон Неймана 131
4 Линейные пространства 140
5 ABC-гипотеза. Нет квантовых корреляций 148
6 Оценка дефекта тройки 151
7 Флуктуации 155
8 Теорема Чебышёва 164
9 ABC@home проект и дискретность фазового пространства 175
10 С позиции школьной термодинамики 179
11 Аналогии из систем ЛДУ 182

Замечание 2.1 Обратите внимание прописные символы здесь обозначают случайные величины.

Это эталонное значение, но на практике возможны как систематические, так и случайные ошибки. Допустим, благодаря менеджменту качества продукции систематические ошибки устранены, но остаются неизбежные случайные погрешности за счет неконтролируемых факторов.

Научный поиск

ABC-гипотеза в теории чисел была сформулирована независимо математиками Дэвидом Массером в 1985 году [MC85] и Джозефом Эстерле в 1988 году.

[MC85]: Masser и др. (1985), «Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory»

Предположим, что закон распределения ширины каждой двери - независимых случайных величин имеет одинаковое стандартное отклонение σ, а их математические ожидания соответственно равны $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ Из основ математической статистики ([Худ70]) мы знаем, что погрешность измерения в последней формуле равна: $\sim \frac{\sqrt{{\sigma_A}^2+{\sigma_B}^2+{\sigma_C}^2}}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{N}}$, где N - количество партий продукции, использованных в эксперименте - это размер выборки.

[Худ70]: Худсон (1970), Статистика для физиков

От этого простого примера мы можем перейти к доказательству ABC-гипотезы. Для этого необходимо применить основы теории арифметики, перейти к простым целочисленным многочленам и линейным отображениям, жордановым матрицам и квантовой механике.

Рис. 2.1: ABC-гипотеза в теории чисел была сформулирована независимо математиками Дэвидом Массером в 1985 году и Джозефом Эстерле в 1988 году

Алгебры всего вышеперечисленного находятся в отношениях гомоморфизма. Одни и те же простые числа, взятые из цепочки $Rad(abc)$, играют роль корней целочисленного многочлена, характеристического многочлена матрицы линейного отображения, корневых векторов линейного пространства, разложенных на прямую сумму инвариантных подпространств, и собственных значений для матрицы линейного отображения, гамильтиана оператора квантовой системы.

Сосредоточимся на собственных значениях или корнях и убедимся, что среднее значение логарифма матриц, т.е

среднего значение суммы элементов на главной диагонали, от так называемого следа матрицы, не изменяется даже в случае появления кратных корней из той же цепочки простых чисел в первой степени $lnRad(abc)$ при условии адиабатического процесса в исследуемой системе. Если последнюю формулу разделить на число элементов на главной диагонали то получится энтропия исследуемой системы S. При адиабатических процессах энтропия системы сохраняется. Это простое утверждение является ключом к доказательству и практически не требует математических вычислений. Формула ABC-гипотезы подразумевает статистическое описание некоторой физической системы, состоящей из подсистем, выражающую аддитивное свойство общего ресурса для энергии, энтропии и др. термодинамических величин. Эти свойства обеспечивает разложение целых чисел a, b, c на простые.

Поскольку энтропия - такая же аддитивная величина, как и число частиц в изолированном сосуде, и обе величины являются так называемыми интегралами движения, легко вычислить относительное стандартное отклонение квадрата $\sim \frac{1}{\sqrt{S}}$, где S - энтропия частицы. исследуемой системы. Осталось вычислить L - число квантовых уровней в исследуемой системе, которое в нашей формуле 1.1 будет играет важную роль.

Для поиска доказательство ABC-гипотезы математическим методами необходимо использовать правила линейной алгебры, представления квантовой механики о волновой функции, операторную форму гамильтониана [Лан04], оценки энтропии [Куб07], Гл 10, 1.18] с помощью статистической матрицы [ЛЛ02] 9, с. 28-29 в квантово-механическом представлении. Стремительное развитие квантовых вычислений и криптографии способствует популяризации знаний о квантовой механике. Чтобы расширить кругозор школьника XXI века, было бы логично расширить программу средней школы основами квантовой механики, прибегая к аналогии с радиоволнами, спектрами сигналов. Много лет в школе на уроках химии изучается электронная конфигурация атома, расположение электронов в атоме по уровням и подуровням на основе общих представлений о квантовой механике.

Школьная программа включает в себя основы комбинаторики и теории вероятностей, движение маятника, урав-

[Лан04]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

[ЛЛ02]: Ландау и др. (2002), Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика

нения осциллятора, основы термодинамики, внутреннюю энергию, количество тепла, первый закон термодинамики, интерференцию волн, спектр сигналов [Хар62], резонансные явления, концепцию корпускулярно-волнового дуализма, фотоны, явление фотоэффекта, атомные орбитали и спин, принцип неопределенности Гейзенберга [Мес78], основы лабораторных измерений и их погрешности и так далее. - Этот обширный список понятий позволяет провести аналогию излагаемого материала со школьной программой.

[Хар62]: Харкевич (1962), Спектры и анализ

[Мес78]: Мессиа (1978), Квантовая механика. Том 1.

Рис. 2.2: Доказательство ABC conjecture ABC-гипотезы в пятьсот страниц занимает работа японского математика Шиничи Мочизуки (Shinichi Mochizuki), занимающегося теорией чисел и арифметической геометрией в университете Киото.

Важно сделать решающий шаг к статистической матрице системы в Гильбертовом пространстве, где размер матрицы бесконечен. При появлении нескольких корней вероятность обнаружения микрообъекта в заданном состоянии "размазывается" по главной диагонали статистической матрицы системы в соответствии со степенью корней (вырождением энергетического уровня). На практике оказывается, что вместо вычислений, связанных с бесконечной статистической матрицей достаточно сделать вычисления над иной, конечномерной редуцированной матрицей диагонального вида, на главной диагонали которой располагаются простые числа, как раз взятые из выражения $Rad(abc)$. Этот способ позволяет путем несложных арифметических расчётов вычислить энтропию исследуемой системы и её подсистем, а кроме того оценить так называемое качество тройки $q(a,b,c)$. В действительности, более подходящим термином будет дефект или флуктуация ограниченной сверху функцией с нормальным распределением (речь идёт об энтропии исследуемой системы). Далее можно применить теорему Чебышёва, как это подробнее будет рассказано ниже. В это и заключается главная идея доказательства.

Замечание 2.2 Знакомьтесь: труд Шиничи Мочизуки (Shinichi Mochizuki) - математик из университета Киото [Мос21]

[Мос21]: Mochizuki (2021), «Mochizuki's proof of ABC-conjecture»

500 страниц прочитали 10 чел. на Земле

Доказательство ВТФ в 120-1140 стр. страниц Эндрю Уайлса - это ещё не предел. Доказательство ABC conjecture ABC-гипотезы в пятьсот страниц занимает работа японского математика Шиничи Мочизуки

(Shinichi Mochizuki), занимающегося теорией чисел и арифметической геометрией в университете Киото.

Предложение 2.1 ($\{(a,b,c)\}$ счётно и ЧУМ) Утверждение состоит из двух частей:

Множество троек положительных целых чисел a, b, c, таких что $c = a + b$, является счётным множеством.

Если упорядочить его по возрастанию c, то получится частично упорядоченное множество.

Доказательство. Множество всех троек (a, b, c) положительных целых чисел, удовлетворяющих условию $c = a+b$, действительно является счётным. С позиции теоретико-множественного подхода множество таких троек можно представить как объединение по всем $c \geq 2$ конечных множеств троек с фиксированным c. Объединение счётного числа конечных (или счётных) множеств является счётным.

После сортировки троек по возрастанию c, введём отношение порядка $\preceq$, где $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2)$ тогда и только тогда, когда $c_1 \preceq c_2$, то полученная структура будет частично упорядоченным множеством.

Проверим аксиомы частичного порядка для этого отношения:

Рефлексивность: Для любой тройки (a, b, c) верно, что $c \preceq c$. Следовательно, $(a, b, c) \preceq (a, b, c)$.

Антисимметричность: Если $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2)$ и $(a_2, b_2, c_2) \preceq (a_1, b_1, c_1)$, то это означает, что $c_1 \preceq c_2$ и $c_2 \preceq c_1$, откуда $c_1 = c_2$. (Однако из равенства $c_1 = c_2$ не следует, что $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$).

Транзитивность: Если $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2)$ и $(a_2, b_2, c_2) \preceq (a_3, b_3, c_3)$, то $c_1 \preceq c_1$, то $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_3, b_3, c_3)$.

Вывод: Множество троек $\{(a, b, c)\}$, таких что $c = a + b$ счётно и при упорядочении по c оно образует частично упорядоченное множество (ЧУМ). □

Энтропия исследуемой системы рассчитывается по формуле как логарифма от статистического веса (от числа

доступных неэквивалентных конфигураций системы). Подробнее расчет энтропии произведён в следующем разделе.

3 S и конечномерная редуцированная матрица

В этом разделе будет дано определение энтропии с позиции термодинамики применительно к рассматриваемой модели. Выше по тексту анализировались бесконечномерные операторы в естественном базисе, в частности, статистический оператор (матрица плотности), заданный в терминах вероятностей и обратных величин простых чисел.

Предложение 3.1 Можно существенно упростить изложение, опираясь на нормировку в фактор-пространстве и применив теоремы Фредгольма I, II, согласно которым для указанной конечномерной редуцированной матрицы 6 (подгруппы кручения 2.1) существует изоморфная система алгебраических уравнений, где собственными значениями являются простые числа $p_\nu \leq n$ повторяющиеся на диагонали матрицы с учётом кратности вырождения 6.1. Эта конечномерная редуцированная матрица $\check{D}(n)$ будет детальнее рассмотрена ниже.

Энтропия определяется как среднее (обозначаемое $\langle\rangle$) значение логарифма статистического веса $\Delta\Gamma$. Ниже приводится формула как для квантовых состояний через распределение вероятностей по энергии $w(E_i)$, так и в квазиклассическом подходе через ρ - плотность вероятности:

$$\begin{gathered} S = -\langle \ln w(E_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) \\ S = -\left\langle \ln\left[(2\pi\hbar)^s \rho\right] \right\rangle = -\int \rho \cdot \ln\left[(2\pi\hbar)^s \rho\right] dp, dq \end{gathered} \tag{3.1}$$

Определённая таким образом энтропия (для квазиклассического случая — нижняя формула), как и сама статистическая вес, является безразмерной [ЛЛ76]. Наличие постоянной Планка $\hbar$ в последней формуле принципиально для определения энтропии в классической статистике.

[ЛЛ76]: Ландау и др. (1976), Теоретическая физика. Том. 5. Статистическая физика. Часть 1

Введение $\hbar$ делает энтропию в классическом случае независимой от выбора единиц измерения.

Возвращаясь к модели, описанной в Главе 6 и естественному базису 5.12, а также следствию из него 4.1, пренебрегая малыми величинами 7.6, считаем $S = \ln \Delta\Gamma$.

В этой модели статистический оператор ρ представляет собой конечную диагональную матрицу, состоящих из простых чисел p_i на главной диагонали с учетом кратности их повторения. Применим дискретное распределение с нормировкой по полной группе несовместных событий [Гму23], [Худ70].

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

[Худ70]: Худсон (1970), Статистика для физиков

3.1 $\hat{\rho}$ - матрица плотности и S фон Неймана

Определение 3.1 (Конечномерная редуцированная матрица) Вернёмся к диагональной матрице плотности 3.1, главная диагональ которой состоит из множества простых чисел. (В естественном базисе эта матрица соответствует ранее рассмотренной "идеальной дифракционная решётке".)

Хотя порядок следования не играет роли с позиции измерения наблюдаемой с помощью статической матрицы, не меняя общности будем считать их расположенными по возрастанию. В естественном базисе волновых функций каждое простое число p на указанной диагонали повторится с кратностью p:

$$\breve{D}(n) = \mathrm{diag}\left(\underbrace{2,2}_{2\text{ раза}}, \underbrace{3,3,3}_{3\text{ раза}}, \underbrace{5,5,5,5,5}_{5\text{ раз}}, \ldots \right) \tag{3.2}$$

где диагональные элементы содержат последовательный ряд простых чисел $2 \leq p \leq n$, каждое повторяется p раз. Повторение (отсутствие повторения) не влияет на вычисление среднего значения наблюдаемой 2.20 и учёмом применения статистического веса. Такая матрица будет определяться как конечномерная редуцированная матрица для множества простых чисел, не более n, и обозначаться с помощью $\breve{D}(n)$ - далее просто конечномерная матрица .

Рис. 3.3: Джон фон Нейман (1903-1957 при рождении — Янош Лайош Нейман) — венгеро-американский математик, физик и педагог. Внёс вклад в квантовую физику, квантовую логику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки.

В этом подразделе нам понадобится следующее правило взятия логарифма от матрицы.

Логарифм матрицы D вычисляется по правилу $\log(D) =:$

$$\begin{pmatrix} \log(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log(d_n) \end{pmatrix}.$$

Как взять логарифм от матрицы?

Логарифм матрицы D (обычно подразумевается натуральный логарифм, но может быть и по другому основанию) — это также диагональная матрица, полученная применением логарифма к каждому диагональному элементу Обоснование работы изложенного правила вытекает из алгебры матриц (см. в Приложении, Функции от матриц 11).

Матрица плотности $\hat{\rho}$ описывает как квантовую (суперпозиция), так и классическую (статистическая смесь) неопределённости.

Определение 3.2 Для ансамбля состояний $\{|\psi_i\rangle\}$ с вероятностями $\{w_i\}$, где $\sum_i w_i = 1$ и $w_i \geq 0$, статистический оператор определяется как:

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i \, |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$$

В матричном представлении в базисе $\{|n\rangle\}$:

$$\rho_{nm} = \langle n| \, \hat{\rho} \, |m\rangle = \sum_i w_i \, \langle n|\psi_i\rangle \langle\psi_i|m\rangle$$

$\hat{\rho}$ - это оператор (матрица), а не вектор (волновая функция).

Следствие 3.2 Свойства оператора $\hat{\rho}$:

1. Нормировка (условие единичного следа):

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i w_i = 1$$

2. Эрмитовость:

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

Следствие: собственные значения $\hat{\rho}$ вещественны.

3. Неотрицательность:

$$\langle\varphi| \, \hat{\rho} \, |\varphi\rangle \geq 0 \quad \forall |\varphi\rangle$$

Собственные значения $\hat{\rho}$ лежат в $[0, 1]$.

4. Среднее значение наблюдаемой $\hat{A}$:

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$$

5. Критерий чистого состояния:

$$\begin{aligned} \text{Чистое состояние:} \quad & \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \\ \text{Смешанное состояние:} \quad & \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1 \end{aligned}$$

Величина $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2)$ называется чистотой состояния.

(Полученное среднее значение наблюдаемой совпадает с результатом согласно формулам: 2.19 и 2.20.)

Определение 3.3 (Энтропия фон Неймана) Для описанной термодинамической системы D, состоящей из подсистем A, B, C, с факторизованной диагональной статистической матрицей ρ, энтропия фон Неймана определяется через выражение:

$$S = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \tag{3.3}$$

где:

Tr — операция взятия следа матрицы плотности (статистической матрицы) 3.2;
$\ln \hat{\rho}$ — матричный натуральный логарифм.

Энтропия фон Неймана — это ключевая величина в квантовой теории информации, обобщающая классическую энтропию Больцмана-Гиббса и Шеннона на квантовые системы. Она количественно характеризует неопределённость состояния квантовой системы или степень её “смешанности” (отклонения от чистого состояния).

Энтропия фон Неймана — квантовомеханический аналог классической энтропии Больцмана–Гиббса, обобщающий информационную энтропию Шеннона на квантовые системы.

Более последовательно возможность применения определения энтропии Фон Неймана к рассматриваемой модели раскрыта в Приложении 12.

Ниже будет использовано общепринятое определение энтропии Фон Немана.

Физический смысл

Энтропия фон Неймана количественно характеризует:

- степень «смешанности» квантового состояния (отклонение от чистого состояния);
- неопределённость состояния квантовой системы для наблюдателя;
- количество недоступной для получения информации о системе.

В результате применительно к рассматриваемой модели получится аналогичное данному в определении выше 3.1 выражение для энтропии.

Результат можно обобщить на произвольный случай, пользуясь $S = \ln \Delta\Gamma = \ln \left(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \right)$ свойством аддитивности энтропии:

$$S = \ln \Delta\Gamma = \sum_{i=1}^{k} g_i \log p_i \tag{3.4}$$

Злдесь p - простое число, а не вероятность!

Энтропия находится как усредненный логарифм по главной диагонали статистической матрицы плотности ρ в энергетическом представлении. Вычислим энтропию на следующем примере.

Пример 3.1 (Случай с вероятностью $w = \frac{1}{p}$) Рассмотрим статистическую матрицу на главной диагонали которой расположены собственные значения с равной вероятностью $w_i = \frac{1}{p}$, где p - некоторое простое число. Тогда число элементов на главной диагонали матрицы D 3.5 будет также равно p, что соответствует максимально смешанному состоянию (см. ниже). Условие нормировки: $w = \frac{1}{p} \quad \sum_{i=1}^{p} w_i = 1$ соблюдается. Вычислим среднее значение следа от логарифма матрицы оператора плотности $\hat{\rho}$ по правилу матричного логарифма 11:

$$S = \frac{1}{p} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \log p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log p \end{pmatrix} = \log p \tag{3.5}$$

При унитарных преобразованиях (физический смысл имеют лишь унитарные преобразование, сохраняющие нормы векторов и свойства эрмитовости операторов) след матрицы плотности не изменяется - энтропия фон Неймана инвариантна относительно выбора базиса: матрица плотности останется без изменений как в координатном, так в импульсном представлении.

В естественном базисе каждое квантовое состояние на основе p - простого числа повторяется p раз, даже без условия вырождения см. следствие 7.4. Вместе с тем в энергетическом преставлении состояния с разными характерами (фазовыми множителями $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$, где $\nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1$, аналогичным множителю в формуле дифракции 6.3, определяющем распределение интенсивности на экране) не различимы, поскольку определяются одним и тем же уровнем энергии. При вычислении среднего значение следа от логарифма матрицы $\hat{\rho}$ оператора плотности 3.5 достаточно учитывать $\log p$ один раз для состояния без учета алгебраической кратности (кратности вырождения по состояния с разными характерами) и g_i раз для $p_i^{g_i}$ состояния с учетом алгебраической кратности. Это будет соответствовать общепринятому определению энтропии фон Неймана.

Следствие 3.3 (Однократность p_iна главной диагонали $\log D(n)$) В естественном базисе см. 5.12 и 2 каждое квантовое состояние на основе p - простого числа повторяется p раз даже без условия вырождения см. следствие 7.4. Это является наглядной интерпретацией появления $\log p$ в выражении 3.5 p раз. На основе ортогональных векторов формировалась статистическая матрица с кратным в количестве p раз повторением $w_i = \frac{1}{p_i}$ в силу того, что волновые функции на основе разных характеров 6.1 ортогональны друг другу. После взятия матричного логарифма и усреднения ячейка статистической матрицы $p \times p$ преобразуется в блок 1×1 по формуле 3.5. Этот результат объясняется факторизацией 3: достаточно одного порождающего элемента группы на основе простого числа p для того, чтобы описать свойства всего смежного класса. В энергетическом представлении такой класс зависит только от энергии E_p. Разные характеристические сомножители

естественного базиса (разные фазы) не играют роли для расчета энтропии.

Говоря о биекции $p_i \mapsto e^{\beta E_i}$, можно также суммировать геометрическую прогрессию и установить аналогичное отношения биекции $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$

Длина диагонали ρ и размерность гильбертова пространства системы

Длина диагонали (число диагональных элементов) матрицы плотности равна размерности гильбертова пространства системы, т.е. количеству базисных состояний в выбранном представлении 8. Это число совпадает с числом энергетических уровней только в отсутствие вырождения. В общем случае оно равно сумме кратностей вырождения всех уровней.

Матрица плотности и её размерность Матрица плотности (статистический оператор) $\hat{\rho}$ описывает состояние системы в квантовой статистической физике. В выбранном ортонормированном базисе $\{|\psi_n\rangle\}$ её элементы равны

$$\rho_{ij} = \langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_j\rangle.$$

Если базис содержит N векторов, то $\hat{\rho}$ представляется матрицей $N \times N$. Следовательно, число диагональных элементов (“длина диагонали”) равно N.

Число N — это размерность гильбертова пространства системы, т.е. количество всех линейно независимых состояний, которые учитываются в рассматриваемом описании.

Число квантовых уровней Под “числом квантовых уровней” L обычно понимают количество различных собственных значений энергии E_k гамильтониана $\hat{H}$, т.е. число различных энергетических уровней.

Каждому собственному значению E_i может соответствовать несколько линейно независимых собственных состояний. Их число $g_i \geq 1$ называется кратностью вырождения уровня E_i.

Если в качестве базиса выбрать собственные состояния гамильтониана (энергетический базис), то количество базисных векторов N будет равно сумме кратностей вырождения всех уровней:

$$N = \sum_{i=1}^{k} g_i.$$

Таким образом, размерность гильбертова пространства (длина диагонали матрицы плотности) N связана с числом уровней L через вырождение.

- Если вырождения нет ($g_i = 1$ для всех i), то $N = L$.
- Если вырождение есть (хотя бы для одного уровня $g_i > 1$), то $N > L$.

Длина диагонали ρ и размерность гильбертова пространства системы

Пример 3.2 (Электрон в основном состоянии атома водорода) Рассмотрим спиновые степени свободы электрона в основном состоянии ($n = 1$).

- Энергетический уровень один ($L = 1$), так как состояние $1s$ имеет определённую энергию.
- Однако этот уровень вырожден по спину: есть два состояния с проекциями $s_z = +\hbar/2$ и $-\hbar/2$. Следовательно, кратность вырождения $g = 2$, а размерность гильбертова пространства для спинового описания $N = 2$.
- Матрица плотности, описывающая спиновое состояние, имеет размер 2×2. Длина её диагонали равна 2, что не равно числу уровней (которое равно 1).

Физический смысл различия Диагональные элементы матрицы плотности в энергетическом базисе ρ_{nn} дают вероятности обнаружения системы в конкретном квантовом состоянии $|n\rangle$. Недиагональные элементы ρ_{nm} ($n \neq m$) описывают когерентности (квантовые интерференции) между состояниями.

- Если состояния $|n\rangle$ и $|m\rangle$ принадлежат разным энергетическим уровням, когерентности между ними, как правило, быстро осциллируют и могут усредняться до нуля.
- Если же они принадлежат одному вырожденному уровню ($E_n = E_m$), то когерентности могут сохраняться долго. Это принципиально важно, например, в квантовой информации для хранения кубита в вырожденном подпространстве.

Квантовая физика в формулах арифметики

Определение 3.4 (Число подсистем k. Число квантовых уровней L. Индекс i, переменные g_i, p_i) Ниже будет использоваться k - число подсистем в составе исследуемой системе, равное числу простых чисел; переменные g_i, p_i взяты из формулы 3.6. Как будет показано ниже $L = \sum_{i=1}^{k} g_i$ - число квантовых уровней исследуемой системы, равное числу простых чисел p_i с учетом их степени кратности g_i появления на главной диагонали конечномерной матрицы $\tilde{D}$, точное определение которой сделано несколькими абзацами ниже 3.1.

С позиции школьных знаний для поиска доказательства ABC-гипотезы особенный интерес представляют законы термодинамики. Ниже по тексту общими ресурсами являются: фазовое пространство, статистический вес, энтропия, число частиц, энергия, объем сосуда. Предполагается нахождение исследуемой системы с термодинамическом равновесии и равенство температуры вол всех частых исследуемой системы, её подсистем. Этому условию соответствует широкий класс физических явлений без существенных ограничений.

[AP87]: Аэрленд и др. (1987), Классическое введение в современную теорию чисел

Согласно основной теореме арифметики [AP87] каждое из тройки чисел в выражении $a + b = c$ может быть разложено на простые сомножители, допускаются степени выше единицы, но по условиям ABC-гипотезы, повторяющиеся сомножители в этом разложении исключаются в силу отсутствия общих делителей:

$$a + b = c$$

равносильно:

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k} * 1^{n-t} + b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \cdots b_l^{\beta_l} * 1^{n-u} = c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \cdots c_m^{\gamma_m} * 1^{n-v}$$

$$\prod_{i \in A} p_i^{g_i} + \prod_{i \in B} p_i^{g_i} = \prod_{i \in C} p_i^{g_i}$$

где $A = \{a_1, a_2 \dots a_x\}$

$B = \{b_1, b_2 \dots b_y\}$

$C = \{c_1, c_2 \dots c_z\}$

$$\forall p_i^{g_i} \in \mathbb{P} \quad \text{если} \quad p_i^{g_i} | (abc), \text{то } p_i \in A \cup B \cup C \tag{3.6}$$

Все сомножители с нижними индексами являются простыми числами, $\alpha_1 + \cdots \alpha_k = t, \beta_1 + \cdots \beta_l = u, \gamma_1 + \cdots \gamma_m = v$ и $n = max(t, u, v)$

Здесь знак | означает деление, $\mathbb{P}$ - множество простых чисел. Индекс i - счетчик, пробегающий по ряду простых

чисел верхней строки формулы. При этом различаются следующие (под)домены (области определения индекса): $i \in A, i \in B, i \in C$ а также $i \in ABC$ соответственно, что позволяет записать выражение в унифицированной форме во второй строке формулы, используя сквозные переменные p_i и показатели степени g_i.

Для соблюдения правил размерности элементов в пространстве целых чисел, определяемом как n-кратное Декартово произведение оси целых чисел $Z^n = Z * Z * ... * Z$, каждое слагаемое в формуле выше умножается также на сомножитель в виде 1^{n-t} элементарного единичного куба с той целью, чтобы каждое слагаемое имело размерность, равную размерности евклидова пространства n, в которое вложены исследуемые многообразия разных размерностей. (От аналогии с конструктором Lego можно попробовать перейти к аксиомам топологии ([МУ73], [Тре01] и постулатам Евклида.) В Главе, посвященной Великой теореме Ферма 4, будет в полной мере продемонстрирован инженерный подход, основанный на симметрии.

[МУ73]: Милнор и др. (1973), Дифференциальная топология

[Тре01]: Трельфалль (2001), Топология. Зейферт Г Трельфалль В

Какому физическому явлению может соответствовать формула 3.6? Она моделирует изолированную термодинамическую систему, состоящую из подсистем, между которыми отсутствуют связи, но определенным образом поделён общий ресурс как на Рис. 3.4 на полях.

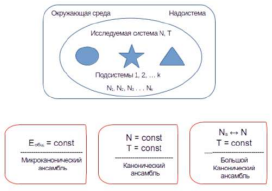


Рис. 3.4: Исследуемая (термодинамическая) система - выделенная для наблюдения часть Вселенной, состоящая из подсистем с заданным числом частиц, энергией и температурой.

Определение 3.5 Определим диагональную (под)матрицу D главная диагональ которой состоит лишь из некоторых простых чисел, взятых из конечной матрицы $\breve{D}(n)$, входящих в выражение $Rad(abc)$. Важно условие: каждое простое число в подматрице D, за исключением случаев вырождения, встречается лишь один раз 3.3.

Теперь представим себе адиабатическое сжатие исследуемой системе, при котором сохраняется фазовый объём, но происходит возбуждение энергетических уровней, что приводит к появлению кратных собственных значений энергии - т.е. кратных корней. Такую матрицу будем обозначать как .

Матрица $\tilde{D}$ позволяет легко рассчитать энтропию фон Неймана S, а структура её диагонали согласуется с формулой 3.6.

Подробнее адиабатический процесс будет рассмотрен ниже.

Числа A B C и квантовая механика

Можно сопоставить линейным отображениям $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ квантово-механическую систему. Перейдем от евклидова пространство к гильбертову. Гильбертово пространство, изученное в первом десятилетии 20-го века Дэвидом Гильбертом, Эрхардом Шмидтом и Фриджесом Рисом в рамках теорий дифференциальных уравнений в частных производных и квантовой механики, может быть объяснено школьникам с позиции основ радиофизики, уравнений, описывающий распространение электромагнитной волны, явление интерференции.

4 Линейные пространства

При адиабатических процессах энтропия системы сохраняется. Это простое утверждение является ключом к доказательству и практически не требует математических вычислений. Формула (3.6) подразумевает статистическое описание некоторой физической системы, состоящей из подсистем, выражающую аддитивное свойство общего ресурса для энергии, энтропии и др. термодинамических величин. Эти свойства обеспечивает разложение целых чисел a, b, c на простые. Из вводного курса алгебраической теории чисел известно, что правила арифметики в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ имеют структурные аналоги в кольце многочленов $k[x]$ над полем k (в частности, над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$).

Многочлены с целыми коэффициентами или коэффициентами в поле обладают свойствами, аналогичными свойствам целых чисел: существование алгоритма деления с остатком, понятие наибольшего общего делителя, единственность разложения на неприводимые множители (в случае факториальных колец).

Существует канонический гомоморфизм колец между кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и кольцом многочленов $\mathbb{Z}[x]$, который естественно продолжается до гомоморфизма между соответствующими алгебрами относительно операций сложения и умножения.

Алгебра целых чисел и алгебра многочленов

Ранее была найдена связь группы вычетов Z_n^+ с термодинамической системой см. в Главе 6. Ниже термины простой и неприводимый, применительно к многочленам, будут употребляться в качестве синонимов. Пусть $f \to k[x]$, тогда существует однозначное разложение:

$$f = c \prod_p p^{m(p)}, \tag{4.1}$$

где c - константа и произведение берется по неприводимым многочленам вида $(\lambda - a_i)^{g_i}$. Степени и константа определяются однозначно.

$$\begin{gathered}(\lambda - a_1)^{\alpha_1}(\lambda - a_2)^{\alpha_2} \cdots (\lambda - a_k)^{\alpha_k} q_1(\lambda) \\ + (\lambda - b_1)^{\beta_1}(\lambda - b_2)^{\beta_2} \cdots (\lambda - b_l)^{\beta_l} q_2(\lambda) \\ + (\lambda - c_1)^{\gamma_1}(\lambda - c_2)^{\gamma_2} \cdots (\lambda - c_m)^{\gamma_m} q_3(\lambda) = 1 \\ \forall a_i, b_i, c_i \text{ соответствуют литерам в } (3.6) \\ \text{и могут быть обозначены как } p_i \end{gathered} \tag{4.2}$$

В формуле выше записаны целочисленные многочлены, на основе неприводимых, они также являются взаимно простыми [МП22], что краткое выражено в формуле выше: существуют многочлены q_1, q_2, q_3, итоговая сумма формулы соответствует $gcd = 1$ (3.6). Для работы с целочисленными многочленами используется Алгоритм Евклида[Кур13], [АР87], как и для случая чисел [Вей72].

Каждому многочлену из приведенных выше можно однозначно сопоставить линейное отображение $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$) с характеристическим многочленом 4.2, корни которого взяты из формулы 3.6 - это будут как раз простые числа, входящие в $Rad(abc)$. Если линейное преобразование размерности n имеет n независимых собственных векторов, то принимая эти векторы в качестве базисных, можно привести квадратную матрицу линейного преобразования к диагональному виду, при этом собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, будут линейно независимы и ортогональны. Для случая кратных корней имеем:

[МП22]: Манин и др. (2022), Введение в современную теорию чисел

[Кур13]: Курош (2013), Курс высшей алгебры

[АР87]: Аэрленд и др. (1987), Классическое введение в современную теорию чисел

[Вей72]: Вейль (1972), Основы теории чисел

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathcal{A})^{\alpha} \mathbf{x} = 0 \tag{4.3}$$

путем элементарных преобразований матрицу линейного отображения можно привести в общем случае к жордановой форме размером $\alpha \times \alpha$ соответствующей кратности α (высоте) корневого вектора [Мыш72], [SM02].

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика. Специальные курсы

[SM02]: Szidarovszky и др. (2002), Introduction to Matrix Theory: With Applications to Business and Economics

Предложение 4.1 Для симметричных матриц, как например статистической 3.2, верна спектральная теорема для эрмитовых матриц 3. Такие матрицы приводятся с помощью унитарного преобразования к диагональному виду. Более того, существует ортонормированный базис из их собственных векторов. Собственные значения - вещественные числа.

Вернёмся к расширенной матрице $\check{D}(n)$ 3.1 и определённой на её основе диагональной подматрице D.

Матрице $\tilde{D}$ можно сопоставить линейное отображение на себя в $\mathbb{R}^n$ в некотором базисе из собственных векторов, при этом характеристический многочлен такого отображения будет являться произведением характеристических многочленов линейных отображений из формулы 3.6. Матрица $\tilde{D}$, соответствующая этому объеденному линейному отображению, будет иметь диагональный вид:

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Собственные значения матрицы $\tilde{D}$ — это результат объединения собственных значений матриц $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. В результате достигается однозначное разложение пространства R на прямую сумму инвариантных подпространств (порядок их следования не играет роли):

$$R = R_1 \bigoplus R_2 \bigoplus R_3 \bigoplus R_4 \bigoplus R_5 \cdots \bigoplus R_k \tag{4.5}$$

Множество всех корневых векторов, соответствующих собственному значению p_i, образует инвариантное подпространство R_i. На главной диагонали $\widetilde{D}$ расположены собственные значения, являющиеся простыми числами p_i. Каждое повторяется на диагонали с учётом алгебраической кратности корня g_i.

Приравняем нулю детерминант матрицы $det\widetilde{D}$ (тильда обозначает наличие кратных корней в характеристическом многочлене) для поиска собственных значений и векторов:

$$Det\,\widetilde{D} = \prod_{i=1}^{k} \left(\lambda - p_i\right)^{g_i} = 0 \tag{4.6}$$

где:

- k - число подсистем в составе исследуемой системе, равное числу простых чисел в формуле $Rad(abc)$;
- Индекс i - счётчик, пробегающий по главной диагонали матрицы $\tilde{D}$;
- p_i — это собственное/корневое значение линейного отображения $\widetilde{\mathfrak{D}}$ и соответственно матрицы $\widetilde{D}$;
- Через $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots p_k$ обозначены собственные значения матрицы, равные корням многочлена (4.2) и представляющие собой множество простых чисел из (3.6). Все эти собственные значения различны и не равны нулю по условиям ABC-гипотезы.
- g_i - алгебраическая кратность соответствующего корня p_i

Теперь важно применить функцию логарифма и произвести усреднение по главной диагонали матрицы.

Из алгебраической теории матриц [Кур13], [Мал56] известно, что над λ- матрицами можно совершать элементарные преобразования, создавая тем самым подобные матрицы, но при этом остаются постоянными след матрицы т.е. сумма его элементов, расположенных на главной диагонали, и детерминант det - обе величины не зависят от базиса и являются инвариантными.

[Кур13]: Курош (2013), Курс высшей алгебры

[Мал56]: Мальцев (1956), Основы линейной алгебры

Определение 4.1 Известно, что детерминант матрицы равен произведению собственных значений, в чём не трудно убедиться, подсчитывая определитель диагональной матрицы непосредственно ”в лоб”.

В нашем случае с позиции термодинамики $detD$ соответствует статистическому весу в невозбуждённом состоянии термодинамической системы $\Gamma_D = Rad(abc) = detD$ с невозбужденными энергетическими уровнями .

Поскольку мы рассматриваем квадратные матрицы и в силу свойства коммутируемости матрицы с собой, в ряде случаев, включая исследуемый, можно возводить λ- матрицу в степень, совершать над ней алгебраические операции, вычислять многочлены от матриц.

По общему правилу гомоморфизма можно выбрать наиболее простую для понимания алгебру. (Гомоморфизм в категории алгебраических систем это отображение алгебраической системы A в B, сохраняющее основные операции и основные отношения.)

Сравните данный подход, применительно к приведенным статистическим суммам $\tilde{Z}$, изложенный в разделе Гл. 2 5.1.

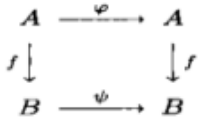


Рис. 4.5: Общее правило гомоморфизма над алгебрами. $A =< A, \phi > B =< B, \psi >, f : A \to B$)

В результате легко вычислить энтропию $S = \ln \Delta\Gamma$, путем усреднения по всем микроканоническим состояниям. Важно принимать во внимание условие нормировки - сумма по всем вероятностям состояний исследуемой системы, образует полную группу событий. Здесь вероятность выражена значением на диагонали статистической матрицы 3.2, однозначно связанного с энергией микросостояния, суммирование производится по всем возможным микросостояниям и на главной диагонали матрицы $\widetilde{D}$, расположены ненулевые значения.

Напомним, что полное число квантовых состояний исследуемой системы определяется как $L = \sum_{i \in ABC} g_i$ 3.1 и равно длине главной диагонали матрицы D.

Начальное значение энтропии $S_D = \ln Rad(abc)$ и равно усредненному значению от следа матрицы D. Пусть в момент времени t_1 включается вырождение энергетических уровней, что на языке алгебры матриц означает появление кратных собственных значений — корневых векторов (4.3). Это можно реализовать путем "включения" в характеристическом многочлене, степеней больших, чем единица за счет умножения на диагональную матрицу с элементом вида $x_{i,i}$ на диагонали $(1 \le i \le L)$ равному следующему выражению:

$$x_{i,i} = (\lambda - p_i)^{1+\sigma(t-t_1)(g_i-1)} \tag{4.7}$$

Далее остаётся взять от полученной матрицы логарифм. Поясним значение переменных:

- p_i — все простые числа — сомножители из ряда чисел $Rad(abc)$, они же являются собственными значениями линейного отображения / матрицы;
- Индекс i - счётчик, пробегающий по главной диагонали матрицы $\tilde{D}$;
- g_i- это показатель степени из формулы (4.2), умноженный на p_i в силу свойства естественного базиса

7.4, что представляет в результате кратность корня и определяет размер соответствующего сегмента на главной диагонали $\tilde{D}$;

- σ — сигмоидальная функция активации или просто сигмоида $\sigma(t)$ она может быть приближена по формуле $\frac{1}{1+e^{-\nu(t-t_1)}}$, где параметр ν задается извне и регулирует плавность изменения, чем больше значение ν, тем круче «ступенька» в момент времени t_1. Эта функция здесь определена на действительной оси $\mathbb{R}$

Выше после формулы (4.5) был сделан вывод о возможности разложении линейного пространства в прямую сумму подпространств, что означает приведение матрицы к жордановой форме, в рассматриваемой модели - к диагональной форме. Для каждой клетки (сегмента главной диагонали) - свой уникальный корень p_i. В пределах каждой жордановой клетки (сегмента главной диагонали) сомножитель $e^{-\beta p_i}$ остается одним и тем же - реализуется поблочное сравнение матричных функций. Это значительно облегчает нахождение параметра β в условиях адиабатического процесса, через отношение дробей определителей, соответствующих линейным отображениям $\tilde{D}$ и D, поделенных на число квантовых состояний в конце и начале адиабатического процесса (это легко понять из 4.7). Из чего следует, что в ходе адиабатического процесса повышение температуры ($\beta = \frac{1}{T}$) приводит к появлению кратных корней в характеристическом полиноме 4.6, что находится в согласии с принципами термодинамики.

Замечание 4.1 С позиции школьной физики можно заметить, что при изучении идеальной машины Карно расчет К.П.Д. производится на основе величины $\frac{\delta Q}{T}$, которая является дифференциалом энтропии. Следовательно, формула (4.7), с учётом определения энтропии (3.1) оперирует с вероятностными величинами, что в свою очередь является чисто математическим понятием, исключает такую "нетрадиционную" для алгебры матриц величину как температура (последняя может быть определена для исследуемой системы из канонического определения Гиббса путем взятия частной производной энтропии по энергии).

При адиабатическом сжатии/расширении объем фазо-

вого пространства системы и усредненный матричный логарифм от него — энтропия остаются постоянными. Выше рассматривалась ситуация когда квазиклассическим является не всё движение системы, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым. Поскольку энтропия сохраняется во время адиабатического процесса, можно вернуть подсистему в исходное состояние.

С позиции школьного курса

Формулу (4.7), основанную на знаниях статистической физики, можно заменить уравнением адиабаты из школьного курса (10.1), ограничиваясь общим описанием вырожденных энергетических уровней и соответственно появлением кратных корней более единицы, что существенно упрощает понимание сути доказательства.

Адиабатическое сжатие

В процессе адиабатического сжатия системы D, вызывающего появление вырожденных энергетических уровней, существенно изменяется соотношение между энтропией системы и её подсистем по сравнению с начальным факторизованным состоянием. Рассмотрим основные эффекты.

1. Исходное состояние (до сжатия) Система факторизована:

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C$$

Энтропия аддитивна (энтропия фон Неймана для произведения состояний равна сумме энтропий):

$$S_D = S_A + S_B + S_C$$

Подсистемы статистически независимы: многопарная взаимная информация

$$I(A : B : C) = 0$$

2. Последствия адиабатического сжатия Адиабатичность означает отсутствие обмена теплом $\delta Q = 0$ с термостатом,

а изменение термодинамическо состояния исследуемой системы происходит за счёт работы внешних сил.

В обратимом адиабатическом процессе энтропия системы сохраняется $\Delta S_D = 0$. Однако появление вырожденных уровней энергии вносит принципиальные коррективы:

1. Изменение структуры матрицы плотности Вырождение в гамильтониане приводит к тому, что основное состояние системы не единственно. Система может оказаться в суперпозиции или смеси вырожденных состояний, что порождает квантовые корреляции (запутанность).
   Факторизация
   $$\rho_A = \mathrm{Tr}_{BC}(\rho), \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_{AC}(\rho), \quad \rho_C = \mathrm{Tr}_{AB}(\rho)$$
   нарушается: подсистемы становятся "запутанными" или квантово- коррелированными . Редуцированная матрица плотности $\rho_A = \mathrm{tr}_{BC}(\rho)$ перестаёт описывать чистое состояние, даже если исходное состояние ρ было чистым;
2. Энтропия подсистем S_A, S_B, S_C теперь вычисляются через редуцированные матрицы плотности:
   $$\rho_A = \mathrm{Tr}_{BC}(\rho), \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_{AC}(\rho), \quad \rho_C = \mathrm{Tr}_{AB}(\rho) \quad (4.8)$$
   Из-за корреляций возникает субаддитивность:
   $$S_A + S_B + S_C > S_D$$
   (Строгое неравенство: сумма энтропий подсистем превышает энтропию целой системы)
3. Возникает ненулевая многопарная взаимная информация (multipartite mutual information):
   $$I(A:B:C) = S_A + S_B + S_C - S_D > 0$$
   Она количественно характеризует полные корреляции (квантовые и классические) между подсистемами, возникшие из-за вырождения.

3. Важные соотношения для энтропии Энтропия системы S_D В обратимом адиабатическом процессе: $S_D = \mathrm{const}$. Её величина не меняется, но структура меняется: теперь $S_{\tilde{D}}$ может в общем случае учитывать и корреляции. Энтропии подсистем S_A, S_B, S_C возрастают, поскольку

редуцированные матрицы плотности описывают смешанные состояния из-за запутанности с остальными частями системы.

Корреляции:

Разность $(S_A + S_B + S_C) - S_D = I(A : B : C)$ равна взаимной информации, которая отражает как квантовую запутанность, так и классические корреляции между подсистемами.

4. Физическая интерпретация Вырождение уровней при сжатии создает ”альтернативные пути” перехода между состояниями, что увеличивает неопределенность в описании отдельных подсистем (увеличивая S_A, S_B, S_C) и сохраняет общую энтропию на уровне $S_{\tilde{D}}$ из-за появления корреляций.

Система может перейти из состояния независимых подсистем в ”запутанное” состояние (с ненулевой взаимной информацией).

Следствие 4.2 (Вывод:) При адиабатическом сжатии с вырождением уровней: $S_{\tilde{D}}$ остаётся постоянной (обратимый процесс); $(S_A + S_B + S_C)$ возрастает; разница между ними даёт меру корреляций в системе.

5 ABC-гипотеза. Нет квантовых корреляций

Зададимся вопросом, существуют ли системы без квантовых и классических корреляций, например, смесь идеальных газов? Как в таком случае будет выглядеть соотношение для энтропии S подсистем A, B, C и объединяющей их исследуемой системы $S_{\tilde{D}}$? - Да, существуют системы без корреляций, например, смесь различных идеальных газов. В таких системах подсистемы не взаимодействуют друг с другом, и их состояния полностью независимы. Для такой системы соотношение энтропий подсистем и объединённой системы выглядит следующим образом:

$$S_{\tilde{D}} = S_A + S_B + S_C$$

где $S_{\tilde{D}}$ - это энтропия всей системы, а $S_A + S_B + S_C$ - энтропии подсистем A, B, C соответственно. Это соотношение отражает аддитивность энтропии для независимых подсистем.

Объяснение этого явления заключается в отсутствии взаимодействий и корреляций в исследуемой системе. Примером такой системы может быть смесь идеальных газов частицы, не взаимодействующих друг с другом. Зависимости состояний частиц от положения других частиц нет - отсутствие классических корреляций Квантовые корреляции (запутанность) также не возникают, поскольку система описывается классической статистикой другими словами, представляет собой некогерентную смесь.

Энтропия идеального газа: Энтропия идеального газа выражается через его макропараметры (температуру, объем, количество вещества). Например, для одного моля газа:

$$S = C_V \ln T + R \ln V + S_0 \tag{5.1}$$

C_V— молярная теплоемкость при постоянном объеме, R —чистого универсальная газовая постоянная, T — температура, V — объём, S_0 — начальная энтропия. Для смеси различных идеальных газов энтропия системы равна сумме энтропий отдельных газов (теорема Гиббса).

Аддитивность: Поскольку подсистемы не влияют друг на друга, их энтропии просто складываются. Это следует из статистического определения энтропии как логарифма числа микросостояний, соответствующих макросостоянию. Для независимых подсистем общее число микросостояний $\Delta\Gamma$ равно произведению чисел микросостояний каждой подсистемы Глава 1 2.17, а логарифм произведения равен сумме логарифмов.

Если система D состоит из трёх различных идеальных газов, то энтропия каждого газа рассчитывается по формуле для идеального газа.

Общая энтропия системы

$$S_{\tilde{D}} = S_A + S_B + S_C \tag{5.2}$$

равна сумме энтропий трёх идеальных газов.

Таким образом, отсутствие корреляций гарантирует, что энтропия системы просто складывается из энтропий её частей.

Замечание 5.1 (Важное замечание) это соотношение справедливо для различных идеальных газов. Для одного и того же идеального газа, разделенного на части, энтропия не будет строго аддитивной из-за неразличимости частиц (эффект Гиббса). В реальных системах всегда присутствуют какие-либо взаимодействия или корреляции, которые могут нарушать аддитивность энтропии.

По условиям ABC-гипотезы $A + B = C$, кроме того, $S_D = S_{\tilde{D}}$ в силу адиабатического процесса.

Простая модель системы

В ABC-гипотезе заложена простая модель (в смысле несложная) системы и входящих в неё подсистем, где отсутствуют квантовые корреляции (запутанность). Согласно Теореме о квантовой природе простых чисел 7 это равносильно отсутствию общих делителей. При этом число квантовых уровней L счётно. См. определение 3.4.

Третий закон термодинамики (теорема Нернста) утверждает, что изменение энтропии ΔS в любой обратимой изотермической реакции стремится к нулю по мере приближения температуры к абсолютному нулю: $\lim T \to 0 \Delta S = 0$.

Возвращаясь к формулировке гипотезы, которая гласит: "для $\forall$ положительного действительного числа ϵ $\exists$ только конечное число троек a, b, c из взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению $a + b = c$, таких, что $q(a, b, c) > 1 + \epsilon$", отметим, что с позиции рассматриваемой модели, основанной на статистической физике неравенство доказывается просто.

Доказательство неравенства. Энтропия - положительно определенная функция (минимальное значение энтропии 0 достигается при равенстве абсолютной температуры нулю), следовательно $S_D = S_{\tilde{D}} = S_A + S_B + S_C$ и $S_D > S_A, S_D > S_B, S_D > S_C$. В результате требуемое соотношение 1.1 доказано через верификацию, путём обращение к целому классу физических явлений. □

6 Оценка дефекта тройки

Из термодинамики и определения энтропии известно, что энтропия является аддитивной функцией. В силу адиабатического сжатия, сохраняющего энтропию $S_D = S_{\tilde{D}}$, и условий поставленного эксперимента получим:

$$\breve{q}(a,b,c) = \frac{\ln(c)}{\ln Rad(a) + \ln Rad(c-a) + \ln Rad(c)}$$

$$\approx \frac{S_C \cdot \sum\limits_{i \in C} g_i p_i}{(S_A + S_B + S_C) \cdot L} = \frac{S_C \cdot \sum\limits_{i \in C} g_i p_i}{S_D \cdot \sum\limits_{i \in ABC} g_i p_i} < 1 \quad (6.1)$$

где

Индекс i - счетчик, пробегающий по главной диагонали матрицы $\tilde{D}$. При этом различаются следующие (под)домены (области определения индекса): $i \in A$, $i \in B$, $i \in C$ а также $i \in ABC$ т.е. по всей диагонали матрицы $\tilde{D}$ 3.1)

В этой формуле вычисляется функция $\breve{q}(a,b,c)$, заданная на области положительных действительных чисел больше или равно двум $\mathbb{R} \geq 2$, совпадающая с исходным значением $q(a,b,c)$ на $\mathbb{Z}$.

Естественное продолжение

Когда у нас есть полиномиальная функция, изначально заданная на целых $\mathbb{Z}$ или рациональных $\mathbb{Q}$ числах, мы можем "автоматически" и однозначно применить её ко всем действительным числам $\mathbb{R}$ или даже комплексным $\mathbb{C}$. Это настолько естественный и единственно возможный процесс. Полиномиальная функция определяется своим алгебраическим выражением, в котором используются только операции сложения, вычитания и умножения (включая возведение в натуральную степень). Эти операции определены и прекрасно работают не только на целых или рациональных числах, но и на вещественных и комплексных.

Естественное продолжение.

Процесс настолько прямолинеен, что не требует:

- Дополнительных предположений.

- Изменения формулы.
- Какого-либо "предельного перехода" (в отличие от аналитического продолжения.

Формально, если у нас есть два полинома $P(x)$ и $Q(x)$, которые совпадают на всех целых или рациональных числах, то они тождественно равны и совпадают на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Это свойство плотности рациональных чисел в вещественных и единственности полинома.

После знака равенства в формуле 6.1 происходит переход к случайным (термодинамическим- статистическим) переменным. В числителе и знаменателе приведено значение энтропии исследуемой системы с учетом множителей из формулы 3.6, учитывающих число квантовых состояний исследуемой системы $L = \sum_{i \in ABC} g_i$ и энтропии подсистемы A, B, C в составе объединяющей надсистемы $D = A \cup B \cup C$ в условиях адиабатического процесса.

Напомним, что полное число квантовых состояний исследуемой системы определяется как $L = \sum_{i \in ABC} g_i p_i$ 3.1 и равно длине главной диагонали матрицы $\tilde{D}$, где каждое простое число повторяется с учетом кратности.

В Главе 4 будет доказана Великая теорема Ферма, из которой следует вывод о размерности $dim(A) \leq 2$. Будем считать независимой переменную a и сначала рассмотреть частный случай постоянства слагаемого c, изменяя лишь сомножители p_1, p_2. Здесь подразумевается, что $a = p_1 \cdot p_2$ либо $a = p^2$. Тогда можно заменить выражение в знаменателе $\ln(Rad(a)) + \ln(Rad(c-a))$ на $\ln(p) + \ln(c-p)$ либо соответственно на $\ln(p) + \ln(c-p^2)$ (все постоянные сомножители вынесены в качестве константы отдельно и не играют роли при взятии производной для нахождения экстремума).

Задача о нахождении экстремума функции $\breve{q}(a,b,c)$ при заданном c сводится к нахождению максимального и минимального значения знаменателя, где переменной частью является число p, при этом $c = Const$. => минимум $\breve{q}(a,b,c)$ достигается при $p = \frac{c}{2}$, для случая если $a = p_{1 \cdot 2}$ искомый минимум будет $p = \sqrt{\frac{c}{3}}$, что легко понять из симметричного вхождения переменной части выражения под знаком логарифма в знаменателе, анализируя функцию вида $y = x(c-x)$ либо соответственно $y = x(c-x^2)$.

Перейдём от частного случая к общему. Легко установить, что $\breve{q}(a,b,c)$ на расширенной области определения является непрерывной и дифференцируемой.

Работаем с тополого-алгебраическим телом

Если в некотором алгебраическом теле M имеется топология, т. е. имеется сходимость, иначе говоря, известно, что означает соотношение $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, а операции, имеющиеся в теле M , непрерывны в отношении этой топологии, то такое тело называется тополого-алгебраическим.

см. [Пон86]

[Пон86]: Понтрягин (1986), Обобщения чисел

Следовательно, можно вычислить производную и применить известную из школьной математики формулу Ньютона - Лейбница для верхней и нижней оценок значений непрерывной дифференцируемой функции на некотором интервале.

Линейный дифференциал для случая многих переменных

Задача о нахождении экстремума функции для случая многих переменных сводится отысканию градиента скалярной функции $\breve{q} : M \longrightarrow R$, определённой на тополого-алгебраическом теле $M = \left\{R^L | R \geq 2\right\}$ в L-мерном пространстве $grad\, \breve{q}$ - по количеству простых чисел формулы 3.6 - каждое простое число рассматривается как независимая случайная переменная (см. 7.4).

В упомянутом выше естественном базисе для волновой функции 5.12 каждое значение энергии, даже без учёта вырождения, встречается p раз, где p — простое число. Генерирующий статистическую сумму элемент $\frac{1}{p}$ для $\forall p$ может рассматриваться как случайная величина или вектор, ортогональный другим. 7.4

Частная производная по переменной p_j будет следующая:

$$\frac{\partial \breve{q}}{\partial p_i} = \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial p_i}\frac{1}{\ln Rad(abc)} - \frac{lnc}{(\ln Rad(abc))^2}\frac{\partial lnp_i}{\partial p_i} = \frac{g_i p_i}{p_i \ln Rad(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln Rad(abc))^2}\frac{1}{p_i} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \breve{q}}{\partial p_i} = \begin{cases} \frac{g_i - \breve{q}}{p_i \ln Rad(abc)} & \text{если} \quad i \in C \\ \frac{-\breve{q}}{p_i \ln Rad(abc)} & \text{если} \quad i \notin C \end{cases}$$

где

Индекс i - счетчик, пробегающий по главной диагонали матрицы $\tilde{D}$. При этом различаются следующие (под)домены (области определения индекса): $i \in A$, $i \in B$, $i \in C$ а также $i \in ABC$ соответственно обозначают

пробег индекса по всей диагонали матрицы $\tilde{D}$ 7.4)

Для вычисления частных производных заметим что:

$$\ln c = \sum_{i \in C} g_i \ln p_i \text{ и } lnRad(abc) = \sum_{i \in ABC} g_i \ln p_i.$$

$Rad(x)$ обычно определена для целых чисел. При обобщении на действительные числа предполагается, что $Rad(x)$ вычисляется как произведение простых делителей числителя x в его рациональном представлении (если x рациональное) или через аналог для действительных чисел (например, через факторизацию см. Приложение 13). Это позволяет сохранить смысл радикала в непрерывном случае.

По аналогии легко убедиться в существовании производной по показателям степеней g_i. Таким образом, функция $\breve{q}(p_1, p_2 \dots p_k, m_1, m_2 \dots m_k)$ является непрерывной и ограниченной на области определения. Как и в случае с полиномами, здесь предполагается естественное продолжение функции на область действительных чисел, где g_i, p_i рассматриваются как непрерывные переменные. Это позволяет вычислять градиент:

$$\nabla \breve{q} = \left(\frac{\partial \breve{q}}{\partial m_1}, \dots, \frac{\partial \breve{q}}{\partial m_k}, \frac{\partial \breve{q}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \breve{q}}{\partial p_k} \right) \tag{6.3}$$

В результате формула Ньютона - Лейбница обобщается на случай многих переменных с учётом скалярного произведения $(grad\breve{q}, \Delta x)$ в L -мерном пространстве - это число элементов на главной диагонали матрицы $\tilde{D}$ исследуемой системы с учётом кратности 3.4. При этом каждое простое число рассматривается как независимая случайная величина, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots)$.

Ограниченность модели: Неучет условия $c = a + b$ Но любой условный экстремум является и безусловным экстремумом функции Лагранжа. Целочисленность: В исходной задаче a, b, c — целые числа, что не учитывается в непрерывной модели. Это может приводить к нефизическим экстремумам. Но эти ограниченияя не влияют на следствие

Следствие 6.1 (Следствие: градиент функции $\Delta\breve{q}$ и ΔS) Из анализа выражений 6.1 и 6.2 Следствие: градиент функции $grad(\breve{q})$ на всей области определения $\exists$, не обращается в бесконечность и приращение $\Delta\breve{q}$ может быть ограничено сверху и снизу некоторыми "удобными" для работы функциями. Именно поэтому для оценки максимального отклонения выбрана верхняя ограничивающая функция (мажоранта) в виде энтропии S. Как будет показано ниже энтропия является аддитив-

ной функцией, а её флуктуация ΔS, имеет нормальное распределение.

Из математической статистики известно правило сложения дисперсии независимых случайных величин. Поэтому итоговый вывод неравенства $\breve{q}(a,b,c) < 1$ приведенного выражения опирается в равной мере как на статистическую физику, так и математическую статистику. Полученное неравенство является строгим исходя из вида дроби. Знак приближения в формуле (6.1) тем точнее, чем больше значение энтропии.

Замечание 6.1 Обращение к случайным переменным A, B, C, D и статистической физике / математической статистике помогло в получении верней оценки $\breve{q}(a,b,c)$ и соответственно $q(a,b,c)$ - она, как правило, не должна превышать единицу.

Тем не менее в ходе численных экспериментов [ABC23] найден ряд максимальных значений $q(a,b,c)$ свыше единицы. Как объяснить этот парадокс? - Автор убежден, что это явление обусловлено флуктуациями, как это объясняется ниже, в разделе (см. раздел 7), специально посвященной этому явлению.

[ABC23]: ABChome (2023), Volunteer network called ABChome dedicated to distributed computing project

7 Флуктуации

Для $\forall$ формулы (3.6) существует целый класс физических подсистем: идеальные газы, растворы, колебания кристаллической решетки с квазичастицами — фононами, и так далее, где реализуются изложенные выше подходы, и ABC-гипотеза тривиально доказывается с позиции взгляда наблюдателя из микромира.

Чему соответствует показатель качества тройки q или отклонения от изложенных принципов? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к полной системе, включающей исследуемую подсистему и флуктуации.

С учетом рассуждений выше и формулы следует найти подходящую интерпретацию показателю качество тройки $q(a,b,c)$, ограниченным непрерывной дифференцируемой функцией $\breve{q}$ вычисляемой с помощью уравнений термодинамики 6.1, и тем точнее, чем больше статистика наблюдений.

Энтропия подвержена флуктуации любой микрообъект флуктуирует по формуле которая определяется нормальным распределением Гаусса. Простое число связано с энергией (материальным объектом) соотношением $p \mapsto e^{\beta E_p}$ 4.1 Поэтому большое каноническое распределение Гиббса, допускающее флуктуацию как по энергии, так и по количеству частиц в выделенном объёме, применимо к рассматриваемой модели.

Поскольку множество простых чисел счётно, вместо натуральных чисел можно использовать бесконечную последовательность простых чисел $p \mapsto e^{\beta E_p}$, нумеруя энергетические уровни - собственные числа и соответствующие им волновые функции простыми числами и ψ_p.

Это означает, что порождающий элемент p (его обратная величина) может произвольно возникнуть / исчезнуть на главной диагонали конечномерной матрицы $\breve{D}(n)$ и её подматрицы $\tilde{D}$. Каждое простое число p_i является образующим элементом для одной из циклических компонент в свободной части группы 2.2, изоморфной бесконечномерной статистической матрице. Энтропия 3.4 также подвержена флуктуациям, в результате которых показатель качества тройки q превысит единицу.

(В термодинамике оперируют числом молекул, порядка числу/постоянной Авогадро - числа частиц, содержащихся в одном моле любого вещества $6.022\dot{1}0^{23}$). Большинство известных примеров отыскания троек чисел с использованием суперкомпьютеров и распределенных вычислительных сетей т. н. «хороших троек» [ABC23] с $q > 1$ превышающих единицу ($q(a,b,c) \sim 1.4$), но эти больше спортивные, чем научные рекорды составляют порядка одной десяти тысячной от постоянной Авогадро.

[ABC23]: ABChome (2023), Volunteer network called ABC-home dedicated to distributed computing project

В приложении 7.3 приведена формула для вычисления среднего $\overline{f}$ с помощью полного набора взаимно ортогональных нормированных функций. Смешанное состояние представляет собой статистический ансамбль различных чистых состояний, каждое из которых возникает с определённой вероятностью. Такое состояние не может быть описано одним вектором состояния. Вместо этого оно описывается матрицей плотности, которая представляет собой взвешенную сумму матриц плотности чистых состояний ансамбля $\Delta\Gamma = n = (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k})$.

Закон Больших Чисел заключается в том, что среднее арифметическое результатов большого количества испытаний стремится к теоретическому среднему значению (математическому ожиданию).

Целесообразнее заменить слово «качество» для $q(a,b,c)$ соответственно определенной нами функции $\breve{q}$ на общепринятое в теории ошибок "дефект" по формуле флуктуации от среднего значения исследуемой системы, объединяющей подсистемы $A, B, \overline{C}$. Согласно 6.1 показатель дефекта исследуемой системы удовлетворяет неравенству

q_{ABC} $\breve{q} < q_{ABC} = \frac{\Delta S}{S}$. Энтропия, как ограничивающая сверху функция имеет нормальное распределение. Это следует из закона больших чисел, а также свойства аддитивности энтропии.

Для изолированной подсистемы не уместна сама постановка о флуктуации энергии, энтропии, температуры, числа частиц и других термодинамических параметров - говорить о флуктуации можно лишь рассматривая систему в целом. Пусть определена равновесная энтропия тела $S(E, V)$, как функция его (средних) энергии и объема. Будем понимать под флуктуацией энтропии изменение функции $S(E, V)$, рассматриваемой формально, как функция от точных (флуктуирующих) значений энергии и объема.

Важно помнить, что статистическое усреднение полностью эквивалентно усреднению по времени:

$$\bar{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t)\, dt \tag{7.1}$$

Полученное значение эквивалентно определению среднего значения оператора A, совпадающему со средним значением наблюдаемой A - см. Главу ζ-функция 2.20, 2.19, а также свойства оператора $\hat{\rho}$ 3.2.

Для начала найдем средний квадрат флуктуации числа частиц обычного идеального газа, находящихся в некотором выделенном в газе относительно малом объеме. Исходя из равномерного распределения молекул газа по всему объему V_0 и условий о малости исследуемой подсистемы в сравнении со всей системой $\frac{V}{V_0} \ll 1$ квадрат флуктуации числа частиц в подсистеме (точек в многообразии фазового пространства 1^n) определяется по формулам [ЛЛ02] формула 113.1:

$$\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = N; \ldots \frac{(\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle)^{1/2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{7.2}$$

Относительная флуктуация числа частиц равна обратному квадратному корню из среднего числа частиц. - Сравните с формулами теории вероятностей и математической статистики [С Г05], [Худ70].

[ЛЛ02]: Ландау и др. (2002), Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика

[С Г05]: С Г Григорьев (2005), Математика для студентов учреждений среднего проф

[Худ70]: Худсон (1970), Статистика для физиков

N и S объединяет свойство аддитивности. Разделим исходный большой объём на N малых эквивалентных, при условии, что N — это достаточно большое число, но заведомо намного меньшее, чем число Авогадро и числа молекул в системе. Тогда вместо среднего числа частиц в формулах для оценки флуктуации можно подставить значение энтропии S.

Исходя из среднего квадрата части в заданном объеме газа находится гауссово распределение вероятности флуктуации числа частиц:

$$w(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} exp\left(-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\bar{N}}\right)dN \qquad (7.3)$$

Для малых значений N удобно применять формулу Пуассона, известную из математической статистики.

$$w_n = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \qquad (7.4)$$

В интересующем нас случае (выделенный объем) $V \ll V_0$ (исходный объем) число частиц в выделенном объеме хотя и может значительно отличаться от своего среднего значения, но предполагается малым по сравнению с полным числом частиц в газе. С учетом формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ формула (7.3) переходит в формулу (7.4) при малых отклонениях. Известно, что вероятность флуктуации в системе пропорциональна экспоненте с отклонением энтропии:

$$w = e^{\Delta S} \qquad (7.5)$$

здесь имеется ввиду энтропия системы в целом см. Приложение 8.

Из фундаментальных принципов термодинамики

Пусть $S_{\text{Общ.}}$ есть полная энтропия тела вместе со средой. если тело находится в равновесии со средой, то $S_{\text{Общ.}}$ есть функция от их полной энергии $E_{\text{Общ.}}$. В случае отсутствия равновесии со средой суммарная энтропия отличается от значения $S_{\text{Общ.}}(E_{\text{Общ.}})$. Необходима минимальная работу R_{min} внешнего источника для приведения тела из состояния равновесия со средой в новое состояние равновесия со средой. Отклонение энтропии можно выразить как гладкую возрастающую функцию от минимальной работы со знаком минус. Из основных уравнения термодинамики известно, что производная $\frac{dS_{\text{Общ.}}}{dE_{\text{Общ.}}} = \frac{1}{T_0}$ есть равновесная температура системы. В результате имеем:

$$\Delta S_{total} = -\frac{R_{min}}{T_0} = -\frac{\Delta E - T_0\Delta S + P_0\Delta V}{T_0} \qquad (7.6)$$

Опуская промежуточные выкладки с термодинамическими переменными, в итоге приходим к выражению вероятности перехода из одного состояния в другое за счет флуктуации

$$w = Const \cdot exp\left[\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P^2 - \frac{1}{2C_p}(\Delta S)^2\right] \quad (7.7)$$

Из чего следует статистическая независимость флуктуаций давления P и энтропии S. Интересующая нас величина флуктуация энтропии определяется по формуле:

$$\left\langle (\Delta S)^2 \right\rangle)^{1/2} = C_P N \quad (7.8)$$

где - C_P теплоёмкость газа (смеси) при постоянном давлении, N - число частиц. Эта величина постоянна для идеального газа / смеси и пропорциональна числу частиц в исследуемой нами подсистеме.

В статистической физике часто рассматривают энтропию как детерминированную величину, определяемую через распределение вероятностей микросостояний. Однако при более строгом подходе можно и нужно говорить о математическом ожидании и дисперсии энтропии как о случайной величине. В предыдущих обсуждениях акцент делался на физический смысл флуктуаций и их связь с термодинамическими потенциалами, что иногда приводило к пренебрежению формальным аппаратом.

Исправим это упущение и рассмотрим вопрос системно. Дисперсия Var и σ - в центре внимания?

Замечание 7.1 Помним о связи определений дисперсии и среднеквадратичного отклонения $Var[X] = \sigma[X]$.

1. Акцент на относительных флуктуациях экстенсивных величин. В термодинамике больших систем ($N \gg 1$) ключевой результат: относительные флуктуации экстенсивных величин (энергия, число частиц) убывают как $\sim 1/\sqrt{N}$. Для макроскопической системы ($N \sim 10^{23}$ - число Авогадро) они ничтожно малы. Поэтому основной интерес смещается к средним значениям (математическим ожиданиям), которые определяют термодинамику. Энтропия в этом контексте — это средняя логарифмическая

мера (энтропия Гиббса-Шеннона), а не случайная величина.

2. Энтропия как функционал распределения. Чаще всего, когда говорят об энтропии системы в состоянии равновесия, подразумевают определение из статистической физики 3.1 или энтропию фон Неймана 3.4. В последнем случае $w_i = \dfrac{1}{p_i}$ это фиксированные вероятности из распределения Гиббса, не случайная величина, а детерминированная характеристика всего ансамбля.

Объективность флуктуации энтропии

Как только рассматривается отдельная одно конкретное микросостояние i, можем определить случайную величину микросостоянийной энтропии (или "информационное содержание"):

$$s_i = -\ln w_i.$$

Её математическое ожидание как раз и есть энтропия Гиббса-Шеннона:

$$\langle s \rangle = -\sum_i w_i \ln w_i = S.$$

Проведём теперь строгий расчёт.

Расчёт математического ожидания, Var и σ для s_i

Из распределение Гиббса:

$$w_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i},$$

(где $\beta = 1/T$ в энергетических единицах), определим случайную величину:

$$\xi = s_i = -\ln w_i = \beta E_i + \ln Z.$$

1. Математическое ожидание в силу определения 3.1:

$$\langle \xi \rangle = \langle -\ln w_i \rangle = -\sum_i w_i \ln w_i = S$$

Используя выражение через энергию:

$$\langle \xi \rangle = \beta \langle E \rangle + \ln Z$$

Это известное термодинамическое тождество из 8.2, поскольку $\ln Z = -\beta F$, где F — свободная энергия, а $S = \beta(\langle E \rangle - F)$.

2. Дисперсия

$$Var[\xi] = \langle(\xi - \langle\xi\rangle)^2\rangle = \langle\xi^2\rangle - \langle\xi\rangle^2.$$

Так как $\xi = \beta E_i + \ln Z$, а $\ln Z$ — константа, то

$$\xi - \langle\xi\rangle = \beta(E_i - \langle E\rangle).$$

Следовательно, дисперсия энергии $Var[E]$:

$$Var[\xi] = \langle[\beta(E_i - \langle E\rangle)]^2\rangle = \beta^2\langle(E_i - \langle E\rangle)^2\rangle = \beta^2\,\sigma^2[E],$$

3. Среднеквадратичное отклонение (СКО)

$$\sigma_\xi = \sqrt{\sigma^2[\xi]} = \beta\,\sigma_E,$$

где $\sigma_E = \sqrt{\sigma^2[E]}$ — СКО энергии.

Ключевая физическая интерпретация

Это и есть главный результат, который придаёт смысл расчётам:

- Дисперсия случайной энтропии s_i прямо пропорциональна дисперсии энергии.
- Коэффициент пропорциональности — $\beta^2 = 1/T^2$.

В физике $Var[E]$ связана с теплоёмкостью при постоянном объёме C_V:

$$Var[E] = T^2\,C_V \quad \text{(в единицах } k_B = 1\text{)}.$$

Но исходя из термодинамических соотношений и статистической независимости флуктуаций [ЛЛ02] $\langle \Delta S \Delta P \rangle$ имеем:

$$Var[\xi] = \beta^2(T^2 C_V) = C_P,$$

Где C_P - удельная теплоёмкость при постоянном давлении. Следовательно:

$$\sigma_\xi = \sqrt{C_P}. \tag{7.9}$$

[ЛЛ02]: Ландау и др. (2002), Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика

Вывод: Флуктуации величины $s_i = -\ln w_i$ напрямую определяются теплоёмкостью системы C_V, которая является мерой устойчивости системы по отношению к внешним воздействиям.

Почему этот результат не всегда акцентируется?

1. s_i — не та энтропия, которую обычно измеряют. В эксперименте и в феноменологической термодинамике имеют дело со средней энтропией S, которая ведёт себя как детерминированная термодинамическая функция. Флуктуации же s_i “спрятаны” на микроуровне.
2. Смысловой акцент. В контексте флуктуационных теорем (например, теорема Ярзинского) важна именно разность полной изменённой энтропии в необратимом процессе, и там фигурируют более сложные конструкции, чем простая дисперсия.

Теорема Ярзинского (Jarzynski equality) Это результат неравновесной статистической механики, связывающий работу, совершённую над системой в неравновесном процессе, со свободной энергией F. Даже если система выводится из равновесия быстро (неадиабатически), среднее значение экспоненты от совершённой работы равно экспоненте от изменения свободной энергии.

Следствие 7.1 (Математическое ожидание равно термодинамической S) Для случайной величины $s_i = -\ln w_i$ можно и нужно считать математическое ожидание (равное термодинамической энтропии S), дисперсию и СКО.

Краткий вывод:

$$\sigma_{(-\ln w)} = \sqrt{C_P}$$

Таким образом, флуктуации информационного содержания состояния $(-\ln w_i)$ являются мерой “жёсткости” системы, характеризуемой её теплоёмкостью.

Для идеального газа относительную флуктуацию энтропии можно выразить через саму энтропию. Из общего результата 7.8 для идеального газа $\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle} \sim \sqrt{N}$ и $S \sim N$. Таким образом, относительная флуктуация энтропии обратно пропорциональна квадратному корню из самой энтропии:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} \sim \frac{1}{\sqrt{S}}. \tag{7.10}$$

Физическая интерпретация

Этот результат имеет глубокий физический смысл:

1. Экстенсивность величин: Поскольку и энтропия S, и квадрат её флуктуации $\langle(\Delta S)^2\rangle$ являются экстенсивными величинами (пропорциональными размеру системы), их отношение ведёт себя как:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} \sim \frac{\sqrt{V}}{V} = V^{-1/2} \sim S^{-1/2}.$$

2. Универсальность: Такое поведение характерно для всех аддитивных термодинамических величин — их относительные флуктуации убывают как $\frac{1}{\sqrt{S}}$ с ростом размера системы.

3. Статистическая основа: Этот результат следует из центральной предельной теоремы — при суммировании большого числа статистически независимых вкладов относительная флуктуация суммы убывает как $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Математическое значение С позиции чистой математики это означает, что:

- Энтропия становится “более определённой” величиной по мере увеличения объема выборки;
- Относительная ошибка (флуктуация) убывает как $\frac{1}{\sqrt{S}}$;
- В пределе $\lim_{S\to\infty} \frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} = 0$ флуктуации становятся пренебрежимо малыми.

Это фундаментальное свойство статистических систем, подтверждающее согласованность микроскопического и макроскопического описаний.

Лемма 7.2 (Неравенство Чебышёва) Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство приведено в [Гму23], Глава 9.3). Из этой леммы, зачастую дающую грубую тривиальную оценку вытекает очень важная для изложения материала теорема.

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

8 Теорема Чебышёва

Приводим формулировку и доказательство из того же источника с небольшими комментариями.

Теорема 8.1 (Теорема Чебышёва) Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — попарно независимые случайные величины, причём дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \quad (8.1)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (8.2)$$

Доказательство теоремы Чебышёва. Введём в рассмотрение новую случайную величину — среднее арифметическое случайных величин

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Под случайной величиной в физике понимается наблюдаемая 7.1, под которой здесь может подразумеваться относительные флуктуации $\frac{\Delta\check{q}}{\check{q}}$ либо энтропии $\frac{\Delta S}{S}$, их дисперсии, действительно, ограничены. По мере произведения наблюдений накапливается статистика случайной величины X.

Найдём математическое ожидание $\bar{X}$. Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математи-

ческих ожиданий слагаемых), получим

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n}. \tag{1}$$

Применяя к величине $\bar{X}$ неравенство Чебышёва, имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - M\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}, \tag{8.3}$$

или, учитывая соотношение (1),

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1. \tag{8.4}$$

Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых), получим

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)}{n^2}.$$

По условию дисперсии всех случайных величин ограничены постоянным числом C, т. е. имеют место неравенства: $D(X_1) \leq C$; $D(X_2) \leq C$; …; $D(X_n) \leq C$, поэтому

$$\frac{D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)}{n^2} \leq \frac{C + C + \cdots + C}{n^2} = \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}. \tag{8.5}$$

Итак,

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \leq \frac{C}{n}.$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в неравенство (2) (отчего последнее может быть лишь усилено),

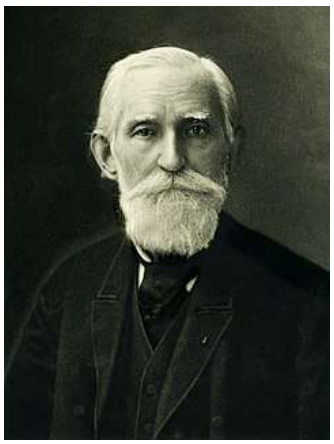


Рис. 8.6: Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) — русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук и ещё 24 академий мира. Чебышёв получил фундаментальные результаты в теории чисел

имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \cdots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \quad (8.6)$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1. \quad (8.7)$$

Наконец, учитывая, что вероятность не может превышать единицу, окончательно можем написать

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (8.8)$$

Теорема доказана. □

Теореме Чебышёва, как и вся математическая статистика, основывается на статистической физике, принципах симметрии. Теория подтверждена многочисленными экспериментами в разных отраслях науки т.е. прошла верификацию.

Рассматриваемая модель тройки чисел должна подчиняться тем же физическим законам. Научную ценность представляют лишь те модели, которые можно верифицировать, в данном случае через опыт и процедуру наблюдения.

Следствие 8.1 Множество целых троек (a, b, c) счётное и, частично упорядоченное по c множество 2.1, обозначим его n-ый элемент $(a, b, c)_n$ Для $\forall(a, b, c)_n \exists$ функции показателя качества (дефекта) тройки q_n и относительная флуктуация энтропии $\frac{\Delta S_n}{S} = q_{ABCn}$. В силу оценки 6 дефекта тройки $q < q_{ABCn}$. Применяя теорему Чебышёва к случайной величине $X_n = q_{ABCn} \to q_{ABCn}$ получим предел 8.2.

Чебышёв вывел следующее обобщение доказанной им теоремы: "при наличии достаточно большого числа независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями событие можно считать практически надежным, что означает, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет сколь угодно малым по абсолютной величине условия".

Означает ли это 100% уверенность в отсутствии троек для которых $q > 1$? Ответ отрицательный. Логическое обоснование можно почерпнуть из распределения Стьюдента — ключевого инструмента статистики для работы с малыми выборками и неизвестной дисперсией, обеспечивающий корректные выводы в условиях повышенной неопределённости.

Предложение 8.2 (Распределение Стьюдента и пределы отклонения Δq) Распределение Стьюдента позволяет определить значение измеряемой наблюдаемой величины и доверительный интервал. Означает ли это, что при достаточно большой выборке за пределами интервала отсутствуют случайные отклонения значений?

Распределение Стьюдента (t-распределение) — это статистическое распределение вероятностей, используемое при анализе малых выборок с неизвестной дисперсией генеральной совокупности. Распределение Стьюдента и построение доверительного интервала не означают, что за пределами интервала отсутствуют случайные отклонения значений даже при большой выборке. Доверительный интервал предоставляет диапазон значений, в котором с заданной вероятностью (например, 95% или 99%) может находиться истинное значение параметра генеральной совокупности (например, математического ожидания). Однако это не исключает возможности того, что отдельные наблюдения или измерения могут выходить за пределы этого интервала из-за случайной изменчивости данных.

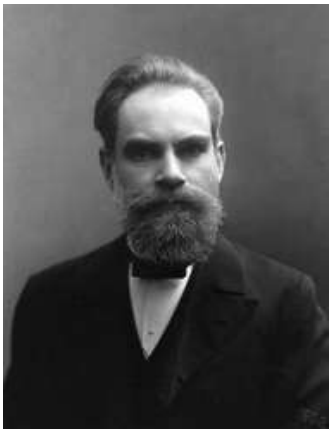
Распределение Стьюдента было предложено английским статистиком Уильямом Госсетом в 1908 году, который опубликовал соответствующие работы под псевдонимом "Стьюдент"

Природа доверительного интервала: Доверительный интервал — это интервальная оценка параметра, которая строится с учётом случайной ошибки выборки. Он указывает на диапазон значений, где с определённой вероятностью (доверительной вероятностью) находится истинное значение параметра. В частности, 95%-ный доверитель-

ный интервал означает, что если повторять выборку много раз, то в 95% случаев интервал содержал бы истинное значение параметра. Но это не гарантирует, что все отдельные наблюдения попадут в этот интервал.

Распределение Стьюдента используется для построения доверительных интервалов, особенно при малых выборках (обычно $n < 30$) и неизвестной дисперсии генеральной совокупности. При увеличении объёма выборки распределение Стьюдента приближается к нормальному распределению. Однако даже при больших выборках ($n > 30$) доверительный интервал не исключает полностью возможность отклонений за его пределы.

Теорема Чебышёва и предел по Коши описывают разные аспекты математического анализа и статистики. Теорема Чебышёва ограничивает вероятность случайных отклонений, а предел по Коши характеризует асимптотическое поведение функций или последовательностей. Оба понятия не исключают наличия отклонений, но в разных контекстах и с разными интерпретациями.



[А.М. Ляпунов]Александр Михайлович Ляпунов (1957-1918) — русский математик и механик. Основоположник теории устойчивости равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров.

Случайные отклонения:

Случайные отклонения — это естественные вариации данных, которые всегда присутствуют в измерениях. Даже при очень большой выборке отдельные наблюдения могут случайно оказаться за пределами доверительного интервала из-за естественной изменчивости. Доверительный интервал контролирует вероятность того, что сам параметр (например, среднее значение) находится в этом диапазоне, а не то, что все наблюдения будут в нём.

Интерпретация уровня доверия:

Уровень доверия (например, 99%) указывает на вероятность того, что интервал охватывает истинное значение параметра. Он не говорит о том, что 99% наблюдений попадут в этот интервал. Так, для нормального распределения около 5% наблюдений могут находиться за пределами интервала, соответствующего 95% доверительной вероятности. Для сравнения приводим определение предела по Коши.

Определение 8.1 (Определение предела по Коши) Согласно определению предела по Коши

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) : \ |x_n - a| < \varepsilon. \quad (8.9)$$

Другими словами, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, все члены последовательности $x_n \in (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$.

Центральная предельная теорема

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (центральная предельная теорема): если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному. [Гму23]

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

В силу теоремы Чебышёва, центральной предельной теоремы Ляпунова и свойства аддитивности энтропии можно, применить Гауссово распределение вероятности (7.2 -7.4) для флуктуации энтропии 7.10 и максимального значения функции q_{ABC} обозначаемого как $\Delta q_{ABC_{max}}$.

Вопрос о плотности распределения простых чисел остаётся в науке открытым [Пра]. Вместе с тем, можно ввести случайную функцию q_{ABC} (мажоранту), подчиняющуюся закону нормального распределения, которая ограничит ранее определенную 6 непрерывную и дифференцируемую функцию $\check{q}(a,b,c)$ сверху для достаточно больших значений энтропии. Произведём оценки среднеквадратичного отклонения q_{ABC} для системы, в целом, объединяющей подсистемы. Выше было сказано 6.2, что $\exists$ градиент непрерывной и дифференцируемой функции $grad(\check{q})$ на всей области определения $\check{q} : M \longrightarrow R$. Этот градиент не обращается в бесконечность и приращение $\Delta\check{q}$ может быть ограничено сверху нормально распределенной случайной функцией q_{ABC} - см. 6.1.

[Пра]: Прахар (), Распределение простых чисел

Для оценки верхней границы максимального отклонения $\Delta q_{ABC_{max}}$, можно принять во внимание дискретный характер фазового пространства и принцип равной вероятности микросостояний.

Замечание 8.1 Максимальному отклонению $\Delta q_{ABC_{max}}$, соответствует наименьшее значение функции распределения вероятностей ω_{min} нормальной кривой.

В свою очередь, вероятность такого микросостояния определяется как обратная величина от L - числа квантовых

состояний исследуемой системы. Из нормального распределения Гаусса имеем:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{\Delta q_{ABC}{}^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8.10}$$

Разрешая уравнение (8.10) и предполагая, что выражение под знаком корня положительное, находим:

$$\Delta q_{ABC_{max}} = \sigma\sqrt{2\ln\frac{L}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \tag{8.11}$$

Результат алгебраических преобразований, в конечном счёте, выходит громоздким, но можно произвести оценку, достаточную для доказательства ABC-гипотезы. Несколькими абзацами ниже будет выполнен численный эксперимент - интегратор по методу Монте-Карло и приведена гистограмма нормального распределения.

В общем случае для нормального распределения плотность распределения вероятности определяется формулой [Гму23]:

[Гму23]: Гмурман (2023), Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В

$$\left|\Delta q_{ABC_{max}} < \epsilon\right| \leq 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \ldots \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{8.12}$$

Исходя из числа квантовых уровней равного L, и значения σ 7.9, отыщем соотношение, начиная с которого проявляется фактор дискретности фазового пространства:

$$1 \geq \frac{L\sqrt{\mathrm{Rad}(abc)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta q^2_{ABC_{\max}}}{2\sigma^2}\right) \tag{8.13}$$

Число микросостояний должно быть целым, а не дробным

Это неравенство определяет условия, при которых проявляется фактор дискретности (см. уравнение 8.10). Быстро убывающая функция $\exp\left(-\frac{\Delta q^2_{ABC}}{2\sigma^2}\right)$ легко делает результат произведения сомножителей $L\sqrt{\mathrm{Rad}(abc)}$ меньше единицы. Однако число микросостояний должно быть целым, а не дробным. Можно представить это по другому $w_{min} = \frac{1}{L}$, а энтропия S достигает максимума, соответствуя максимальной неопределённости системы. Для системы размерности L максимальная $S = \ln(L)$. Это достигается, когда система полностью случайна, и её матрица плотности: $\hat{\rho} = \frac{1}{L}\underline{E}$ пропорциональна единичной матрице см. пример в Прил. 12. На главной диагонали матрицы плотности

будет расположено значение $\frac{1}{L}$. Отсюда возникает критическое значение - единица слева в неравенстве 8.13, при выполнении которого ∄ тройки (a, b, c).

Влияние дискретности квантовых состояний на флуктуации энтропии

Дискретность квантовых состояний и конечность фазового пространства приводят к важным следствиям для флуктуаций энтропии. Рассмотрим эти следствия системно.

1. Ключевые физические предпосылки

1. Конечный объём и энергия. В конечной системе с заданной максимальной энергией $E_{\max}$ число доступных квантовых состояний конечно. Обозначим его L. Это следует из дискретности спектра и ограниченности фазового объёма ячейкой $(2\pi\hbar)^l$, где l — число степеней свободы.
2. Каноническое распределение. Вероятности состояний задаются распределением Гиббса:

$$w_i = Z^{-1} e^{-\beta E_i}, \quad i = 1, \ldots, L,$$

где $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ — статистическая сумма, $\beta = 1/T$. Все $w_i > 0$, так как экспонента не обращается в нуль.

2. Дискретность случайной величины $s_i = -\ln p_i$

Поскольку число состояний L конечно, случайная величина s_i принимает конечное число значений (возможно, с вырождениями). Следовательно, её распределение имеет конечный носитель:

- Минимальное значение: $s_{\min} = -\ln(w_{\max})$, где $w_{\max} = \max_i w_i$
- Максимальное значение: $s_{\max} = -\ln(w_{\min})$, где $w_{\min} = \min_i w_i$

Относительное отклонение $\Delta S/S = (s_i - S)/S$ также принимает конечное число значений в интервале:

$$\left[\frac{s_{\min} - S}{S}, \frac{s_{\max} - S}{S}\right].$$

3. Обращение вероятности в ноль

Для отклонений за пределами указанного интервала вероятность w_i точно равна нулю.

Более того, внутри интервала вероятность может быть нулевой для некоторых значений $\Delta S/S$, если ни одно состояние не даёт именно такого отклонения. Однако это дискретное множество нулевой меры. Таким образом, в конечной системе распределение вероятностей для $\Delta S/S$ является дискретным с конечным носителем, и существует пороговое отклонение, за которым вероятность строго нулевая.

4. Термодинамический предел и его особенности

В пределе $N \to \infty$ при фиксированной плотности:

1. Число состояний L растёт экспоненциально с N: $L \sim e^{aL}$.
2. Минимальная вероятность $w_{\min} \sim e^{-bN}$ (в типичных случаях $b \sim \beta\varepsilon_{\max}$, где $\varepsilon_{\max}$ — удельная максимальная энергия).
3. Тогда $s_{\max} \sim bN$, а $S \sim N$, следовательно:

$$\frac{\Delta S_{\max}}{S} \sim \text{const}.$$

   То есть максимальное относительное отклонение стремится к константе, а не к бесконечности.

Однако распределение становится плотным на интервале $[-1, \text{const}]$ (относительные отклонения вниз ограничены -1, так как $s_{\min} \geq 0$, поэтому $(s_{\min} - S)/S \geq -1$).

Замечание 8.2 (Ограничен ли спектр?) В системах с неограниченным спектром (например, идеальный газ в бесконечном объёме) формально L бесконечно даже при конечном N. При любом конечном N и конечном объёме спектр дискретен и неограничен; число состояний с энергией ниже любого конечного предела конечно, однако полное число состояний (с учётом сколь угодно высоких энергий) счётно-бесконечно.

В каноническом распределении w_i убывают экспоненциально с E_i, но все $w_i > 0$. Тогда $s_{\max}$ формально не ограничен, поскольку $\inf w_i = 0$, но не существует “самого маловероятного” состояния — для любого $\epsilon > 0$ найдётся состояние с $w_i < \epsilon$. Следовательно, макси-

мальное отклонение формально не ограничено, хотя вероятность таких больших отклонений экспоненциально мала. Это существенная разница между конечными системами с ограниченным спектром и системами с неограниченным спектром.

5. Микроканонический ансамбль — особый случай

Для изолированной системы с фиксированной энергией E (микроканонический ансамбль) все доступные состояния равновероятны: $p_i = 1/\Delta\Gamma(E)$, где $\Delta\Gamma(E)$ — число состояний с энергией E. Тогда:

- $s_i = -\ln(1/\Delta\Gamma(E)) = \ln\Delta\Gamma(E) = S$ для всех i
- Флуктуации отсутствуют: $Pr(\Delta S/S = 0) = 1$, сокращение от $(Pr)obability$ - вероятность.

В этом случае распределение вырождено в точку, и вероятность любых ненулевых отклонений строго равна нулю.

Следствие 8.3 1. Для конечных систем с ограниченным спектром (конечное число состояний M):

- Распределение $\Delta S/S$ дискретно и имеет конечный носитель.
- Существует пороговое значение $|\Delta S/S|_{\max}$, 8.13 за пределами которого вероятность точно равна нулю.

2. Для систем с неограниченным спектром (даже в конечном объёме):

- Теоретически возможны сколь угодно большие отклонения $\Delta S/S$, но с экспоненциально убывающей вероятностью.
- На практике для макроскопических систем относительные флуктуации порядка 1 уже имеют исчезающе малую вероятность.

3. В термодинамическом пределе ($N \to \infty$) для систем с ограниченной удельной энергией:

- Относительные флуктуации $\Delta S/S$ стремятся к нулю по закону $1/\sqrt{N}$.
- Максимальное относительное отклонение может стремиться к константе, но вероятность таких отклонений экспоненциально мала $\sim e^{-N}$.

Замечание 8.3 Дискретность квантовых состояний означает, что для конечных систем распределение энтропии имеет конечный носитель, и за определёнными границами флуктуации невозможны. Это важное отличие от классического подхода, где фазовое пространство непрерывно и формально возможны сколь угодно большие отклонения (хотя и с исчезающей вероятностью).

Рассматривалась система в целом

Важно помнить, что в приведённых оценках: а) флуктуации энтропии "рассматривались" для системы, как целого, в состоянии, соответствующей вероятности w_i, а не для отдельной частицы; б) формула $\frac{\Delta S}{S} = 0$ — это сокращённая запись от выражения $\frac{\sqrt{\langle (\Delta S)^2 \rangle}}{S} = 0$.

Пояснение:

- Величина $\xi = s_i = -\ln w_i$ — это именно $s_{\text{сист}}$ для микросостояния i всей системы.
- Энергия E_i — полная энергия системы, а не энергия одной частицы.
- Дисперсия $Var[\xi] = \beta^2 Var[E]$ уже включает вклад всех N частиц, поскольку $Var[E] \sim N$.

Таким образом, дополнительного умножения на N не требуется — фактор N уже содержится в $Var[E]$ и, соответственно, в теплоёмкости $_P$.

Не следует путать произвольный задаваемый параметр ϵ с энергией одной молекулы, обозначаемой выше той же литерой!

По мере накопления статистических данных, как показывает оценка среднеквадратичного отклонения 7.9 и теорема Чебышёва 8.1, частота появления искомых троек снижается до нуля ступенчато 9.8.

Следствие 8.4 (Конечное число дефектных троек) Из сказанного следует, что для $\forall$ наперёд заданного ϵ существует только конечное число троек чисел, для которых $q(a,b,c) = \breve{q} < q_{ABC_{max}} + \epsilon$. Это явление объясняется дискретностью фазового пространства $\nexists\, q(a,b,c) = \breve{q} > q_{ABC_{max}}$.

9 ABC@home проект и дискретность фазового пространства

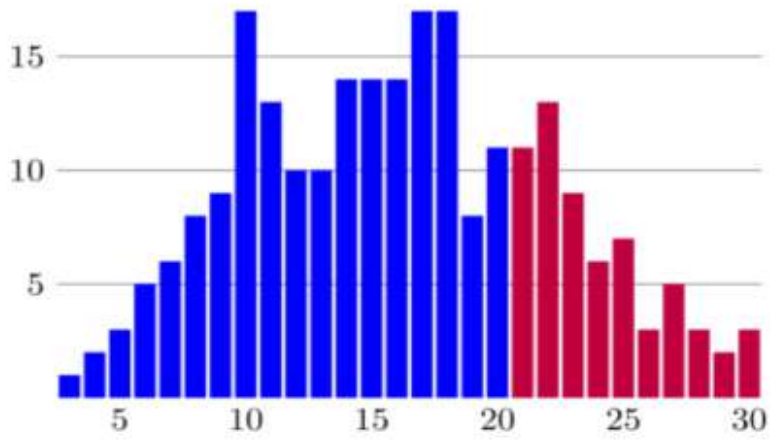


Рис. 9.7: Проект ABC@home находит все тройки ABC чисел для заданной верхней границы «качества» $q(a,b,c)$ и числа десятичных разрядов.

Можно сравнить с ABC@home проектом эти несложные оценки. Ниже приведена гистограмма качества троек q от числа десятичных разрядов в числах ABC.

В Проекте ABC@home говорится: Список т. н. хороших троек, состоящий из 20 цифр, уже завершен. Например, на графике показано, что существует 11 хороших троек, в которых с содержит 20 цифр. Когда будут обнаружены новые хорошие тройки, увеличится только красная часть на графике выше. (уже 20 десятичных разрядов).

Волонтерская сеть ABC@home

Волонтерская сеть под названием ABC@home посвящена распределенному вычислительному проекту поиска т.н. ”хороших” троек (unbitten triples). В 2011 году проект ABC@home достиг цели составить полный список всех троек ABC, состоящих из целых чисел, состоящих максимум из 18 цифр. Список насчитывает 14,482,065 троек. См. 241 ABC-тройка «качества» q не ниже 1,4, которые часто называют «хорошими» ABC-тройками. https://www.math.leidenuniv.nl/ desmit/abc/index.php по сост. на 11.05.2024

В действительности в Проекте [ABC23] применена логарифмическая шкала к нормальному распределению $q_{ABC_{max}} = 1 + \Delta q_{ABC_{max}}$ и далее количественный метод группировки набора ранжированных данных на равные

[ABC23]: ABChome (2023), Volunteer network called ABC-home dedicated to distributed computing project

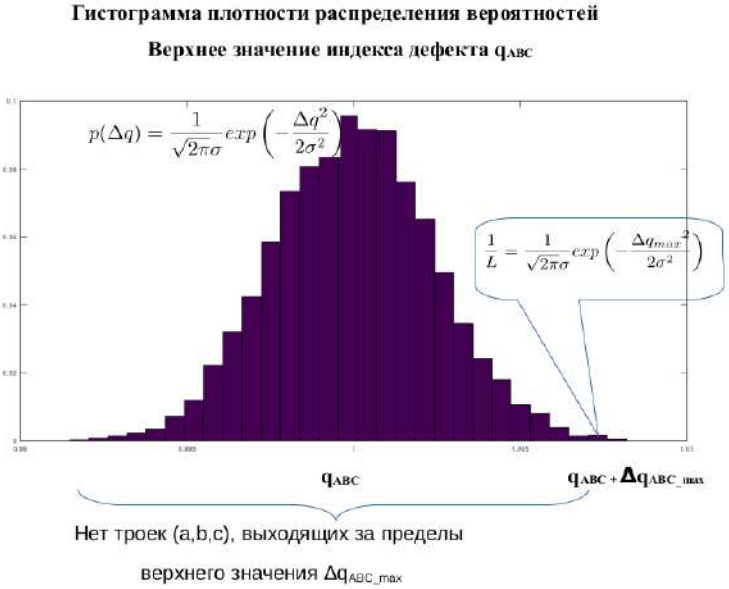


Рис. 9.8: Эта гистограмма иллюстрирует дискретную природу фазового пространства для исследуемой тройки чисел ABC. В случае $q(a,b,c) > q_{ABC_{max}}$ не существует ни одной тройки, удовлетворяющей ABC гипотезе.

подгруппы, в данном случае - децили), но характерный вид нормального распределения (см. Главу Гипотеза Римана, распределение Максвелла (2.6) и Рис. 9.8 от этого не изменился.

Интегратор по методу Монте-Карло и гистограмма нормального распределения

```
###### historgam.m ######
# Здесь 100000 - это размер случайной
# выборки. Данный параметр передается
# в функ. mcintgrv (Monte-Carlo Integral Vector)

for i=1:10000
s(i) = 0.5 * mcintgrv("sin", 0, pi, 100000);
endfor
# Строится гистограмма, 30 интервалов.

hist(s, 30, 1)

## Конец файла  historgam.m

###### mcintgrv.m  ######
#
#  функция I = mcintgrv(fun, a, b, mcloops)
#
function I = mcintgrv(fun, a, b, mcloops)
```

```
# В эту функцию может быть передана
# любая иная функция по ссылке
# Главное, чтобы она были непрерывная
# принимала положительные значения
# на интервале [a,b]

# Находим максимальное значение
x = linspace(a,b);
f = feval(fun,x);
maxf = max(f);

# Генерируем случайные массивы ''капель дождя''
r1 = rand(mcloops,1);
r2 = rand(mcloops,1);

# Получаем массив случайных значений x и y
# для капель дождя (x,y), падающих
# на прямоугольник  [a,b] x maxf
l = b - a;
x = a + l.*r1;
y = maxf.*r2;
fx = feval(fun, x);

# Подсчитываем количество точек, лежащих
под графиком, счётчик fx = feval(fun, x)
# Находим интеграл
I = counter/mcloops*maxf*l;
endfunction

### Конец файла mcintgrv.m
```

Выше приведён код [Han11] векторизованной функция mcintgrv (Monte-Carlo Integral Vector), которая вызывается с аргументами.

[Han11]: Hansen (2011), GNU Octave Beginner's Guide

Данный код создан на GnuOctave (аналог MathCad) по лицензии GNU GPL. Он состоит из двух файлов historgam.m и mcintgrv.m Первый код позволяет построить гистограмму распределения плотности вероятности для случайно генерируемой выборки из набора данных объемом 100000 значений интеграла.

В файле mcintgrv происходит вычисление интеграла методом Монте-Карло Он работает для произвольной функции, положительной на заданном интервале значений и заключается в подсчёте доли равномерно падающих

”капель дождя” (или распылённой с помощью пульверизатора краски), осевших под кривой, в сравнении с общим количеством капель (краски), приходящихся на прямоугольник, построенный на интервале значений функции по оси абсцисс и от нуля до максимума функции по оси ординат $[a,b] \times maxf$. Исходя из равномерного распределения случайных точек (x,y), найденная таким способом доля будет равна соотношению площади под кривой — искомого интеграла к элементарно подсчитываемой площади прямоугольника. Метод Монте-Карло особенно эффективен для численного интегрирования в n-мерном пространстве.

Код прост для понимания. Особое внимание следует уделить выполнению сравнения между значением функции и значению ординаты y случайной точки. Результатом этой операции сравнения является логический массив, который возвращает индексы всех истинных элементов в массиве. Извлекая количество индексов просто подсчитать количество случайно генерируемых пар значений (x,y), которые расположены под графиком функции.

Попробуйте запустить этот код в GnuOctave или его аналогах, измените размер выборки со 100000 до 10000, 1000, 100, варьируйте количество интервалов в гиптограмме. Эти числнные эксперименты позволят непосрелственно проверить, как зависит от размера выборки среднеквардартивное отклонение σ случайной величины относительно её математического ожидания.

Замечание 9.1 (Ступенчатый обрыв) Гистограмма, полученная путем моделирования иллюстрирует фактор дискретности фазового пространства: вместо плавного убывания хвостов гистограммы слева и справа имеем ступенчатый обрыв.

На ноутбуке автора векторизованная версия интегратора Monte Carlo выполняет примерно в 300 раз быстрее, чем обычный метод численного интегрирования. Используя векторизованное программирование, можно также избежать множества циклов, которые выполняют тривиальные задачи и загромождают код. Векторизованный код намного легче воспринимать и осуществить его отладку.

Легко показать, что этот вывод эквивалентен другому представлению о дефекте $q(a,b,c) < K(\varepsilon) rad(A,B,C)^{1+\varepsilon}$ где $K(\epsilon)$ - определенная константа, зависящая только от ϵ.

Вместо использования суперкомпьютеров и распределенных вычислительных ресурсов легко создать выборку нормального распределения объёмом сотня- сто тысяч единиц и за полсекунды - тридцать секунд полу-

чить более содержательный результат с помощью кроссплатформенного приложении GnuOctave (аналог MathLab по лицензии GnuGPL) даже далеко не на новом настольном компьютере. - Налицо сбережение интеллектуальных и энергетических ресурсов.

10 С позиции школьной термодинамики

Для простоты рассмотрим замкнутую систему в целом (т.е изолированную от иных систем, например, помещенную в термостат), где определены $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \ldots$ — статистические веса ее различных подсистем. Если каждая из подсистем может находиться в одном из $\Delta\Gamma_\alpha$ состояний, то дифференциалы статистических весов подсистем перемножаются, а энтропии подсистем складываются что иллюстрируют выражения 2.17.

Формула (3.1) пригодна для выражения закона сохранения энтропии подсистемы при разделении переменных и адиабатических процессах, достаточно медленных по сравнению с временем релаксации / установления локального равновесия. На практике это время в лабораторных условиях проистекает быстро и сопоставимо со временем распространения звуковой волны в сосуде с газом (330 метров в секунду при нормальном атмосферном давлении и температуре 20 градусов Цельсия для воздуха - сотни метров в секунду в зависимости от параметров газа либо смеси).

Говоря об экспоненте в формулах распределения Гиббса (8), отметим, что известные формулы распределения плотности вероятности нахождения частиц выражены через экспоненту: как например в изучаемых в физико-математических школах [ЛАЛ69] распределении Больцмана $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$, т. н. барометрической формуле - и распределении Максвелла [Кар76] 2.6. Обе формулы дают представление о статистическом ансамбле, который следует рассмотреть детальнее. См. в приложении 13 Каноническое распределение Гиббса 8 Для смеси идеальных газов приведенные в этом распределении формулы остаются в силе, только вместо N подставляется количество молекул соответствующего газа. Для смеси газов обладают свойствами аддитивности следующие термодинамические

В большинстве формул здесь температура T задается в энергетических единицах и постоянная Больцмана k_B) опускается, как это принято в традициях теоретической физики $k_B T \to T$ 1 электрон-вольт = 11606 град. Аналогично постоянная Больцмана опускается в формулах для выражения энтропии S

[ЛАЛ69]: Ландау и др. (1969), Курс общей физики. Механика и молекулярная физика

[Кар76]: Карцев (1976), Максвелл/Серия: Жизнь замечательных людей.- М

переменные: число молекул, энергия, энтропия, парциальное давление каждого газа термодинамически потенциал и ряд других. При этом объем и температура по правилам термодинамики одинаковы для всех молекул каждого газа из смеси. Отметим, что благодаря отсутствию взаимодействия между молекулами происходит суммирование значений энтропии и соответственно, перемножение статистических весов соответствующих газов.

Легко проследить аналогию формулы (3.6) с логарифмом формул канонического и большого каноническое распределение Гиббса для смеси идеальных газов 9.6, доступным для понимания и студентов 2-3 курсов физико-математического либо технического вузов языком. Рекомендуется ознакомиться и старшеклассникам с помощью преподавателя. Можно производить суммирование по всем состояниям энергетических уровней, а не молекул. Этот приём используется нами выше в распределении Максвелла 2.6. Состояние энергетических уровней определяется квантово-атомными параметрами молекулы, изучаемых на уроках химии в школе.

Подкрепляет такую уверенность формула, моделирующая статистический вес и энтропию (3.1). Пары произведений в (9.6) $\mu_i N_i$ под знаком суммы входят симметрично. В этой формуле можно произвести суммирование по всем состояниям энергетических уровней, а не молекул. Состояние энергетических уровней определяется квантово-атомными параметрами молекулы, изучаемых на уроках химии в школе.

ABC-гипотеза оперирует понятием «качества тройки чисел» на основе натурального логарифма. (Допустим переход к натуральному логарифму путем одновременного деления числителя и знаменателя ln10).

Натуральный логарифм $ln(x)$ подразумевается в основных формулах теории чисел и записывается просто как $log(x)$.

Радикалу произведения чисел $Rad(abc)$ можно сопоставить в частности смесь идеальных газов с невырожденными уровнями энергии, что достигается при достаточно низкой температуре, когда активированы только поступательные степени свободы и вращательные для многоатомных молекул. С учетом сказанного выше это будет означать первую степень простых чисел формулы (3.6).

За счет уравнения Клапейрона $PV = RT$ можно контролировать температуру, давление газов регулируя началь-

ную температуру, числу молекул смеси (концентрацию) и объем подсистемы.

Рис. 10.9: Людвиг Больцман 1844- 1906 выдающийся физик-теоретик, со-основатель статистической механики. Объяснил II начало термодинамики, внёс значительный вклад в кинетическую теорию газов.

С помощью термодинамических соотношений легко рассчитывается энергия молекул газа и энтропия, а значит и объем фазового пространства $\Delta\Gamma_i = exp(S(E_i))$. Далее можно подобрать $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3$ . . . — статистические веса газов 1, 2, 3 в смеси соответственно равными простым числам формулы (3.6) в первой степени - радикалу $Rad(abc)$. Обозначим такое значение объема фазового пространства под $\Delta\Gamma_0$, а соответствующую ему энтропию 3.1 где, в знаменателе этой дроби необходимо по определению энтропии произвести усреднение значения логарифмов от значений по диагонали статистической матрицы, а длина этой диагонали или общее число элементов (число энергетических уровней с учетом кратного повторения собственных значений на главной диагонали) L вычислена из формулы 3.6 и равна общему числу простых сомножителей в ABC-гипотезе. Если каждая из подсистем может находиться в одном из Γ_α квантовых состояний, то фазовые объемы подсистем перемножаются, а энтропии подсистем складываются.

При адиабатическом сжатии основное уравнение термодинамики примет вид внутренняя энергия газа уменьшается (увеличивается) как раз на величину произведенной газом (над газом) работы. Согласно формуле первого закона термодинамики $dQ = dE + PdV$, где dQ — количество тепла, P — давление газа, dV — малое приращение объёма, сомножитель PdV равен произведенной работе. При адиабатическом процессе $dQ = 0$, теплового обмена нет, отсутствуют диссипативные процессы, а следовательно все изменения подсистемы остаются обратимыми и $dE = -PdV$.

Из школьного курса термодинамики известно, что при адиабатическом процессе соотношение между давлением и объемом / температурой и объемом соответственно приобретает вид

$$PV^\gamma = const \ldots TV^{\gamma-1} = const \qquad (10.1)$$

где $\gamma > 1$ — это частное от деления теплоемкости при постоянном давлении на теплоемкость при постоянном объеме газа $\frac{C_P}{C_V}$. При адиабатическом сжатии энтропия

системы остается постоянной, но «включаются» вырожденные уровни энергии ϵ_k (удельной энергии в расчете на одну молекулу газа), за счет увеличения температуры.

Это сопровождается появлением степеней свыше единицы в формуле (3.6). Обозначим такое статистическое состояние системы литерой $\tilde{D}$, символизирующей появление вырожденных энергетических уровней, а энтропию соответственно $S_{\tilde{D}}$.

11 Аналогии из систем ЛДУ

Интересно сделать некоторые аналогии изложенного в Приложении 7 квантово-механического подхода с системами линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ). Пусть гамильтониан (напомним, что это аналог теоремы о кинетической энергии, изучаемой в школе, но в обобщенных координатах) H исследуемой системы явно не зависит от времени, тогда в гейзенберговском представлении для описания этого простого случая применяется уравнение:

$$i\hbar\dot{\psi} = \widehat{H}\psi \tag{11.1}$$

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

[Фер00]: Ферми (2000), «Лекции по квантовой механике.»

Унитарный оператор конечного сдвига во времени определяется по формуле [Зел02], [Фер00]:

$$\widehat{U}(t) = e^{i\widehat{H}/\hbar} \tag{11.2}$$

Преобразование $\widehat{U}(t)$ переводит вектор $\psi(0)$ в $\psi(t)$ следующим образом:

$$\psi(t) = \widehat{U}(t)\psi(t_0)$$
$$\psi(t_0) = \widehat{U}^{-1}(t)\psi(t)\ldots\psi(t_0) = \widehat{U}^{+}(t)\psi(t) \tag{11.3}$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, выраженную в матричной форме:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\mathbf{y} \tag{11.4}$$

где $\widetilde{\mathcal{D}}$ — блочно-диагональная матрица линейного отображения, в общем случае зависящая от времени t. По условиям ABC-гипотезы все собственные значения не равны нулю => матрица невырожденная, а все её собственные значения различны $detD = \lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_i$, начальный объем

фазового пространства $\Gamma_0 = Rad(abc)$. На диагоналях блочно-диагональной матрицы $\widetilde{\mathcal{D}}$ расположены элементы, где k - размер жордановой ячейки, на диагоналях матрицы расположена аналитическая функция (4.7) с параметром, учитывающим адиабатические изменения в системе $\widetilde{\mathcal{D}}$.

Рассмотрим фундаментальную матрицу системы линейных дифференциальных уравнений Y и определитель Вронского $W = detY(t)$. Согласно теореме Лиувилля-Остроградского [Мыш72] [15, параграф VIII (18)]:

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика. Специальные курсы

$$W(t) = W(t_0)\, exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, D(\tau)d\tau$$
$$\cdots \prod_{1}^{n} \lambda_i = exp \int_{0}^{T} \mathrm{Tr}\, D(\tau)d\tau \quad (11.5)$$

В момент времени t_1 кратность корней увеличивается, что физически соответствует вырожденным энергетическим уровням системы, но след матрицы под интегралом остается постоянным. Близкая по смыслу формула найдена для определителя польского философа и математика Вронского, удобного для нахождения производной вектор-функции в системе линейных дифференциальных уравнений вида (11.4)).

Приведенные математические формулы раскрывают физический смысл фазового пространства и следа матрицы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Адиабатический процесс и постоянство энтропии играют важную роль. С этой позиции формулы для нахождения объема фазового пространства и энтропии системы имеют аналоги в теории систем линейных дифференциальных уравнений, кратко выраженной в матричной форме.

Продолжаем ряд примеров. Рассмотрим фундаментальную матрицу (т.е. состоящую из линейно независимых векторов решений (11.4 системы для которой действует простое соотношение:

$$\begin{aligned} Y(t,0) &= \mathrm{I} \\ Y(t_1,t_2) &= Y(t_2,t_1)^{-1} \end{aligned} \quad (11.6)$$

Флоке в известной теореме доказал, что для периодических систем с периодом T (в смысле времени, а не

температуры):

$$\mathbf{Y}(t,0) = \mathbf{\Phi}(t)\, exp(t\mathbf{M}) \tag{11.7}$$

Собственные значения именуют мультипликаторами Т-периодической системы. Исходя из сказанного выше, в нашем случае все эти мультипликаторы по модулю не больше единицы см. вторую часть формулы 11.5). Последние две формулы соответствуют унитарному оператору конечного сдвига во времени (11.3). где $\mathbf{\Phi}(t)$ периодическая функция с периодом T.

Имеются и другие аналогии фазового пространства $W \rightarrow \Gamma$ и энтропии $\mathrm{Tr}(D(\tau)) \rightarrow S$. Обратите внимание, что матрицы бесконечны и приведены к форме Жордана, рассматриваемая сигмоидальная функция активации включает/выключает кратность корней и обеспечивает преобразование только что упомянутой матрицы.

Возникает вопрос, почему бы не записать приведенные выше уравнения с позиции аналитической механики при исследовании фазового пространства и энтропии либо их аналогов? В действительности, для реального физического объекта практически невозможно строго выдержать условия адиабатической изоляции. Сколь угодно малое нарушение этого условия означает возникновение малых случайных воздействий, по отношению к которым механические траектории неустойчивы как в обычном, так и в фазовом пространстве. Следствием неустойчивости в физической системе будет динамический хаос, что приводит к явлениям перемешивания и забывания начальных условий и фактически означает переход к статистическому описанию. Сложные вопросы эргодической гипотезы, выходят далеко за рамках постановленного исследования.

Теорема Ферма на школьном глобусе

Зачем школьнику ВТФ? 4

1 Введение 187
2 Формулировка теоремы 188
3 Человеческий разум против искусственного интеллекта 189
4 Мысленные эксперименты 190
5 Проект, моделирующий ВТФ 192
6 Симметрия. Изотропность и однородность пространства 193
7 Пифагоровы 3-ки ∃ только на 2D плоскости 198
8 Непрерывность. Гомеоморфизм. Классы эквивалентности 201
9 Сведения из теории множеств 202
10 Метрическая топология. Конструкция . 205
11 Цепь множеств из n-кубов 208
12 Аксиомы Евклида в XXI 214
13 Доказательство в одну формулу и чертёж 221
14 Гипотеза Леонарда Эйлера 224
15 Вывод 228

1 Введение

Почти четыре столетия мир бился над решением Великой теоремы Ферма. Есть доказательство сотню с лишним страниц для специалистов в теории чисел, но его невозможно пересказать. Попробуем рассмотреть теорему Ферма с позиции физики и геометрии. Именно с этих позиций Пьер де Ферма мог найти решение, основные идеи которого схематично уместились бы на достаточно широких полях книги, в нескольких рисунках. Однако господствующие на протяжении столетий в математике парадигмы оказали сильное препятствие в нахождении решения в том направлении, которое, выражаясь современным языком, является эффективным. Скептики продолжают считать, что Пьер де Ферма, вероятнее всего, заблуждался. Между тем, последовательное применение основных принципов физики, геометрии, мысленного эксперимента заставляют думать иначе. История открытия теоремы Ферма должна стать частью школьной / вузовской подготовки. В самом деле, суть доказательства укладывается в одной формуле и одном рисунке.

Важно отметить, что наряду с Великой теоремой Ферма существует также Малая теорема Ферма в теории чисел. Здесь речь идет только Великой теоремой Ферма (Fermat's Last Theorem).

Почему шар и куб гомеоморфны? И что такое гомеоморфизм? Какую роль играют однородность и изотропность пространства, симметрия в поисках математического доказательства? Почему в Великой теореме Ферма возникает фатальный конфликт между формой и содержанием? Обсудив эти вопросы, мы сделаем обобщения и выводы о фундаментальных свойствах нашей Вселенной.

В данной публикации приведено доказательство Великой теоремы Ферма (ВТФ) без математического формализма. Автор приводит версию краткого доказательства ВТФ

с опорой преимущественно на школьные знания физики, информатики и др. школьных предметов. С позиции инженерного подхода понимание основ теории множеств и аксиом Евклида можно проиллюстрировать с помощью 3D- моделирования, конструирования и обобщить результаты на многомерное пространство.

2 Формулировка теоремы

Великая теорема Ферма была сформулирована Пьером де Ферма в 1637 г. Она утверждает, что следующее Диофантово уравнение:

$$a^n + b^n = c^n \tag{2.1}$$

не имеет решений в целых числах $\mathbb{Z}$, за исключением нулевых значений, для n $>$ 2. Случай степени n $=$ 2 известен в школьном курсе под названием теорема Пифагора. Эйлер в 1770 году доказал теорему (2.1) для n=3, Дирихле и Лежандр в 1825 году - для n $=$ 5, Ламе - для n $=$ 7. В 1994 году профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс [Wil95], [BG94] доказал (2.1) для всех n, но это доказательство, содержащее более ста страниц, понятно математикам, специализирующимся в области теории чисел и цилиндрических функций. Возникает проблема верификации доказательства американской версии.

[Wil95]: Wiles (1995), «Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem»

[BG94]: Boston и др. (1994), «The World's Most Famous Math Problem (The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries) By Marilyn vos Savant»

К числу Диофантовых уравнений относятся Великая теорема Ферма и теорема Пифагора. В 1900 г. немецкий математик Давид Гильберт сформулировал список из 23 математических задач, II Международном конгрессе математиков в Париже, включая Десятую проблему, которую в нескольких словах можно выразить так: «Пусть задано Диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых, рациональных числах.» Спустя 170 лет Советский математик Юрий Владимирович Матиясевич доказал, что общего алгоритма не существует [Мат70] см. также популярную публикацию в журнале "Квант"[Мат93] Тем не менее, для некоторых случаев, понять разрешимо ли Диофантово уравнение, могут школьники, не прибегая к вычислениям, опираясь на методы

[Мат70]: Матиясевич (1970), «Диофантовость перечислимых множеств»

[Мат93]: Матиясевич (1993), «Десятая проблема Гильберта»

геометрической алгебры, симметрию, аналогию и фундаментальные свойства многомерного пространства, см. [Авд20].

[Авд20]: Авдыев (2020), «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020»

ВТФ сформулирована Пьером де Ферма на полях книги Арифметика Диофанта Александрийского (III НЭ) [Дио07]. Пьер де Ферма написал на узких полях книги, что отыскал воистину чудесное доказательство, но узкие поля не позволяют ему привести доказательство в полном объеме. Впоследствии потомки оболгали французского математика, и посчитали что он допустил легковесное суждение, проще говоря, хвастал и лгал. Основанием для такого утверждения стало канонизированное доказательство Эндрю Уайлса, на сто с лишним страниц, за что ему была присуждена престижная Абелевская премия в 2016г. Впоследствии Эндрю Уайлс стал деканом математический факультета Принстонского университета,входящего в Лигу Плюща. Но научный поиск нельзя остановить даже после раздачи самых престижных наград, а дисгармония между краткой формулировкой [Эдв80] и сложным доказательством ВТФ лишь подзадоривает [Син00] дерзких исследований. - Почему бы и не доказать проще? [Риб03] Истина - это процесс, а не финал.

[Дио07]: Диофант (2007), Арифметика и книга о многоугольных числах

[Эдв80]: Эдвардс (1980), Последняя теорема Ферма

[Син00]: Сингх (2000), Великая теорема Ферма

[Риб03]: Рибенбойм (2003), Последняя теорема Ферма для любителей

3 Человеческий разум против искусственного интеллекта

Существуют ли короткие и простые способы доказательства Великой теоремы Ферма? Нужно ли для этого тратить сто или более страниц и прибегать к помощи искусственного интеллекта? Российские краткие версии доказательств обеих теорем в теории чисел основаны на "другом подходе о которым пишет Миньён Ким (Minhyong Kim), математик из Оксфордского университета, считает: Использовать идеи физиков для решения задач теории чисел можно, но мы еще недостаточно хорошо продумали, как создать такую основу [Har17]. И еще одна его цитата: Мы находимся в точке, когда наше понимание физики достаточно зрело, и есть достаточно теоретиков чисел, заинтересованных в ней, чтобы сделать толчок (там же).

[Har17]: Hartnett (2017), «Mathematicians Explore Mirror Link between Two Geometric Worlds»

Автор придерживается принципа просто о сложном, продолжая традиции отечественных учёных в теории чисел, например в [Khi23].

[Khi23]: Khinchin (2023), Three Pearls of Number Theory

Ответ на вопрос, существует ли быстрый и простой способ доказательства Великой теоремы Ферма утвердительный. И этот способ включает в себя серию мысленных экспериментов, а также философское осмысление основ нашего мироздания.

Рассмотрим конструкцию из трех концентрических вложенных n-кубов или шаров с центрами в начале координат, рёбр или радиусы которых равны натуральным числам a, b, c. Заметим, не меняя общности, что натуральные числа в формуле (2.1) связаны как $a < b < c$, а ситуация равенства ребер $a = b$ исключена в силу иррациональности $\sqrt[n]{2}$. Случай отрицательных чисел можно рассмотреть путём переноса члена в другую часть уравнения (2.1) и замены переменных - достаточно доказать теорему для случая $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ (индекс 1 обозначает множество натуральных чисел, исключая ноль, в отличие $\mathbb{N}_0$ в эпоху цифры, где те же массивы в ряде программных языков нумеруются с нуля) и обобщить результат на целые числа $\mathbb{Z}$.

Рис. 3.1: Пьер де Ферма 1607-1665 . Главной заслугой Ферма по праву считается создание теории чисел. Ферма широко известен благодаря Великой теореме Ферма. Теорема была сформулирована им в 1637 году, на полях книги «Арифметика» Диофанта с припиской: я нашёл чудесное доказательство этой теоремы, но поля книги слишком узки, чтобы изложить его.

4 Мысленные эксперименты

Мысленный эксперимент - это гипотетическая ситуации, используемая для объяснения явления, через которые можно было бы получить результаты, если бы эксперимент действительно состоялся. Это ресурс воображения, обладающий достаточной логикой, чтобы можно было представить себе связные результаты.

Попробуем создать на основе ВТФ некоторую конструкцию. Рассмотрим проект состоящий из трёх вложенных центрированных n-кубов (шаров), a-Малый, b-Средний и c-Большой, общий центр которых совпадает с началом координат с рёбрами (радиусами) $a, b, c \in \mathbb{N}_1$, при условии следующего соотношениями между объёмами фигур: $V(B_a^n) = V(B_c^n) - V(B_b^n)$. V — это обозначение объёма. Заметим, что для $n > 3$ вместо объёма следует использовать меру, определенную ниже.

Заметим, что любой куб можно путем непрерывных и обратимых деформаций (гомеоморфизм) превратить в шар и наоборот [Вир10] - Гл. 2 § 10, 4. В топологии такие фигуры называют гомеоморфными . Поэтому ниже изложение переходит от n-куба к многомерному шару (в математике принято обозначение B_a^n где a — радиус шара, n — размерность пространства) тогда, когда это позволяет упростить изложение.

[Вир10]: Виро О Я Иванов О А (2010), Элементарная топология

Помним, что для n > 3 вместо объёма следует использовать аксиоматически определяемое понятие меры, важным свойством которого является положительность значений и аддитивность, т. е. при объединении фигур их меры складываются, что не просто удобно для физических измерений массы, длины, площади, объёма, но и выражает свойство материи нашего мира (например, закон сохранения количества вещества в ходе движения и при химических реакциях).

Аддитивность (от лат. additivus — прибавляемый) — свойство величины, состоящее в том, что её значение, соответствующее целому объекту, равно сумме её значений, соответствующих частям объекта при любом разбиении его на части.

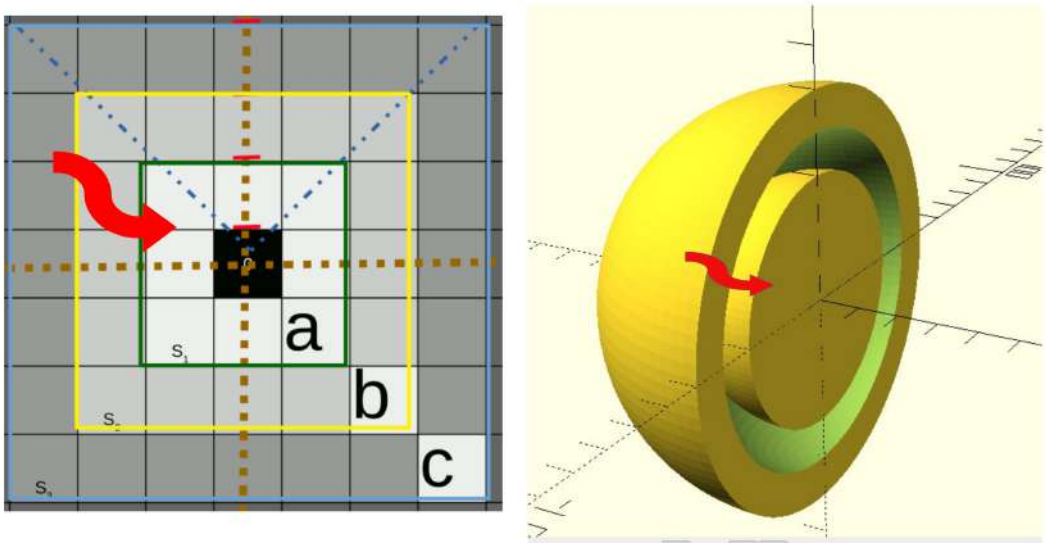


Рис. 4.2: Слева - концентрические n-кубы и справа - шары с целочисленными рёбрми / радиусами a, b, c

Мы получили конструкцию, не существующую в природе для случая n > 2, это удивительно! Несложно убедиться в неосуществимости рассматриваемого инженерного проекта.

Definition 4.1 Имя Евклида в XXI веке. В современном понимании под евклидовым пространством подразумевается один из сходных и тесно связанных объектов: конечномерное вещественное векторное пространство

с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением либо метрическое пространство, соответствующее такому векторному пространству.

В самом деле, если конструкция на Рис. 4.2 существует, что обозначается квантором ∃, то в силу постулируемой однородности евклидова пространства можно переместить, как это символизируют стрелки на Рис. 4.2, поменять местами, сопоставить ∀- любую точку / единичный куб из малого шара в соответствие другой точке / единичному кубу исследуемого подмножества пространства между средним и большим шарами так, чтобы не разрушить симметрию конструкции, не допустить неоднородностей либо пустот. Но эти подмножества (проще говоря части конструкции) не эквивалентны, а их объёмы (меры) не будут равны: $V(B_a^n) \neq V(B_c^n) - V(B_b^n)$. Или на языке теории множеств $B_a^n \not\equiv (B_c^n) \backslash V(B_b^n)$, где знак \ означает вычитание множеств, а знак ≡ - гомеоморфизм, о котором еще будет сказано ниже.

Теория множеств - через 3D моделирование

На Рис. 4.2 справа использовано кросс-платформенное приложение OpenScad, которое помимо чисто инженерных приложений является прекрасным инструментом для изучения теории множеств, операций над множествами, ассоциативного закона [Кин]. Самый обычный металлический молоток на деревянной ручке можно рассматривать как результат операций вычитаний над множествами difference, объединения - union, пересечение intersection ручки и собственно металлической части молотка. Учебных примеров кода программ предостаточно для наглядной изложения понятий множество, подмножество, универсальное множество U, пустое множество Ø, дополнение множества и т.д. Не пора ли в XXI веке изучать в школе основы теории множеств через 3D моделирование?

[Кин]: Кинтел (), OpenSCAD - это программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Это свободное программное обеспечение распространяется под лицензией GPL работает под операционными системами Linux / UNIX, Windows и Mac OS X

5 Проект, моделирующий ВТФ

Можно ли построить конструкцию в виде трёх концентрических (гипер)кубов, моделирующий ВТФ? Допустим по заказу "капризной рок-звезды"необходимо построить

дом из трёх кубических комнат: студии, охватывающей её кофейни, охватывающего кофейню зимнего сада, да так чтобы объём студии был равен объёму пространства между зимним садом и кофейней в целых кубометрах, литрах, кубических дюймах и т.д.? - Как будет доказано ниже, этот проект неосуществим в любых единицах измерения длины ребра комнат и объёма пространства комнат - одно из рёбер трёх перечисленных комнат обязательно должно быть иррациональным числом.

Препятствие заключается в том, что фигура, моделируемая формулой (2.1) должна обладать свойством центральной симметрии и не может содержать неоднородностей. Эти ограничения приводят к тому, что в результате каждый слой на Рис. 4.2 не сопоставим ни с каким другим слоем в пространстве размерностью $n > 2$. Свойство аддитивности и аксиома меры здесь не применимы — неправомерна сама постановка вопроса о послойном сравнении. С другой стороны возможность послойного сравнения слоёв требует симметрия конструкции, допускающая сложение/ вычитание / сокращение мер (объёмов для 3D-случая, площадей для случая 2D, длин для случая 1D)

Сложение / вычитание / сокращение мер - именно такие операции допустимы в однородном материале. Однородность евклидова пространства постулируется

Математики Древней Греции ввели понятие несоизмеримости линейных отрезков, как например $\sqrt{2}$ и 1. Здесь мы столкнемся с подобным, но и одновременно новым явлением. Убедимся, что преследуя условие равенства объёмов подмножеств исследуемой конструкции $V(B_a^n) = V(B_c^n) - V(B_b^n)$ и центральной симметрии взаимно исключают друг друга. В общем случае эти подмножества не эквивалентны. В этом и заключается основная идея доказательства.

6 Симметрия. Изотропность и однородность пространства

Будем различать открытый шар и отхватывающую его сферу. Сфера является так называемым слоем для замыкаемого им/ею шара или n-куба. Сфера имеет размерность на единицу меньше, чем шар. Эти утверждения известны из школьных уроков математики. Вспомните формулы для длины окружности $2\pi R$ и площади круга πR^2, площади сферы $\frac{4}{3}\pi R^3$ и объёма шара. Интересно

представить, что в одномерном мире мы получили бы открытый шар в виде отрезка, исключая его конечные точки, или нульмерные сферы, расположенные на расстоянии r от начала координат. Ниже показана сферы для 3D, 2D шаров - такие многообразия имеют размерность на единицу меньше, чем замыкаемые ими фигуры. Не случайно здесь стоит знак гомеоморфизма $\cong$ фигур.

Представим себе, что мы рассекаем нашу n-мерную сферу гиперплоскостями, начиная с простого случая четырехмерного пространства. Что мы увидим? - Трехмерную сферу с центром в начале координат, как результат пересечения четырехмерной сферы с трехмерным подпространством $\mathbb{R}^3$. Различаются открытые Северное и Южное полушария, при этом экватор исключается. Экватор становится меридианом, если повернуть фигуру под прямым углом. Для 3D случая получим обычный шар, напоминающий футбольный мяч, замкнутый 2D сферой или окружностью. Исключаем из сферы произвольный меридиан.

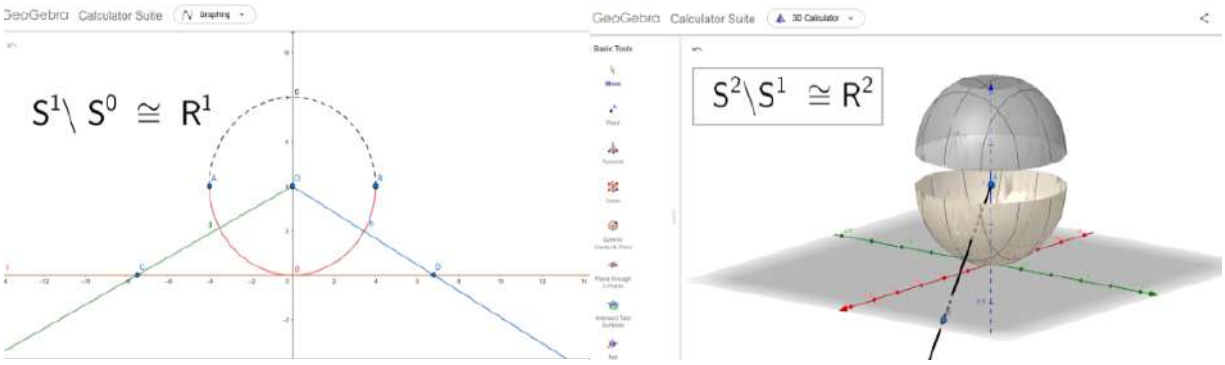


Рис. 6.3: Размерности полусфер и гиперплоскостей

Далее, для случая двумерной плоскости, открытой сферой становится привычный круг, исключая окружность. Наконец - открытый отрезок, исключая конечные точки.

Definition 6.1 В результате получится последовательность не пересекающихся геометрических элементов на сфере ряда размерностей от 1 до n-1. Это так называемые гипермеридианы, которые пригодятся нам в дальнейшем.

’ Теперь представим себе каскад непрерывно следующих сфер и меридианов, охватывающий каждую из этого мно-

жества. Допустим, что отыскалась ∃ - тройка натуральных чисел a, b, c , удовлетворяющих (2.1), тогда в этом случае каждая точка пространства в интервале между средней и большой сферами отобразится в малую сферу $k\int_b^c r^{n-1}dr = k\int_o^a r^{n-1}dr$, где k - некоторый коэффициент, зависящий от размерности пространства n. В силу симметрии конструкции любое множество этих сфер может быть отображено в множество других сфер меньшего радиуса, число малых сфер, очевидно, должно быть больше в силу условия равенства мер.

При объяснении интеграла преподаватели часто оперируют понятиями разбиения фигуры, шара B_r^n на отдельные части или дифференциала $S_r^{n-1}\Delta n$, (здесь $\Delta n = 1$) как при разрезании лимона, которые затем собираются в единое целое. Но применение высшей математики здесь будет излишним. Вместо записи интегралов для послойного сравнения множества сфер достаточно записать приведенное здесь уравнение в терминах теории множеств и отношений эквивалентности. Заметим, что $S^m \backslash S^{m-1} \cong \mathbb{R}^m, dim(S^m \backslash S^{m-1}) = m$, где $\mathbb{R}^m$ - размерность пространства m, что наглядно следует из. Рис. 6.3, который можно интерпретировать как отслеживание траектории луча света, испущенного из точечного источника. Очевидно взаимно однозначное отображение точки в точку в образе и прообразе.

$$\{S_j\} \mapsto \{....S_i\} \tag{6.1}$$

это означает, что множество из одного элемента, содержащее единственный слой S_j, отображается на множество слоёв, содержащего несколько элементов S_i с помощью функции эквивалентности, при этом точка отображается в точку, элементарный куб - в элементарный куб: $1^n \mapsto 1^n$. Другими словами, существует некоторая функция эквивалентности $f(X) \to Y$, отображающая открытое множество X на множество Y. В отношениях эквивалентности каждый образ имеет прообраз.

В нашей конструкции множество непрерывно следующих друг за другом сфер с целочисленными радиусами, образуют открытые шары.

Примеры индуцированной топологии

В начальной школе изучается текстура спиленного дерева, слоистая структура земной коры в разрезе, следы слоев на зонде, извлеченном из сверхглубокой скважины - всё это примеры индуцированной топологии.

Великая теорема Ферма исключает существование такой симметричной конструкции при соблюдении условий эквивалентности и непрерывности. Почему? Чтобы понять этот феномен, необходимо проанализировать уравнение (6.1) по элементам:

Таблица 6.1: Любая сфера из прообраза отображается в образ отдельно по каждому элементу.

n-1 Сфера	S^{n-2}-гипермеридиан	...	Элемент S^2-сфера	S^1 -окруж.	Радиус
S_j^{n-1}	$S_j^{n-2} \backslash S_j^{n-3}$	...	$S_j^2 \backslash S_j^1$	$S_j^1 \backslash S_j^0$	j
$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	...
S_i^{n-1}	$S_i^{n-2} \backslash S_i^{n-3}$	...	$S_i^2 \backslash S_i^1$	$S_i^1 \backslash S_i^0$	i
S_{i-1}^{n-1}	$S_{i-1}^{n-2} \backslash S_{i-1}^{n-3}$	...	$S_{i-1}^2 \backslash S_{i-1}^1$	$S_{i-1}^1 \backslash S_{i-1}^0$	i-1
...	...	...	...	...	...

Каждый слой содержит элементы размерностью от 1 до n-1. Здесь исследуемая структура заполнялась слоями от периферии j ... i, (i-1) к центру, поэтому индексы перечислены в порядке убывания. Функция эквивалентности сопоставляет каждый элемент слоя S_j в отдельности с множеством элементов соответствующей размерности. При этом в силу симметрии из любого элемента слоя гипермеридиан более низкой размерности может быть выбран произвольно, подобно тому, как произвольно выбирается грань / ребро куба.

Обеспечить одновременное соответствие элементов слоя более чем по одной размерности невозможно из-за неразрешимости для $n > 2$ сформулированной ниже системы из n-1 уравнений, где i и j - натуральные радиусы концентрических сфер:

$$\begin{cases} j^{n-1} = i^{n-1} + (i-1)^{n-1} + \dots \\ \dots \\ j^2 = i^2 + (i-1)^2 + \dots \\ j = i + (i-1) + \dots \end{cases} \tag{6.2}$$

Каждое уравнение содержит два и более слагаемых справа. Этот ряд уравнений продолжается от n-1 до степени 1. Любой элемент произвольной размерности может быть

отображен функцией эквивалентности только на элемент той же размерности [Tpe01]. Структура слоев определяется только размерностью пространства и не зависит от геометрического размера слоя.

[Tpe01]: Трельфалль (2001), Топология. Зейферт Г Трельфалль В

Условие эквивалентности или равенства объёмов (точнее мощности множества точек для любого n-мерного пространства) отображаемых слоев означает, что любой произвольный слой большой сферы может быть отображен на множество последовательно следующих малых сфер.

Число слоев в образе в правой части каждого уравнения ≥ 2, поскольку 2 - натуральное число, следующее за 1. Это приводит к системе уравнений, которая неразрешима даже в вещественных числах $\mathbb{R}$. Это можно проверить с помощью неравенства треугольника $\left\|x+y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$ для евклидова пространства, где сумма длин катетов прямоугольного треугольника больше длины гипотенузы. Случай равенства наступает только при нулевом катете и исключается по условиям Великой теоремы Ферма.

В силу ассоциативного закона

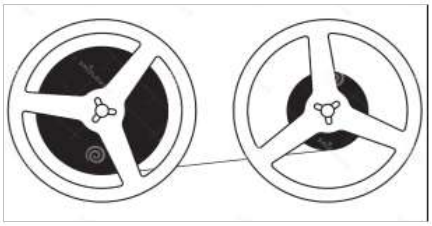
При числе членов в системе уравнений 6.2 больше двух можно сосредоточиться на последней паре уравнений, представив себе операцию сложения двух и более ортогональных по отношению друг к другу векторов в n мерном евклидовом пространстве: $x, y, z, w \ldots$. Подразумеваем под x^2 - квадрат длины вектора, а x - проекцию этого вектора на любую фиксированную ось, обозначаемую как x_{pr}. В силу ортогональности итоговая сумма векторов будет иметь квадрат модуля, равный сумме квадратов модулей исследуемых векторов $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \ldots$, а проекция на выбранную ось $x_{pr} + y_{pr} + z_{pr} + w_{pr} + \ldots$ сумме проекций. Далее остаётся применить ассоциативный закон для членов одинаковой размерности и свести задачу к уже рассмотренному неравенству треугольника.

7 Пифагоровы 3-ки ∃ только на 2D плоскости

Пифагоровы 3-ки существуют только на 2D плоскости. Закономерно вытекает вопрос: почему? Пифагоровы тройки использовались для вычислений ещё древнейшей цивилизацией Шумеров за тысячелетия до рождения самого Пифагора для решения тригонометрических задач, включая сложение / вычитание углов. В чем особенности двумерной плоскости по сравнению с n-мерным пространством $n \geq 3$? Пифагоровам треугольникам посвящена книга [Сер59].

[Сер59]: Серпинский (1959), Пифагоровы треугольники

Чтобы найти простейший ответ, можно воспользоваться старым добрым магнитофоном, в котором лента перематывается с левой катушки на правую или наоборот. В этом случае сумма площадей левой и правой бобины ленты остается постоянной и равна толщине ленты, умноженной на ее длину.



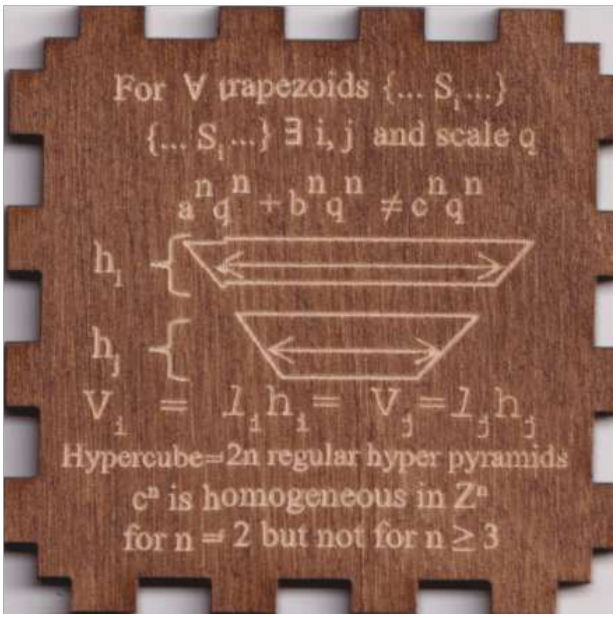


Рис. 7.4: Эквивалентность слоев на 2D-плоскости для кругов и квадратов. Справа - фотография грани авторского 3D-куба согласно заявке патента на пром. образец № 2021501435/49 от 20.03.2021

Допустим, мы зафиксировали момент, когда левая катушка/ бобина имеет радиус j больший, чем правая i. Когда мы говорим о необходимости сохранения симметрии фигуры при непрерывном отображении или перемещении слоя, это означает, что один оборот ленты слева должен укладываться в целое число оборотов бобины справа: два,

три, четыре и т.д., но не дробное число, иначе будет нарушено условие сохранения симметрии при перемещении или отображении слоев. Действительно, частично заполненный слой имеет дефект симметрии, он асимметричен. Предположим мы можем изготовить ленту произвольной толщины, тогда для любого заданного соотношения радиусов окружностей катушек мы легко добьемся симметрии в этой модели, а именно: один слой или виток на большой катушке эквивалентен множеству полных витков или слоев на малой катушке.

В общем случае, речь идет не об одном слое, а упорядоченном множестве слоев $\{S_j...\} \mapsto \{....S_i\}$. Здесь записаны в прообразе S_j - первый элемент, а на образе S_i - последний элемент. (Помним, что исследуемая структура заполнялась слоями от периферии j. . . i, (i-1) к центру. Из этого следует, что целочисленные радиусы слоев $j > i$ должны быть не менее $j = i + 1$, иначе можно просто перемотать ленту или поменять катушки.)

Отметим, что в случае n-куба (определение дано ниже) размерности 2 или, проще говоря, квадрата на плоскости, картина аналогична. В силу симметрии удобно сосредоточиться на изучении единственного сегмента, образованного лучами, исходящими из центра n-куба, совпадающего с началом координат, в вершины одной грани этого куба, и применить формулу для площади трапеции по произведению длины средней линии на ее высоту (Рис. 7.4 справа). Легко убедиться в сохранении объёма меры подмножества слоев прообраза, отображенного в образ, на множество последовательно и непрерывно следующих слоев, расположенных ближе к началу координат. Одновременно сохраняется симметричная форма исследуемой конструкции. Этот случай уникален для пространства размерности два n = 2 или плоскости. Для пространств иной размерности одновременное сохранение меры (объема) и симметричной формы в образе и прообразе невозможно. Почему это так объясняется ниже.

Каждый слой гиперкуба имеет элементы размерности $n - 1, n - 2, \ldots 1$ (гипер)граней, а (гипер)ребро таких элементов описываются формулой $i^k 1^{n-k}$ - обозначим такой параллелепипед более кратким синонимом ортотоп (orthotope) или гиперпрямоугольник.

Не обязательно уметь интегрировать

Не обязательно уметь интегрировать, чтобы вычислить объём (гипер)пирамиды - достаточно научиться рассекать (гипер)куб на идентичные гиперпирамиды по числу (гипер)граней. И не ограничиваться только

правильными (гипер) пирамидами. Для этого можно мысленно, заполнить пирамиду жидкостью, поместив её в однородное гравитационное поле, можно применить закон Паскаля и заметить, что давление на основание пирамиды зависит от веса, массы, объёма пирамиды, но в конечном счёте, однозначно определяются высотой и площадью основания, независимо от формы пирамиды. Примените полученную формулу $\frac{H}{n}S$ к 2D, 3D, 4D . . . и убедитесь в её соответствии известным из школьной программы площади треугольника и объёму пирамиды. Помните, что площадь S соответствует мере грани размерности n-1. Творческое воображение упрощает вычисления и делает интегрирование в ряде случаев ненужным!

Для n -мерного пространства Пифагоровы тройки могут быть в виде Декартова произведения результата вычитания квадратов на некоторый ортотоп: $(c^2 \backslash b^2 = a^2) \times d^{n-2}$ где a, bc -это Пифагорова тройка на двумерной плоскости.

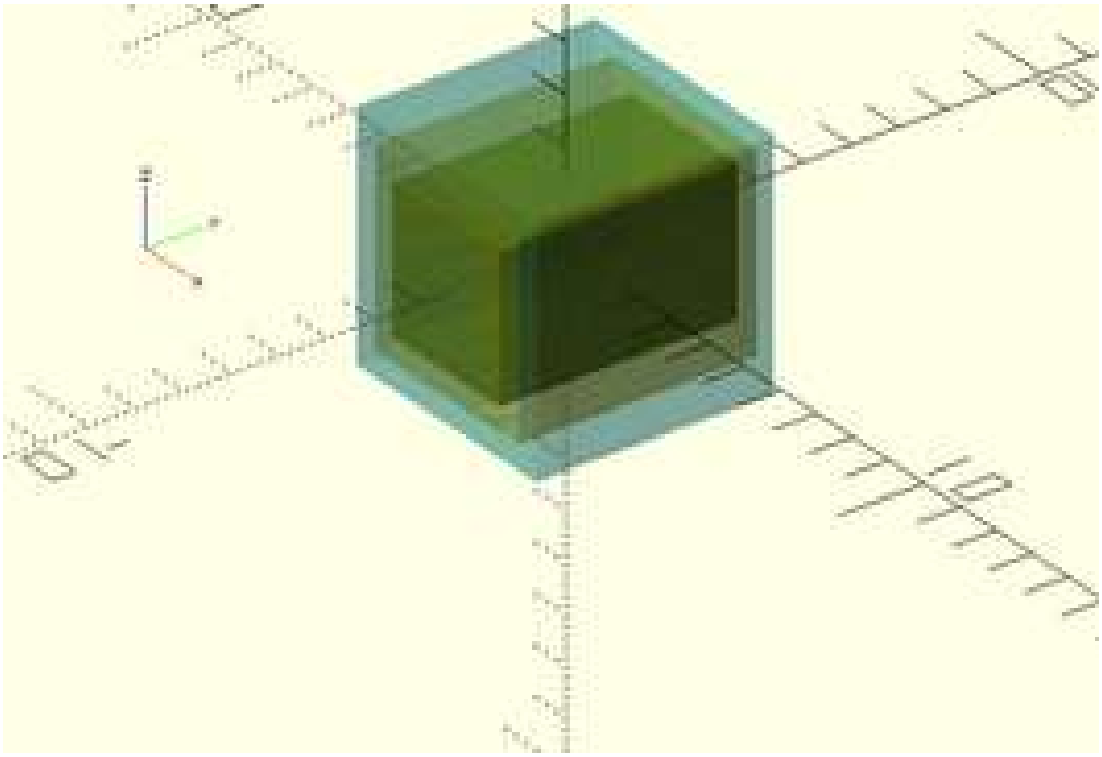


Рис. 7.5: Пример Пифагоровой тройки в 3D. Соблюдена лишь осевая симметрия. Фигура, соответствующая с позиции теории множеств арифметическому выражению $(5^2 \backslash 4^2 = 3^2) \times 5^1$

Рисунок 7.5 напоминает многожильный кабель квадратного сечения, где соблюдена лишь осевая симметрия, но

не центральная симметрия.

В школе и вузе на уроках физики, геометрии, черчения, инженерной графики или 3D моделирования учащиеся привыкли работать с осевой симметрией, симметрией относительно плоскости, построенной на определенных осях, а также с центральной симметрией. Легко обобщить приведенную выше таблицу на n-мерный случай.

Таблица 7.2: Симметричность в четырёхмерном пространстве n = 4.

Симметрия относительно:	Симметричность относительно подпространства $\perp$ размерностью	Симметричность вдоль подпространства $\parallel$ Размерностью (степень симм.)	Во что отобразится точка с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4)
I	II	III = n - II	IV
Куба по осям X_1, X_2, X_3	3	1	$(x_1, x_2, x_3, -x_4)$
Плоскости $(X_1 \times X_2)$,	2	2	$(x_1, x_2, -x_3, -x_4)$
Оси X1	1	3	$(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$
Точки в начале координат и в центре всех гиперкубов	0	4	$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$

Что препятствует для случае трёх и более мерного пространства - "наматывать"слой за слоем (сферу за сферой) с большого шара на малый подобно распусканию вязанной вещи из шерстяной нити? Попробуем рассмотреть этот вопрос с позиции "чистой математики для этого необходимо кратко рассмотреть некоторые понятия теории множеств, непрерывности функции, метрической топологии, гомеоморфизма, попарно не пересекающихся классов эквивалентности.

Доказательство ВТФ сводится к разрешению вопроса о неустранимом конфликте между центрально симметричной формой и содержанием в конструкции из трёх концентрических шаров $B_c^n \backslash B_b^n \ncong B_a^n$ с целочисленными радиусами $a, b, c \in \mathbb{Q}$ для случая размерности пространства $n > 2$, поскольку симметрия и условие сохранения меры (объёма) при отношениях эквивалентности должна была бы также выполняться для произвольного "большого"слоя, отображаемого в множество "малых"слоёв, но $\nexists \{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$. Этот конфликт сформулирован на первой странице обложки монографии.

8 Непрерывность. Гомеоморфизм. Классы эквивалентности

Российская фигуристка Камила Валиева вызывает восхищение, грациозно исполняя плавный танец. Танец состоит из различных фигур, плавно переходящих друг в друга. Можно проиграть фильм задом наперед - за исключением

прыжков отображения фигур будут обратимы. Аналогично, представьте себе некоторую функцию $f(X) \to Y$, отображающую открытое множество X на множество Y.

Гомеоморфизм множеств $X \cong Y$

У каждогообраза есть прообраз. Выберем в образе открытую окрестность точки B, например, в виде шара. Предположим, что точка A полностью отображается на эту окрестность точки B. Это и есть определение непрерывности. Пусть также существует обратная непрерывная функция $f^{-1}(Y) \to X$. Мы получили гомеоморфизм $X \cong Y$.

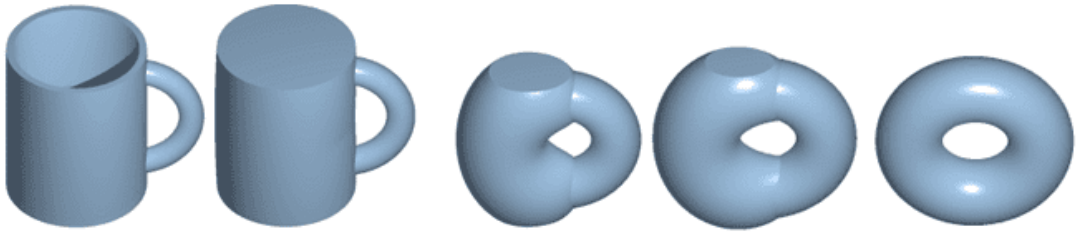


Рис. 8.6: Говоря о гомеоморфизме, отметим интересное преобразование кружки в тор и наоборот.

В терминах топологической теории, понятия гомеоморфизма доказательство ВТФ сводится к невозможности построения трех определенных выше концентрических шаров с центром в начале координат и с целочисленными радиусами, так, чтобы $B_c^n \backslash B_b^n \mapsto B_a^n$ в однородном (что означает отсутствие разрывов / пробелов между последовательно следующими слоями), симметричном пространстве $\mathbb{R}^n$ для случая размерности пространства $n > 2$. Вместо стрелки в последнем выражении можно поставить знак $\cong$ гомеоморфизма.

9 Сведения из теории множеств

3D-моделирование предоставляет широкие возможности для демонстрации операций пересечения, объединения и вычитания множеств. Пример обозначение пустого множества: $\emptyset$. Вот обозначение универсального множества: U. На диаграмме Эйлера-Вена универсальное множество соответствует всему прямоугольнику. Базовые знания о дополнении множества будут полезны. Шахматная доска

- это хорошо известная иллюстрация Декартова произведения, обозначаемого как ×.

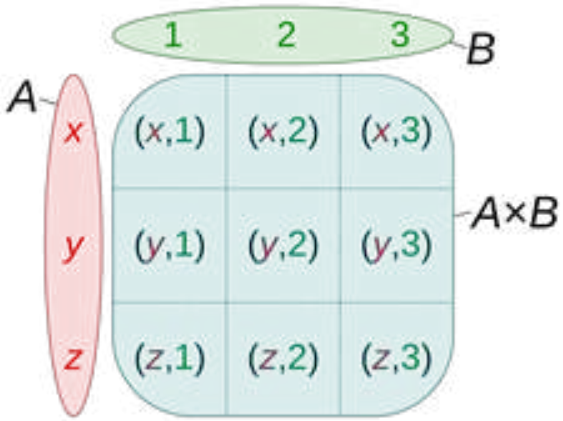


Рис. 9.7: Пример Декартова произведения множеств. Он напоминает шахматную доску.

Но почему только числа? Самый обычный металлический молоток на деревянной ручке можно рассматривать как результат операций различия над множествами, таких как объединение ∪, пересечение ∩, вычитание \ ручки и собственно металлической части молотка.

Автор призывает читателя обратиться к специальной литературе [Вин18], [Бух13] математическим форумам, онлайн-курсам и справочнику для получения начальной информации в перечисленных областях знаний [Нов04].

[Вин18]: Виноградов (2018), Основы теории чисел

[Бух13]: Бухштаб (2013), Теория чисел

[Нов04]: Новиков (2004), Дискретная математика для программистов

При моделировании трёхмерных фигур можно убедиться в преимуществах знания основ теории множеств и, кроме того, проверить действие ассоциативных правил, когда выражения можно переписать альтернативными способами. Например, смоделировать цепь множеств из слоёв / сфер, см. формулу (11.2) ниже.

Мощность множества и функция эквивалентности

Мощность множества - это не что иное, как количество элементов в нем. Это понятие легко понять на примерах. Рассмотрим множество $\mathbb{A} = \{▲, ▲, ▲\}$ треугольников и множество $\mathbb{B} = \{★, ★, ★, \}$ звезд. Эти множества называются равномощными, так как имеют одинаковое число элементов, обозначаемых этими символами A эквивалентно B или $|A| \sim |B|$. Легко видеть, что множество натуральных чисел N эквивалентно множеству целых

чисел $\mathbb{Z}$, так как каждая пара: $1 \mapsto \pm 1$, $2 \mapsto \pm 2$, $3 \mapsto \pm 3$ и так далее нумеруется одним числом. Такое множество называется счетным. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ является счетным. И множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ также является счетным.

Необходимость считать предметы вызвала появление натуральных, то есть положительных целых чисел. Дроби появились при торговых расчетах и при измерениях величин. Развитие геометрии привело к выяснению того факта, что диагональ квадрата со стороной единица не может быть измерена точно рациональными числом, хотя может быть измерена им с произвольной точностью. Таким образа, внутреннее развитие математики привело к появлению длин, неизмеримых тори помощи рациональных чисел. Следовательно, из внутренних потребностей математики возникли нерациональные числа, которые стали называть иррациональными.

[Пон86]: Понтрягин (1986), Обобщения чисел

Так коротко и ясно пишет Л.С. Портнягин в [Пон86]. Из всего списка литературы, пожалуй именно это книгу просто необходимо прочитать для точного понимания материала Монографии.

Математик Георг Кантор предложил оригинальный способ обхода каждого рационального числа в виде дробного p делить на q. Представим себе бесконечный кинотеатр со строками - рядами p и столбцами - местами q.

Рис. 9.8: Счетность множества рациональных чисел Счетность множества рациональных чисел Счетность множества рациональных чисел

Очевидно, безбилетник в ряде p на месте q будет настигнут контролёром. Таким образом, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счетным. В случае вещественных чисел $\mathbb{R}$, включающих иррациональные числа, которые не могут быть представлены в виде дроби, это не так.

Контролер следует по бесконечному залу в поисках безбилетника, по диагоналям наискосок мест и рядов, например, стартуя с левого верхнего угла, он двигается по зигзагообразной линии, постепенно расширяя зону досмотра в виде наклоненного треугольника с растущей гипотенузой и катетами, расположенными вдоль сцены и левого края зала.

Важно помнить, что, говоря об отношениях, задаваемых непрерывными и взаимно обратимыми функциями, мы

можем сравнивать только пространства одинаковой размерности. Возьмем, например, карандаш. Можно представить себе точечный источник света, освещающий его сверху, и этот вертикально ориентированный карандаш отобразить в точку, но обратное преобразование из точки в карандаш сделать нельзя, так как нарушается принцип взаимной однозначности. Антиподом взаимной однозначности является, например, определяемая аксиомой [Ю12] мера $f : R^n \mapsto R$ над множеством или объём фигуры для трехмерного случая. Мера обладает свойством аддитивности, что не просто удобно для физических измерений массы, объёма, но и выражает свойство материи нашего мира (вспомним закон сохранения количества вещества при химических реакциях).

[Ю12]: Ю (2012), Элементы теории множеств и математической логики

Рис. 9.9: (1845–1918) Наиболее известен как создатель теории множеств. Основатель и первый президент Германского математического общества, инициатор создания Международного конгресса математиков.

10 Метрическая топология. Конструкция

Обратимся к теории множеств, бинарных функций и основам топологии. Совокупность множеств в виде открытых n-кубов e^n с центром в начале координат, т.е. Декартово произведение открытого отрезка $e^n = (-\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})^n$ определяет базу топологии Ω в метрическом пространстве R^n. Эквивалентная топология задается набором множеств в виде открытых шаров - различаются только их метрики: $max(x_j) < r$ для первого и $\sum_1^n x_j^2 < r^2$ для второго [п.4.3. в 5]. Ниже под словами гиперкуб и слой будут также использоваться открытая сфера размерности n, радиуса r B_r^n и ее замыкание - сфера S_r^{n-1} размерности n-1 и радиуса r.

Рис. 10.10: Вложенные n-кубы и шары

Структуры, определяемые этими базисами, совпадают.

[Вир10]: Виро О Я Иванов О А (2010), Элементарная топология

Говорят, что здесь определена метрическая топология [Вир10], и задано метрическое пространство. С позиции топологии сфера и куб гомеоморфны. (Сравните кубический арбуз и округлый куб на рисунке 10.10.

Представим себе вложенные друг в друга открытые шары. Сами сферы, замыкающие шар, не принадлежат к открытому шару. Для n-мерного случая все работает так же, но здесь вместо двух координат будет n координат. Сумма их квадратов остается меньше квадрата радиуса R. Для случая кубов картина принципиально не меняется, просто используется несколько иная метрика, где вместо квадрата подставляется функция максимального значения X или Y меньше радиуса R. Для случая n-мерного пространства у нас будет на два, а n слагаемых.

Аналогичную картину вложенных слоев, похожую на "Русскую Матрёшку можно наблюдать на двумерной плоскости пронзание n-куба. Мы хотели бы подчеркнуть именно пронзание, а не рассечение, поскольку из основ линейной алгебры легко понять, что куб рассекается такой плоскостью на два несвязных пространства. Но для пространств размерности 4D, начиная с тессеракта, двумерная плоскость может быть замкнута сколь угодно малым непрерывным контуром, поперечным к ней. Картина напоминает запеченное яблоко на шпажке. Действительно, из курса линейной алгебры [Кур13] следует, что если AX = 0, то для 3D rank(X) = n - rank(A) = 3-2 = 1 - т.е. точка делит прямую на два луча, а начиная с 4D, плоскость можно продевать, сквозь множество точек пересечения фигур как нитку в игольное ушко. К сожалению, этот очевидный факт не осознается некоторыми учеными, когда они сталкиваются с цепью множеств в виде n-кубов, вложенных друг в друга!

[Кур13]: Курош (2013), Курс высшей алгебры

Для шаров ситуация самоочевидна. Ранее мы убедились см. Рис. 4.2, что в топологии шар и куб гомеоморфны друг другу и легко превращаются друг в друга в результате деформации без разрыва пространства.

Удивительно, что на идеально гладкой однородной поверхности n-мерного шара существуют геометрические элементы всех размерностей от 1 до n-1 (гипермеридины), которые непрерывной функцией отображаются раздельно по каждой размерности! - А это ключ к

доказательству ВТФ.

Для случая n-куба размерности два или, проще говоря, квадрата на плоскости картина аналогична. Что мешает нам провести аналогичный эксперимент для случая трех и более мерного пространства? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо познакомиться с понятием попарно не пересекающиеся классы эквивалентности.

Не пересекающиеся классы эквивалентности

Взгляните на фотографию Тадж-Махала, памятника индийской архитектуры. Он обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. Симметрия является прекрасной демонстрацией работы функции эквивалентности, но есть и другие примеры: перемещение твердого тела, его вращение и так далее.

Рис. 10.11: Тадж-Махал состоит из разных элементов: колонны отображаются в колонны, купола в купола, и никакого смешения нет.

Обратите внимание, что Тадж-Махал состоит из разных элементов: колонны отображаются в колонны, купола в купола, и никакого смешения нет. Другой пример - шахматы. Пока игра продолжается на паритетных началах, пешки обмениваются на пешки, легкие фигуры: слон, конь - на легкие фигуры, ладья обменивается на ладью, а ферзь - на ферзь. Это попарно не пересекающиеся классы эквивалентности. Функция эквивалентности работает с каждым классом отдельно, это легко доказать строго математически. И снова никакого смешения не происходит. Другими словами, отношения эквивалентности работают с каждым классом эквивалентности отдельно. Можно разложить слой на элементы разных размерностей и снова обратиться к табл. 6.1

$$S\backslash \sim = \{S_{n-1}\backslash S_{n-2}, \ldots S_2\backslash S_1, S_1\backslash S_0\} \tag{10.1}$$

(в частности, для $n = 3$ это две полусферы, исключающие окружность в плоскости (0,x,y), для $n = 2$ окружность, исключая две конечные точки $(0, -r/2), (0, r/2)$. Выражение $S| \sim$ обозначает факторизацию слоя, полезную для анализа его элементов. Каждый из перечисленных классов имеет размерность подпространства, которому он принадлежит

$$S_m \backslash S_{m-1} \cong \mathbb{R}^m, dim(S_m \backslash S_{m-1}) = m. \qquad (10.2)$$

Применим факторизацию к слою из нашей конструкции в виде трех концентрических сфер или n-кубов. Произвольно выбранный элемент (подмножество элементов) из разности множеств $1^n \in c^n \backslash b^n \mapsto a^n$ отображается в малый куб (шар) в силу формулировки ВТФ.

Определение 10.1 Ограничим прообраз до одного слоя. Такая операция в теории множеств называется ограничением отношений эквивалентности на подмножество, как если бы орнамент был ограничен с помощью трафарета.

И зададимся вопросом во что отобразится слой? - В силу сохранения центральной симметрии образ слоя также должен быть симметричным. Следовательно, образом будет множество последовательно и непрерывно следующих слоёв.

Остановимся на непрерывном отображении единичных гиперкубов 1^n слоя в множество слоёв $\{S_j\} \mapsto \{....S_i\}$.

11 Цепь множеств из n-кубов

Как уже говорилось выше, a-Малый n-куб a^n - это множество слоев, индексированных от 1 до k, b-Средний b^n - множество слоев от k+1 до k + l и c-Большой c^n - множество слоев от k+l+1 до k + l + m, где k,l, m $\in \mathbb{N}_1$.

Попробуем создать конструкцию в OpenScad

```
//*******************************************
// Листинг 1 Слой.scad
// Эта программа создаёт 3D- уголок из
// элементов разных размерностей (2-D-сайдинг)
// пара уголков 1-D и вершина куба 1^n - 0-D
// Вершина уголка - в начале коорд.
// (center=false, а не center=true)
//*******************************************

q = 5;  // Задаёт Маштаб. Не забываем знак «;»
edge = 5*q; // Рзамер ребра (гипер)куба
```

```
step = 1.5; // Шаг или зазор step >= 1

cube([edge,edge,1],center=false);
// Нижняя грань куба, ортогональная Y,
// размером edge

translate([edge + step,0,step])
// Перемещение курса в точку с коорд. (x,y,z)

cube([1,edge,edge],center=false);
// Грань куба, ортогональная оси X

translate([edge + step,0,0])
// За оператором translate без ; следует фигура
 cube([1,edge,1],center=false);
 // Ребро куба, расположенное поперек оси X
translate([0,edge + step,0])
 cube([edge,1,1],center=false);
 // Ребро куба, расположенное поперек оси Y
translate([0,edge + step,step])
 cube([edge,1,edge],center=false);
 // Грань куба, ортогональная Y
translate([edge + step,edge + step,step])
 cube([1,1,edge],center=false);
 // Ребро куба, расположенное паралл. оси Z
ranslate([edge + step,edge + step,0])
 cube([1,1,1],center=false);
 // Вершина куба.
```

В результате получится слой, а совместно с программным циклом

```
for (j = [ i : -1 : 1])
//Чуть измененный листинг 1}
```

для построения слоёв от периферии к центру используется счётчик $j = i, i-1, i-2 \ldots 1$ - образуется множество слоёв или проще говоря уголок, как на рисунке 11.12.

Definition 11.1 Слой определяется как разность подмножеств $S_i = e_i \backslash e_{i-1}$, i $>$ 1, где e_i обозначает n-куб с ребром i.

Ниже приводится полностью упорядоченное множество слоев (также называемое строго упорядоченным множе-

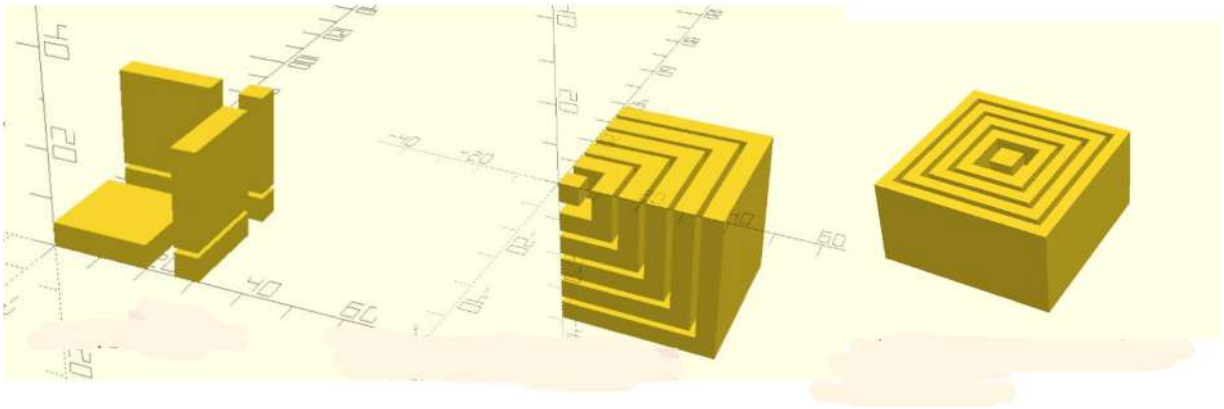


Рис. 11.12: Построение одного слоя (слева) и множества слоев в октанте (+, +, -)

ством, линейно упорядоченным множеством, обозначая отношения порядка $\prec$):

$$Q_0 \subset Q_1 \subset Q_1 \cdots \subset Q_{k+l+m} \subseteq U \tag{11.1}$$

или

$$e_0 \prec S_1 \prec S_2 \cdots \prec S_{k+l+m} \in U \tag{11.2}$$

где под универсальным множеством $\mathcal{U}$ понимается c-Большой куб. В качестве первого гиперкуба e_0 может быть 1^n или 2^n, в зависимости от четности, но с учетом приведенных ниже рассуждений это не существенно. Разложение множества на подмножества мы рассматривали выше. Цепь множеств (11.1, 11.2) определяет топологию в $\mathbb{Z}^n$. С другой стороны, эта формула описывает одномерный зонд, пронизывающий три вложенных гиперкуба через общий центр.

Декартово произведения двух ортогональных зондов представлено на Рис. 4.2, слева - исследователь получит двумерную плоскость, независимо от размерности пространства. Топология n-куба индуцирована на этом подмножестве, так как $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{Z}^n \in \mathbb{R}^n$. Эффект параллакса отсутствует

[Gal15]: Galperin (2015), Multidimensional Cube

Размерность слоя n-куба можно увидеть из хорошо известного бинома Ньютона. См. также [Gal15] Чтобы понять, из каких элементов состоит произвольный слой S_i, воспользуемся треугольником Паскаля, в котором коэффициенты $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, число сочетаний записаны по строкам, и каждый коэффициент, за исключением крайних единиц, получается путём суммирования двух соседних, находящихся строкой выше, вот его первые строки: 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1 и т.д. как на таблице 11.3 на полях книги.

Таблица 11.3: Треугольник Паскаля

n	Бином. коэфф.
1	1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
...	...

В результате старший член многочлена приведенного ниже исчезает, а степень многочлена понижается до n-1. Знак суммы $\sum$ можно заменить на знак объединения $\cup$.

Таим образом анализ структуры слоя дает следующее:

$$S_i = (i+1)^n - i^n = Q_{i+1} \backslash Q_i = \bigcup_{k=1}^{k=n-1} C_n^k i^k 1^{n-k} \qquad (11.3)$$

Здесь $i^k 1^{n-k}$ следует воспринимать как Декартово произведение отрезков. Посмотрите на угол 11.12 (левая часть рисунка) рисунка), сравните с каскадом уголков (центр того же рисунка), которые вместе образуют куб (правая часть того же рисунка). Декартово произведение линейного отрезка на квадрат образует куб. Это свидетельствует о соблюдении принципа размерности.

Гиперкуб и разложение по включениям-исключениям

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега λ. Для $a > 0$ определим гиперкуб:

$$Q_a = [0, a]^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le a \ \forall j\}.$$

Для $0 < b < a$ рассмотрим слой между кубами:

$$S_{a,b} = Q_a \setminus Q_b.$$

Его объём известен:

$$V_{a,b} = \lambda(S_{a,b}) = a^n - b^n.$$

Разложение по включениям-исключениям

Для непустого подмножества $J \subset \{1, \ldots, n\}$ определим множество:

$$F_J = \{x \in Q_a \mid x_j > b \text{ для всех } j \in J\}.$$

На координаты, не входящие в J, ограничений кроме $0 \le x_j \le a$ не накладывается.

Объём F_J равен:

$$\lambda(F_J) = (a-b)^{|J|} a^{n-|J|}.$$

Применяя принцип включений-исключений к событиям $A_j = \{x \in Q_a : x_j > b\}$, получаем равенство

индикаторных функций:

$$\mathbf{1}_{S_{a,b}}(x) = \sum_{J\neq\varnothing}(-1)^{|J|-1}\mathbf{1}_{F_J}(x).$$

Интегрирование даёт знакопеременную формулу для объёма:

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(a-b)^k a^{n-k}. \qquad (1)$$

Более подробно о симметрии гиперкуба и связи с функцией Мёбиуса см. 5

Приведенные выше формулы получены из бинома Ньютона и описывают слой как разность последовательных гиперкубов с общей вершиной, совпадающей с началом координат. Альтернативный способ представления исследуемой конструкции состоит в том, что начало координат, располагается в общем центре гиперкубов. Его можно получить путем n отражений гиперплоскостей, т.е. умножения на 2^n, что принципиально не меняет сути формулы. Обе геометрические конструкции трансформируются друг в друга отражениями от гиперплоскостей, перпендикулярных каждой из n координатных осей, либо рассечением и масштабированием фигуры.

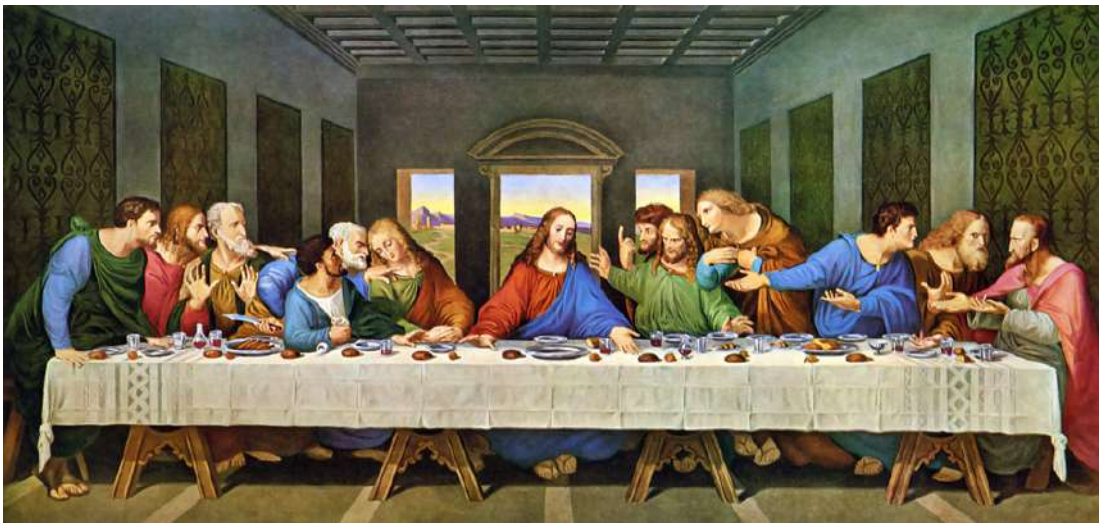


Рис. 11.13: Картина Тайная Вечеря Леонардно да Винчи демонстрирует эффект параллакса. Все линии: продолжение углов стен, потолка, пола сходятся в точке схода - на лбу Иисуса Христа. Это создает ощущение объёмности пространства

Каждый слой гиперкуба имеет элементы размерности $n-1, n-2, \ldots 1$ (гипер)граней, а (гипер)ребро таких элементов описываются формулой $i^k 1^{n-k}$ - обозначим та-

кой параллелепипед более кратким синонимом ортотоп (orthotope) или гиперпрямоугольник.

Если в полученном множестве убрать повторяющиеся элементы, т.е. сократить биномиальные коэффициенты, то результат полностью совпадет с формулой, полученной ранее для описания структуры сферы (11.2) - ещё одно наглядное выражение гомеоморфизма n-шаров и n-кубов.

А в листинге на полях номер слоя может быть любым натуральным числом. И если применить программный цикл, то весь гиперкуб легко будет заполнить послойно от центра к периферии.

```
//Слой S5 номер 5 (i = 5)
i = 5;
difference()
{
 cube (  i, center = true);
 cube(i - 1, center = true);
}
```

Взгляд из n-мерного пространства
Краткая форма листинга на полях универсальна и не зависит от размерности пространства (если бы OpenScad был настроен на работу с n -мерным пространством). Говоря более детально, следует запрограммировать масштаб и длину ребра гиперкуба, определить шаг и зазор между слоями. Далее - последовательно перемещать курсов в точку с координатами (x, y, z) и создавать ортотопы необходимых размеров в виде трёх граней, трёх рёбер и одной вершины. В результате получится слой, а совместно с программным циклом образуется множество слоёв

В случае квадрата (n = 2) на плоскости, см. выше Рис. 7.4 формулу для площади трапеции в виде произведению длины средней линии на ее высоту. Это убеждает, что на плоскости при работе функции эквивалентности сохраняется как объём - мощность подмножеств, так и симметричная форма конструкции, соблюдается непрерывность.

Важно помнить, что, говоря об отношениях непрерывных и взаимно обратимых функций, мы можем сравнивать только пространства одинаковой размерности. Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод, что точка не может быть эквивалентна отрезку, отрезок - квадрату или кругу на плоскости, а эти последние фигуры - трехмерному кубу. Из рис. вытекает, что непрерывное, взаимно однозначное соответствие возможно лишь между фигурами одинаковой размерности. Тот же принцип применим и к дискрет-

ному пространству, состоящему из элементарных кубов. Это наглядная демонстрация принципа соответствия в науке. Термин "принцип соответствия"используется в более общем смысле для обозначения сведения новой научной теории к более ранней при соответствующих обстоятельствах [ПС86], например, специальная теория относительности Эйнштейна сводится к классической механике при скоростях, малых по сравнению со скоростью света.

[ПС86]: Пригожин и др. (1986), Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой

12 Аксиомы Евклида в XXI

Какая форма должна быть у точки? Вопрос представляется на первый взгляд лишенным смысла - точка это нечто округлое, наносимое кончиком гусиного пера, карандаша иголки и т.д. Так оно и было на протяжении 6000 тысяч последних лет человеческой истории. Но с развитием наук (топологии, комбинаторики, кибернетики, информационных технологий) под точкой можно понимать 1^n. Попробуем проверить Аксиомы Евклида с позиций знаний века XXI.

Евклидова геометрия известна также как геометрия плоскости. [CG78] В эпоху цифровых технологий мы можем дополнить постулаты Евклида элементами, полученными из элементарных кубиков 1^n, выстроенных в ряд, прямоугольник, 3D-куб и так далее. (Заметим, что мы работаем в n-мерном пространстве!) Размерности созданных фигур будут такими же, как если бы мы имели дело с точками. Например, $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ согласуется с формулой, описывающей структуру слоя (11.3).

[CG78]: Coxeter и др. (1978), New Meetings with Geometry

Таблица 12.4: Постулаты Евклида в дискретном пространстве

Фигура в R^n	Аналог в $\mathbb{Z}^n$ - дискретном n-мер. пространстве целых	Размерность
Точка	1^n	0 или n
Отрезок	1^n, выложенные в ряд $i^1 * 1^{n-1}$	1
Плоскость	1^n, выложенные в плоскости $i^2 * 1^{n-2}$	2
Гиперплоскость	1^n, выложенные в 3D подпр-ве $i^3 * 1^{n-3}$	3
...	...	...

В дополнение к аксиомам Евклида [Эвк48] полезно проанализировать изученные нами конструкции с точки зрения аксиом топологии, которые хорошо изложены в ряде

[Эвк48]: Эвклид (1948), Начала Евклида Книга II Перевод Д.Д.Мордухай-Болтовского

учебников, например, мы уже обсуждали понятие метрического и топологического пространства (см. рис. 4.2). Из аксиом топологии [Тре01] соответствие между точкой в пространстве R^n и элементарным n-кубом 1^n в топологическом пространстве Ω становится еще более ясным. Определенный выше ортотопы $i^k 1^{n-k}$ в топологическом пространстве могут быть созданы путем операций Декартова произведения отрезков. В свою очередь, эти ортотопы размерностью от 1 до n-2 объединяются в слой размерностью n-1. Заметим, что оговорка 0 или n в первой строке последнего столбца табл. 12.4 означает, что в приведенной выше формуле (11.3) $i^k 1^{n-k}$ ортотопа множитель 1^{n-k} не имеет размерности. Одновременно, изменяя масштаб, измельчая разбиение пространства получим: $1^n \mapsto e^n$, т.е. n-куб. Пространства различной размерности $\Omega^n \cong \Omega^k$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $n = k$.

[Тре01]: Трельфалль (2001), Топология. Зейферт Г Трельфалль В

В самом деле, если теорема Ферма справедлива для троек целых чисел, то единицы измерения не имеют значения, будь то метры, сантиметры, миллиметры, микрометры, нанометры и т.д. Это означает не только равенство, но и тождественность уравнения Великой теоремы Ферма, или, другими словами, независимость результата от разбиения исследуемого многообразия, подобно тому, как это происходит при интегрировании. Единичный куб можно сделать сколь угодно малым, но суть явления от этого не меняется. Это важно для понимания как для учащихся, не знакомых с математическим анализом.

Проверено тысячелетиями

Правомерно ли выделение из сферы $S^2 \backslash S^1$, ее произвольного $\forall$ элемента - экваториального круга? - Это законный прием, известный из "Элементов"Евклида, сформулированных в III веке до н.э., и из школьных курсов геометрии, посвященных плоскости, стереометрии и черчению. Этот приём выдержал проверку на протяжении тысячелетий, и в доказательство его правомерности можно сослаться на известные архитектурные памятники мирового наследия.

Продолжим эту мысль. Стороны треугольника или другого многоугольника отображаются на элементы другой фигуры путем параллельного переноса/гомотетии/отра-

жения от оси/плоскости, вращения и другими способами. Заметим, что если такое отображение обратимо, взаимно однозначно, то точка остается точкой, отрезок - отрезком (здесь размерность сохраняется). Представим себе правильную трехмерную пирамиду, и её образ, например, за счет голографии. Принцип эквивалентности здесь выражается в том, что пирамида-прообраз в целом отображается на пирамиду-образ, произвольно выбранная грань - на двумерную грань, одномерная грань - на одномерную грань. Черчение и архитектура основаны на этом принципе, который выдержал испытание временем на протяжении как минимум шести тысячелетий. Почему в данной ситуации мы не можем выделить гипермеридиан на сфере и ожидать, что каждый из этих элементов будет отображен на множество элементов соответствующей размерности?

Когда мы работаем с декоративным материалом, например, с сайдингом для дома, принято измерять его в квадратных метрах $i^2 1^1$. Погонажные изделия, такие как перила или плинтус, измеряются в метрах $i^1 1^2$. Но в действительности все перечисленные материалы имеют определенные размеры по длине, высоте и ширине. Однако меньшими размерами обычно пренебрегают. Из определения топологического пространства и постулатов Евклида следует, что единичный куб или 1^n соответствует точке в пространстве размерности n. Все перечисленные фигуры состоят из таких единичных кубов. Они имеют размерность, привычную нам по аксиомам и определению топологии. Что такое аксиома в математике? - Это результат тщательного наблюдения или хорошо проведенного эксперимента.

Аксиомы Евклида и топологии основаны на принципах физики: однородность, изотропность, непрерывность пространства и симметрия.

Парадокс. К вершине гиперкуба!

Из алгебраического разложения следует, что фигуры в форме куба с дефектом в виде отсутствующей точки, соответствующие выражению $i^n - 1^n$ множество слоев или $2^n - 1^n$ слой (в $\mathbb{Z}^n$ при условии центральной симметрии),

безразличны к элементарным преобразованиям / отображениям, имеют размерность на единицу меньше, чем пространство, в котором эти фигуры созданы. Учитывая сказанное, таким выражениям и фигурам соответствуют $B_r^n \backslash point$ или S_r^{n-1}. Однако только на плоскости возможно одновременное выполнение условий сохранения симметрии и равенства объёмов, заложенных в теореме Пифагора.

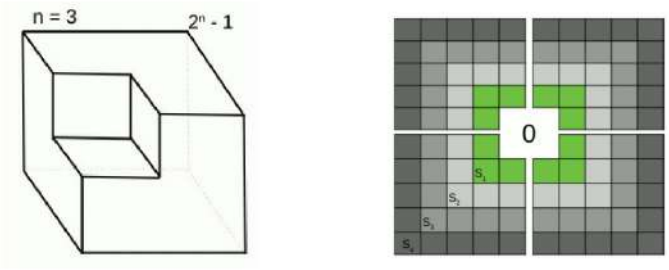


Рис. 12.14: Слева $\dim(2^n - 1)$ = n-1 в центрально симметричном $\mathbb{Z}^n$. Справа пересечение дефект куба 2D плоскостью, преобразованное отражениями гиперплоскостей, перпендикулярных каждой из n коор. осей. Нарушение непрерывности следования слоёв.

Заметим, что $2^2 - 1$ также является одномерной фигурой в центрально симметричном пространстве $\mathbb{Z}^2$. Эта фигура слой за слоем отображается на одномерный периметр квадрата 1^2. Такая ситуация является нормальной в силу условия эквивалентности лишь одного класса для n = 2. Размерность - это не тривиальный вопрос в математике. Существует замечательная визуализация фрактальное множество Мальдерброта, которое определяется рекуррентной формулой, и такие фрактальные множества отличаются от привычных нам множеств тем, что при увеличении масштаба множества одни и те же черты повторяются бесконечно.

Представьте, что вы смотрите на карту с высоты птичьего полета, потом вы спускаетесь вниз, приближаетесь к этому объекту, видите все больше и больше деталей, так вот в этих деталях видна более сложная структура, она все время повторяется. Здесь нет ни дуг, ни плавных кривых, ни прямых линий. С позиции определений данных в специальных курсах топологии размерность этого множества является дробной. Фрактальное множество Мальдерброта удивительно красиво! Чтобы лучше понимать особенности n-мерного пространства, предпримем путешествие к вершине гиперкуба.

Путешествие к вершине гиперкуба.

Рис. 12.15: Известнейший фрактал. Его фрагменты не строго подобны исходному множеству, но при многократном увеличении определённые части всё больше похожи друг на друга. Размерность дробная.

Некоторые уважаемые ученые возражают, что пронзание n-мерного куба двумерной плоскостью на Рис. 4.2 слишком просто и искажает сложную структуру этого куба. Такое недопонимание вызвано плохим представлением о том, что собой представляет n-мерный куб. Для исследования структуры n-куба снова применим метод постановки эксперимента в виртуальной реальности.

Астронавт Фёдор передвигается с помощью реактивного ранца в многомерном пространстве, чтобы совершить путешествие из начала координат и одновременно центра 10-мерного куба, грани которого ортогональны координатным осям, в заданную вершину гиперкуба. На движения, совершаемые космонавтом, налагаются ограничения: разрешалось двигаться только по направлению или против направления любой из n координатных осей. Очевидно, что Фёдор совершит n прыжков: первый - из начала координат в центр грани наибольшей размерности n-1, далее - в центр грани размерности -2 затем последует прыжок в центр грани размерности n -3 . . . На каждом шаге или прыжке Фёдор изменял направление движения, поворачивая под прямым углом.

На последних трех шагах мы, как трехмерные существа, могли наблюдать внезапное появление Фёдора в центре трехмерного куба из невидимого нам четырехмерного пространства, затем прыжок в центр стены, потолка или пола - по усмотрению Фёдора, после чего из двумерного квадрата - прыжок в центр ребра и, наконец, последний шаг - прибытие в вершину.

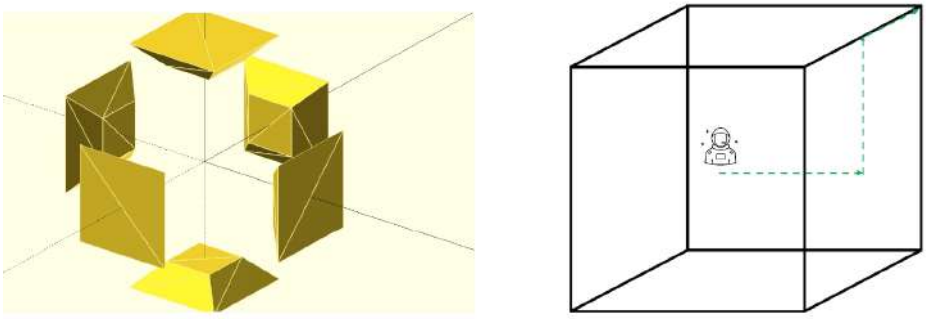


Рис. 12.16: Слева слоистая структура симметричного 3D-куба. Справа последние 3 шага на пути Фёдора к вершине

Судовой журнал астронавта Фёдора по результатам эксперимента может выглядеть примерно так:

- Стартую из центра Декеракта по направлению оси X_1.
- Двигаюсь в Эннеракт по направлению оси.
- Двигаюсь в Октеракт против направления оси.
- Двигаюсь в Хептеракт по направлению оси ...
- Двигаюсь в Гексеракт против направления оси ...
- Двигаюсь в Пентеракт против направления оси.
- Двигаюсь в Тессеракт против направления оси.
- Двигаюсь в куб по направлению оси.
- Двигаюсь в квадрат по направлению оси ...
- Двигаюсь в сегмент по направлению оси ...
- Двигаюсь к вершине против направления оси.
- Финиш!

(Легко догадаться, что при существующих ограничения движения по / против направления оси, Фёдор сможет свободно посетить $\forall$ из $2^{10} = 1024$ вершин гиперкуба.)

Не меняя общности, мы можем расположить индексы координатных осей в порядке возрастания / убывания и получить следующий результат в виде бортового журнала космонавта Фёдора. В этом эксперименте Фёдор, начиная с центра десятимерного куба, двигался только в

направлении (обозначается как 1) или против направления (обозначается как 0), последовательно исследовал все его грани размерности от девяти до единицы. Из основ комбинаторики легко видеть, что количество элементов - мощность множества, состоящего только из двоичных элементов ноль и единица, составляет 2^n - ровно столько же, сколько вершин в n-мерном кубе.

Анализируя двумерный и трехмерный случаи и обобщая результат на n-мерный случай, легко вычислить длину по формуле $\frac{i}{2}\sqrt{n}$ расстояния от начала координат до вершины, где i - ребро куба. Грань n-мерного куба лежит в гиперплоскости, перпендикулярной только что построенной высоте и проходящей через основание этой высоты - точку пересечения прямой с этой гранью. (Заметим, что с точки зрения Фёдора все грани n-мерного куба воспринимаются не как n-мерные, а как плоские фигуры. [Авд20])

[Авд20]: Авдыев (2020), «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020»

Без эффекта параллакса

Отметим, что Фёдор на своем пути наблюдал многомерные кубы с эффектом параллакса. Для объяснения этого эффекта можно привести ряд примеров из астрономии, повседневной жизни и произведений изобразительного искусства. Изображения n-мерного куба завораживают своей красотой. Представим себе проекцию n-мерного куба на двумерную плоскость, например, проходящую через оси X, Y, без эффекта параллакса. Какая фигура получится?

Ответ показан на Рис. 4.2. Когда мы исследуем пронзание n-мерного куба двумерной плоскостью в виде Декартова произведения двух зондов или двумерный зонд, перпендикулярный к двум разным граням, - мы работаем с индуцированной топологией.

На деле Фёдор исследовал вложенные топологические подпространства $\emptyset \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \Omega^3 \cdots \subset \Omega$ в исходном n-мерном пространстве Ω, все они проходят через начало координат, индекс сверху означает размерность подпространства. Например, в четырехмерном Ω: $\emptyset \subset (x,0,0,0) \subset (x,y,0,0) \subset (x,y,z,0) \subset \Omega$. В каждом из подпространств индуцирована относительная топология: концентрические шары с общим центром в начале коор-

динат с радиусами, основанными на ряде натуральных чисел см. Рис 10.10. Размерность шаров, m-кубов соответствует размерности подпространства. Для простоты можно представить последние три подмножества в этой цепочке: в 3D- 2D- 1D-подпространствах, соответственно: шар B^3, окружность B^2, линейный отрезок B^1.

13 Доказательство в одну формулу и чертёж

В традициях Индийских математических трактатов, доказательство сводится к одному чертежу и подписи: Смотри! в к Для физика достаточно созерцать 3D куб с его гранями или глобус с его экватором, чтобы постичь доказательство Великой теоремы Ферма.

Представим себе соответствующую выражению $a^n = c^n - b^n$ конструкцию в n-мерном пространстве. Слева - симметричная фигура размерности n. Справа - множество слоев размерностью на единицу меньше. Это множество будет асимметричным (например, сфера с иррациональным радиусом асимметрична), или иметь неустранимый дефект симметрии либо нарушение непрерывности слоев для размерности $n > 2$ (см. Рис.7.4 выше). Рассуждая об неустранимом дефекте симметрии, важно применять правила размерности, сопоставлять объёмы (мощности) по каждому элементу слоя отдельно и далее воспользоваться неравенством треугольника. Следовательно объекта, фундаментальные свойства которого описываются противоречивым образом $\nexists\, a, b, c, \in \mathbb{Q}$, таких что $B_a^n \cong B_c^n \backslash B_b^n$ в природе не существует! - это доказательство в предельно кратком виде приведено на обложке книги. Центральная симметрия позволяет перейти к послойному сравнению, но $\nexists f : \{S_j\} \longrightarrow \{\dots S_i\}$ где под f понимается непрерывная, обратимая функция эквивалентности. Этот конфликт сформулирован на титульной страницы монографии.

При построении отношений эквивалентности полусферы отображаются в полусферы, а произвольный меридиан - в меридиан.Размерность первой фигуры на единицу больше. Чтобы эти условие выполнялись одновременно,

необходимо обеспечить равенство сумм катетов длине гипотенузы прямоугольного треугольника - один из катетов должен быть нулевым, что запрещено по условием ВТФ. В результате Великая теорема Ферма доказывается от противного.

Здесь на Рис. 13.17 приведены авторские графические рисунки - содержимое таблиц Базы данных для ЭВМ, [Avd20] - Роспатент внёс и свою лепту в популяризацию математических знаний

[Avd20]: Avdyev (2020), «Database for computer proof of Fermat's theorem for billions based on school knowledge»

Достаточно простых школьных инструментов

Для исследования оказалось достаточно простых школьных инструментов: конструкции в виде обычного деревянного кубика для детского творчества, глобуса, шахматного набора, магнитофона на катушках, трафарета, прямоугольного треугольника и зеркала. В эпоху инклюзивного образования такое доказательство понятно слепым школьникам и студентам: достаточно ощупать поверхность школьного глобуса или апельсина с натянутой нитью по экватору, задаться вопросами симметрии, эквивалентности, однородности пространства и сохранения размерности сопоставляемых элементов слоя, для чего достаточно очистить апельсин от корки.

В отличие от американской ста и более страничной версии доказательства ВТФ, все эти простые инструменты наталкивают на вывод об асимметрии нашей Вселенной! Для этого можно поставить последний эксперимент в данной главе. Присмотритесь к лицу красивой девушки и заметьте, что человек, как дитя Вселенной, для чтобы быть красивым, должен быть слегка асимметричным.Случайно ли это или является воплощением более общих принципов развития Вселенной? См. интересную книгу о теории суперструн и роли геометрии, симметрии в зарождении Вселенной [Гри04], [ЯН12].

[Гри04]: Грин (2004), Элегантная вселенная

[ЯН12]: Яу и др. (2012), Теория струн и скрытые измерения Вселенной

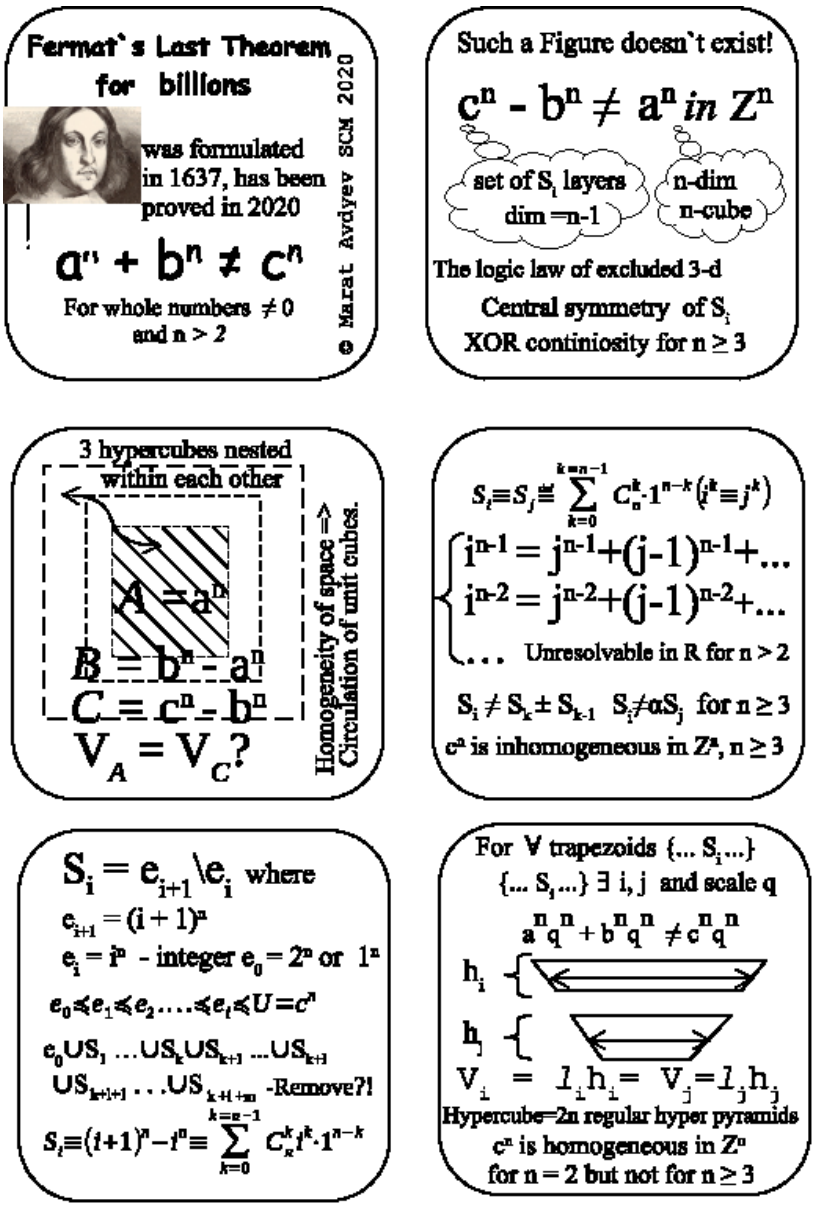


Рис. 13.17: Шести граней куба достаточно для доказательства ВТФ.

14 Гипотеза Леонарда Эйлера

В 1769 году Леонард Эйлер, предположил, что увеличив число слагаемых в уравнении, аналогичном теореме Ферма до четырёх, пяти и т.д., когда степень n превышает суммарное количество сравниваемых гиперкубов слева и справа в Диофантовом уравнении, исследователь обязательно придёт к выводу о его неразрешимости. Ряд учёных-математиков и любителей опровергли эту гипотезу для случая 4-х 5-ти, 7-ми, 8-ми мерных гиперкубов. (Способ разложения одного хексеракта на пять других хексерактов всё ещё дожидается своего звёздного часа.) Другое обобщение теоремы Ферма на случай четырёх гиперкубов приводит к Диофантову уравнению в виде: $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. С помощью теории множеств и Диаграмма Эйлера-Венна, предполагая $d > c > b > a$, можно представить выражение из суммы четырех гиперкубов как:

$$d^4 \backslash c^4 = b^4 \cup a^4 \tag{14.1}$$

здесь слева — множество гиперповерхностей размерности $n = 3$, справа — объединение двух гиперкубов размерности $n = 4$. Четвертый гиперкуб a^4 получается путём операций над слоями из b^4, но произведенных с отступлениями от принципов симметрии степени три в терминах приведенной выше таблицы 7.2.

Согласно доказанной выше теореме Ферма нет эквивалентности между подмножествами $(d^4 \backslash c^4) \backslash b^4 \not\equiv a^4$. Следовательно, есть шансы из дефектов слоёв (частичное удаление слоя) создать новую фигуру, возможно a^4. Убедимся в принципиальной возможности построения такой конструкции.

Фигура становится несвязной
Если эту новую конструкцию разместить в области положительных значений осей, то при отражении от гиперплоскостей и масштабировании число гиперкубов a^4 увеличивается в 2n, то есть в 16 раз, при этом фигура становится несвязной. Этим новая модель радикально отличается от ранее рассмотренной комбинации из трёх вложенных кубов со степенью симметрии n -

нарушается условие об однородности пространства.

А что можно сказать относительно зондирования двумерной плоскостью? Расположим четыре тессеракта так, чтобы сохранить максимально возможную симметрию конструкции степени два. Для этого рассмотрим плоскости на осях X_1, X_2 (помним, что обе оси X_3, X_4 перпендикулярны этой плоскости.)

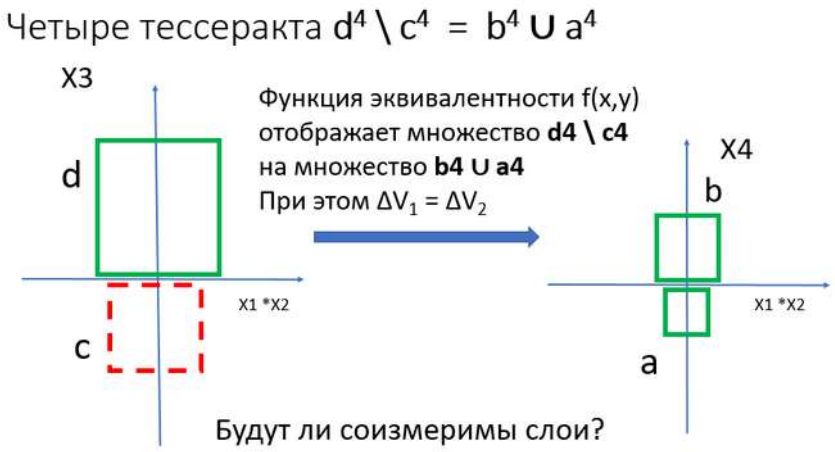


Рис. 14.18: Разрешимо ли Диофантово уравнение $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$?

Поскольку на 2D плоскости $\forall$ слой S_k соизмерим с другим S_j, построим плоскость натянутую на оси X_1, X_2 (для сокращения обозначим её как $X_1 \times X_2$,- Декартово произведение осей. Для удобства представления выберем двумерные проекции $d^4 \backslash c4$ на плоскость, проведенную через ось X_3, и ортогональную плоскости $X_1 \times X_2$, а проекцию гиперкубов $b^4 \cup a^4$ - соответственно на плоскость, проведённую через ось X_4, также ортогональную $X_1 \times X_2$. (Отличительным от прочих цветом и штриховкой выделен объём / мера c^4, вычитаемая из d^4.)

Заметим, что двумерные проекции на $X_1 \times X_2$ всех исследуемых в этом пункте подмножеств симметричны относительно 1D $\perp X_3$ подпространств и соответственно $\perp X_4$ располагаются в плоскости симметрии 2D $\parallel X_1 \times X_2$. См. Рис. 7.5 и Табл. 7.2.

Убедимся в возможности отыскания функции эквивалентности, отображающей $d^4 \backslash c^4 \longrightarrow b^4 \cup a^4$.Свойство такого отображения помимо сохранения симметричности - со-

хранение меры (объёма). В самом деле, послойно можно записать:

$$\begin{gathered}\{\{S_k|c\le k\le d\},\{S_l|1\le l\le d\}\}\longrightarrow\\ \left\{\left\{S_j|1\le j\le b\right\},\{S_i|1\le i\le a\}\right\}\end{gathered}\tag{14.2}$$

Здесь записано отображение множества, состоящего из двух подмножеств слоёв в другое множество, также состоящее из двух подмножеств слоёв (условие о диапазоне слоёв следует после вертикальной черты |). Отыскать соответствующую функцию эквивалентности можно, исходя из равенства мер $d^4-c^4=b^4+a^4$, а также принимая во внимание условие о послойной симметрии и Рис. 14.18. В результате можно записать формулу для ортотопов с учётом их высоты (см. аналог кабеля квадратного сечения на Рис. 7.5:

$$\begin{gathered}c\sum_{c}^{d}|S_k|+(d-c)\sum_{1}^{d}|S_l|=b\sum_{1}^{b}\left|S_j\right|+a\sum_{1}^{a}|S_i|\\ \frac{c}{d^2}\sum_{1}^{\overset{\text{НОД}}{d}}|S_m|\,d^2+\frac{1}{d+c}\sum_{1}^{\overset{\text{НОД}}{d-c}}|S_m|\,(d^2-c^2)=\\ \frac{1}{b}\sum_{1}^{\overset{\text{НОД}}{b}}|S_m|\,b^2+\frac{1}{a}\sum_{1}^{\overset{\text{НОД}}{a}}|S_m|\,a^2\end{gathered}\tag{14.3}$$

Здесь в формуле выше НОД - наибольший общий делитель $gcd(d-c,a,b,d)$. Под знаком суммы записаны мощности 2D-слоёв. Многообразие в виде разности тессерактов ($d^4\backslash c^4$ разбито на ортотопы, проецируемые на ось X_3 на отрезки $[c,d]$ и $[1,c]$ соответственно. (Сравните с разбиением многообразия на части при взятии интеграла).

В нижнем уравнении последней формулы происходит замена переменной на единый натуральный счётчик m, который пробегает значение диапазонов $1\dots d$, $c\dots d$, $1\dots a$, $1\dots b$ соответственно для каждого множества слоёв. Задавая таким образом выражение, можно наглядно убедиться в последовательном отображении подмножеств слоёв исследуемой конструкции и отыскания отношения эквивалентности с соблюдением симметрии относительно вышеперечисленных подпространств. Легко убедиться,

в возможности задания такого разбиения исследуемой конструкции, которое обеспечит работу не с дробными, а натуральными числами - для этого вместо НОД можно использовать просто произведение $(d-c)*a*b*d$ и отображать подмножества последовательно следующих слоёв мощностью (читай толщиной или числом интервалов) численно равных соответственно: $h_k = d^2$, $h_l = d^2 - c^2$, $h_j = b^2$, $h_i = a^2$, как на Рис.7.4.

В результате такого преставления Фигура будет иметь симметрию второй степени и любые слои в ней окажутся соизмеримыми, что указывает на потенциальную возможность отыскать четыре гиперкуба с целочисленными рёбрами для приведенной формулы.

Описанный на последнем примере способ определения разрешимости является необходимым, но недостаточным условием для поиска положительного ответа на вопрос. А на примере ВТФ описанный способ является достаточным условием для формулировки вывода о неразрешимости данного Диофантова уравнения.

Приведенное ниже численное решение в целых, его обнаружил — американский математик, профессор математики Гарвардского университета Ноям Дэвид Элкис в 1988г.

[Хоа14]. Поскольку числа большие и электронная таблица из пакета офисных программ с ними не справится, текст листинга программы *Fermatsfamily.py* можно скопировать и запустить на Python (см. основы программирования на Python в [Пос21]), например в любом из популярных онлайн трансляторах :

[Хоа14]: Хоакин (2014), Неуловимые идеи и вечные теоремы. Великие задачи математики

[Пос21]: Постолит (2021), «Основы искусственного интеллекта в примерах на Python»

```
%%%
```

Результат исполнения программы. Расчет суммы 4-х мерных гиперкубов:

```
a = 95800 b = 217519;
a^4 + b^4 = 232289243981590496032l
c = 414560 d = 422481;
c^4 - d^4 = 232289243981590496032l
```

как легко убедиться результаты вычисления правой и левой частей совпадают.

Вначале появилась потребность лишь в небольшом количестве иррациональных чисел, но требование логической стройности математики привело к построению всех действительных чисел. В частности, для стройности математической теории было очень важно, чтобы всякая последовательность Коши сходилась. Но для рациональных чисел это неверно. Последовательность Коши рациональных чисел может не сходиться к рациональному числу, она сходится к действительному числу. Таким образом, поле рациональных чисел нужно было дополнить до поля действительных чисел. отрицательные числа появились в основном из внутренних математических соображений для того, чтобы вычитание всегда было возможно, хотя отрицательные числа имели и практическое толкование. можно было толковать отрицательное число как долг [Пон86].

[Пон86]: Понтрягин (1986), Обобщения чисел

15 Вывод

Интересно, что в теориях концентрических сфер древних греков Евдокса, Каллиппа и Аристотеля Земля находилась в центре Вселенной и была окружена симметричными сферами, которые считались идеально симметричными [Пто+98]. Но, оказывается, даже работая со своими симметричными сферами, легко убедиться, что эта конструкция не соответствует ни одному физическому объекту в природе. Такое явление в Древней Греции называли апорией, или логически непротиворечивыми конструкциями, которые ничему не соответствуют. Удивительно, что мы пришли к одному и тому же выводу и для случая работы с n-кубами, и с шарами!

[Пто+98]: Птолемей и др. (1998), Альмагест: или математическое сочинение в тринадцати книгах

С философских позиций в Великой теореме Ферма заложен конфликт между содержанием (объёмом) вложенных друг в друга гиперкубов и их формой: условие о центральной симметричности и непрерывности следования слоёв. Можно добиться соответствия содержания в ущерб форме и наоборот. Этот конфликт преодолевается лишь в двумерном пространстве, где существуют Пифагоровы тройки, как редкое явление гармонии.

Это напоминает фундаментальное соотношение неопределённости Гейзенберга в квантовой механике, устанавливающий предел точности одновременного измерения пары физических величин, описывающих систему, как например, импульс и положение частицы.

Абсолютно симметричная Вселенная невозможна. Для возникновения материи, возможности химических реакций и зарождения жизни необходимо оперировать понятием объёма/меры сохранением количества вещества. Эти условия обеспечиваются только в слегка асимметричном, анизотропном пространстве. При $n > 2$, такое невозможно в изотропном (центрально симметричном), однородном пространстве, что постулируется в аксиомах евклидовой геометрии. Глубинная природа этого противоречия вытекает из фундаментальных физических свойств нашей Вселенной.

Российский математик Григорий Перельман предложил метод доказательства гипотезы Пуанкаре — задачи в математике, сформулированной в начале XX века. Суть гипотезы: если трёхмерное пространство замкнуто, не имеет краёв, и в нём любую петлю можно стянуть в точку, то оно должно быть эквивалентно трёхмерной сфере.

Если бы она была идеально симметричной, подобно изученной конструкции концентрических сфер, то в ней не могла бы возникнуть материя с присущими ей свойствами сохранения материи/меры.

Рис. 15.19: В 2006 году Григорию Перельману за решение гипотезы Пуанкаре присуждена международная премия "Медаль Филдса" за вклад в геометрию и его революционные идеи в изучении геометрической и аналитической структуры потока Риччи. Отказался математик от награды Математического института имени Клэя за решение одной из Проблем тысячелетия.

Пространство в математике и физике

Гильбертово пространство — это полное пространство со скалярным произведением. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ — его частный случай. Математически в евклидо-

вом пространстве скалярное произведение и порождённая им норма (длина вектора) инвариантны относительно вращений (ортогональных преобразований).

Это означает, что если взять вектор и повернуть всю систему координат, его длина не изменится. Формально: Для любого ортогонального преобразования O (такого, что$O^T O = I$) и любого вектора v, выполняется $||Ov|| = ||v||$. Представляется что пространство "изотропно", поскольку в нём нет выделенного направления, а вращения сохраняют структуру.

В чём же подвох? Отличие от физической изотропности Физическая изотропность проверяется экспериментально. В ней участвуют физические процессы, происходящие в пространстве-времени: распространение света, движение частиц, ход часов.

Ключевое различие:

Евклидово пространство: В нём скорость распространения любого сигнала или взаимодействия не ограничена. Расстояние определяется евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Конусы прошлого и будущего неограничены.

Пространство-время Минковского (Специальная теория относительности): Оно изотропно в релятивистском смысле! Скорость света с одинакова во всех направлениях для всех инерциальных наблюдателей. Метрика $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Существует выделенный инвариантный конус — световой конус. Вращения в пространстве-времени (преобразования Лоренца) сохраняют эту метрику и, следовательно, скорость света.

Разрешение парадокса: Евклидова метрика математически симметрична относительно вращений, но эта симметрия не совпадает с симметрией реального физического пространства-времени. Евклидово пространство — это "срез" постоянного времени в пространстве-времени Минковского, но сам ход времени и причинно-следственная структура в нём отсутствуют.

Путаница возникает из-за смешения двух концепций:

- Геометрическая изотропность (вращательная инвариантность) абстрактного векторного пространства. Евклидово пространство обладает ей.
- Физическая изотропность пространства-времени, которая включает в себя не только геометрию пространственных сечений, но и поведение времени, света и причинности. Гильбертово/евклидово пространство не является моделью пространства-времени, поэтому это свойство к нему неприменимо.

Таким образом, исследуя Великую теорему Ферма, мы подошли к вопросам физики и мировоззрения, даже не применяя высшую математику, общую теорию относительности и сложные дифференциальные уравнения для иллюстрации принципов происхождения нашей Вселенной. Предположения, которые делались в рамках евклидовой геометрии, применительно к космическим масштабам, становятся неточными. Здесь уже работает неевклидова геометрия. В анизотропном пространстве конфликт между формой и содержанием изучаемых нами структур конструктивно разрешается, но для этого необходимо отказаться от геометрии Евклида!

Взгляните на портрет русского ученого Николая Ивановича Лобачевского, ректора Казанского университета, математика, который внимательно изучил пятый постулат Евклида, аксиомы которого мы рассматривали, и сформулировал свою, так называемую "воображаемую геометрию". Впоследствии эта геометрия была названа геометрией Лобачевского. Читатель может ознакомиться с геометрией Лобачевского [НВ04] и биографией этого необычного учёного в [Кол65].

Рис. 15.20: Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) — русский математик, один из первооткрывателей неевклидовой («гиперболической») геометрии, деятель университетского образования и народного просвещения.

Оказалось, что геометрия Лобачевского удивительно хорошо описывает понятие пространственно-временной интервал, преобразование Лоренца. Отголоски Большого взрыва проявляются в виде реликтового излучения, низкотемпературных фотонов с температурой 2,72 Кельвина, которые можно изучать с помощью новейшей аппаратуры и получать информацию об анизотропии нашей Вселенной.

И действительно, 1983-1984 годы российский реликтовый эксперимент подтвердил анизотропию реликтового

[НВ04]: Н.В. (2004), Высшая геометрия. Учебник

[Кол65]: Колесников (1965), Лобачевский

излучения - "эха"Большого взрыва. Измерения проводились с помощью радиометра, разработанного в Институте космических исследований АН СССР, в группе Игоря Аркадьевича Струкова (общее руководство программой осуществлял академик Николай Семенович Кардашев) на запущенном спутнике "Прогноз-9". В 2006 году открытие российских ученых было "оценено по достоинству"присуждением Нобелевской премии по физике американцам Джорджу Смуту и Джону Мазеру за повторение результатов российских физиков, но с большей точностью. [Ску10] Имена российских ученых остались в тени.

[Ску10]: Скулачёв (2010), «Корреляция данных по анизотропии реликтового излучения в экспериментах WMAP и"Реликт-1"»

Приведённое доказательство изложено с ориентацией на школьные знания. Для более глубокого знакомства с теорией простых чисел читатели могут обратиться к специальной литературе, где рассматриваются важные вопросы: простые и составные числа, арифметические функции, теория сравнений, первообразные корни и индексы, цепные дроби, алгебраические и трансцендентные числа, свойства простых чисел, теория диофантовых уравнений.

Кроме того, рекомендуются: [АО 62] [Бух13], [Тит53].

[АО 62]: АО Гельфонд (1962), Элементарные методы в аналитической теории чисел

[Бух13]: Бухштаб (2013), Теория чисел

[Тит53]: Титчмарш (1953), Теория дзета-функции Римана

для понимания алгоритмических аспектов теории чисел с применениями в криптографии (проверка больших простых чисел на простоту, разложение больших чисел на множители, дискретное логарифмирование) и с использованием ЭВМ.

Впереди предстоит работа по развитию отечественной науки, инженерии и возрождению системы госрегистрации научных открытий, утраченной по реш. от 14 мая 1991г. N 156 Президиума Академии наук СССР. В этой остро состязательной ситуации автор был вынужден продолжить исследования по поиску кратких, доступных для понимания широкой аудитории, доказательств ABC-гипотезы, из которой также следует доказательство ВТФ.

Скептики продолжают считать, что Пьер де Ферма, вероятнее всего, заблуждался. Между тем, последовательное применение основных принципов физики, геометрии заставляют думать иначе. Работа над теоремой Ферма придала импульс развитию теории чисел, которая также описывает законы физического мира, но опосредовано.

Смена парадигмы позволяет увидеть эту связь в наглядном представлении. Драматическая история открытия теоремы Ферма и поиск наглядных доказательств должны стать частью школьной / вузовской подготовки.

Арифметические функции и термодинамика

5 Арифметические функции и термодинамика

1 Функция Эйлера . 237
2 Функция Мангольдта 240
3 Функции Чебышёва и энтропия 243
4 Функция Мёбиуса $\mu(n)$ 250
5 Связь разности гиперкубов, знаковой меры и функции Мёбиуса 252
6 Определение преобразования Дирихле 255
6.1 Примеры преобразований Дирихле . . 256
7 Свёртка Дирихле и ряды Дирихле . . . 257
8 Место p - чисел в физике 260
9 Ряд Гранди и квантовая неопределённость 261

Арифметические функции в теории чисел — это функции, определённые на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и принимающие значения из множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ (формально: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Их название связано с тем, что они выражают те или иные арифметические свойства натуральных чисел — например, количество делителей, сумму делителей, количество взаимно простых чисел и т. п. Хотя значения могут быть комплексными, многие важные арифметические функции на практике оказываются целозначными.

В теории чисел изучаются ключевые арифметические функции (и их свойства):

- функция Эйлера $\varphi(n)$ (тотиент) — количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n;
- функция Мангольдта $\Lambda(n)$;
- функция Мёбиуса $\mu(n)$;
- функции Чебышёва $\theta(n)$ и $\psi(n)$;
- функция $\tau(n)$ — число делителей числа n;
- функция $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n.

Для арифметических функций определены специальные операции:

- сумма функции (аналог дискретного интеграла);
- свёртка Дирихле (аналог умножения функций);
- ряд Дирихле (производящая функция).

Эти инструменты позволяют исследовать:

- распределение значений функций;
- асимптотическое поведение;
- связи между разными арифметическими свойствами натуральных чисел.

1 Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ — это количество чисел, взаимно простых с n, от 1 до n. Её вычисление основано на мультипликативности и каноническом разложении числа на простые множители. Это мощный инструмент, связывающий простые числа, модульную арифметику и алгебраические структуры, и играющий критически важную роль в современных системах шифрования.

Определение и обозначение

Функция Эйлера (обозначается $\varphi(n)$, читается «фи от эн») — это арифметическая функция, которая для натурального числа n равна количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Взаимно простые числа — это числа, наибольший общий делитель (НОД) которых равен 1.

Определение 1.1

$$\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le n,\ \text{НОД}(k, n) = 1\}.$$

Некоторые значения $\varphi(n)$:

- $\varphi(1) = 1$ (по определению, число 1 взаимно просто с самим собой).
- $\varphi(5) = 4$, так как с числом 5 взаимно просты числа 1, 2, 3, 4.
- $\varphi(10) = 4$, так как с числом 10 взаимно просты числа 1, 3, 7, 9.

Ключевые свойства и вывод формулы

Функция $\varphi(n)$ мультипликативна. Это её главное свойство. Оно означает, что если два числа a и b взаимно просты ($\text{НОД}(a, b) = 1$), то:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Именно из этого свойства и выводится общая формула.

Шаг 1. Случай простого числа

Для простого числа p все числа от 1 до $(p - 1)$ взаимно просты с p. Не взаимно просто только само число p.

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Пример: $\varphi(7) = 6$.

Шаг 2. Случай степени простого числа

Рассмотрим p^k, где p — простое. Какие числа от 1 до p^k не взаимно просты с p^k? Это те числа, которые делятся на p. Их легко пересчитать: это p, $2p$, $3p$, ..., p^k. Всего таких чисел $\frac{p^k}{p} = p^{k-1}$.

Общее количество чисел от 1 до p^k равно p^k. Вычитаем количество «неподходящих»:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Пример: $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$. Действительно, с 8 взаимно просты 1, 3, 5, 7.

Шаг 3. Общий случай (каноническое разложение)

Любое натуральное число $n > 1$ можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых чисел (каноническое разложение):

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m},$$

где все p_i — различные простые числа.

Поскольку степени разных простых чисел взаимно просты, мы можем применить свойство мультипликативности:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}) \cdot \varphi(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_m^{k_m}).$$

Подставляем формулу для $\varphi(p_i^{k_i})$ из шага 2:

$$\varphi(n) = \left[p_1^{k_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\right] \cdot \left[p_2^{k_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\right] \cdot \ldots \cdot \left[p_m^{k_m} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\right].$$

Выносим n за скобки:

В результате получается ранее использованная формула:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right). \qquad (1.1)$$

Пример 1.1 (Пример расчёта) Пусть $n = 100$. Каноническое разложение: $100 = 2^2 \cdot 5^2$. По формуле:

$$\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 100 \cdot \frac{4}{10} = 40.$$

Проверим: с числом 100 действительно 40 взаимно простых чисел (например, все нечётные, кроме оканчивающихся на 5).

Практическое значение и теорема Эйлера

Функция Эйлера — не просто абстрактный счётчик. Она лежит в основе теоремы Эйлера, одной из краеугольных теорем теории чисел и криптографии.

Теорема 1.1 (Теорема Эйлера) Если a и n взаимно просты (НОД$(a, n) = 1$), то

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Частный случай при простом n (Малая теорема Ферма).

Теорема 1.2 (Малая теорема Ферма) Если p — простое и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, так как $\varphi(p) = p - 1$.

Прикладные области применение функции

- Криптография (RSA): Это самое известное применение. Функция Эйлера является частью открытого и секретного ключей в алгоритме RSA. Сложность вычисления $\varphi(n)$ для числа $n = p \cdot q$ (произведения двух больших простых) без знания разложения p и q обеспечивает криптостойкость RSA.
- Теория групп: $\varphi(n)$ равна порядку мультипликативной группы кольца вычетов по модулю n (количество обратимых элементов по модулю n).
- Решение сравнений, теория степенных вычетов.
- Комбинаторика и теория вероятностей: Например, вероятность того, что случайно выбранное число от 1 до n будет взаимно простым с n, равна $\frac{\varphi(n)}{n}$.

Следствие 1.1 (frametitle=Итоговый результат проведённого исследования) Наконец, в данной монографии из Леммы об ортогональности и взаимной простоте 5.3 был сделан вывод, что для обеспечения уникальности подсчёта каждого микросостояния необходимо избавиться от общих делителей в выражении для статистических сумм и их произведении 5.7. Для этого необходимо ввести поправочный коэффициент $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma} \quad n = \Gamma$, учитывающий порядок группы: число смежных классов вполне приводимых представлений плюс единица 7.7.

Интересно отметить, что в силу отношения $\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} \mapsto p_i$ биекции сомножитель в формуле 1.1 для нахождения функции Эйлера через простые числа совершенно аналогичен множеству простых чисел взятых из конечной матрицы $\breve{D}(n)$, входящих в выражение $Rad(abc)$ на главной диагонали подматрицы 3.5.

Такая взаимосвязь объясняется тем, что с помощью единственного элемента порождается бесконечный ряд микросостояний 4.3. Этот принцип воплощен в статистической сумме. Выбирая естественный базис, вычисление средних можно ограничить числом микросостояний, равным порядку, лежащему в основе циклической подгруппы.

Аналогичный эффект при работе с дифракционной решёткой заключался в избегании перекрытия порядков 6.9. На уровне статистической физики этот эффект заключается в соблюдении однократность учёта каждого микросостояния 2.2. Китайская теорема об остатках помогает объяснить важные принципы статистической физики школьникам средних классов школы через набор взаимно простых модулей задающих ортонормированный базис (с циклической структурой) для представления чисел 7.2.

2 Функция Мангольдта

Функция Мангольдта $\Lambda(n)$ — арифметическая функция, введённая немецким математиком Гансом фон Мангольдтом в 1894 году. Она играет важную роль в теории простых чисел, в частности — при доказательстве закона их

распределения.

Определение 2.1 (Определение функции Мангольдта $\Lambda(n)$) Функция Мангольдта $\Lambda(n)$ определяется следующим образом для простого p и целого $m \geq 1$,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^m \text{для простого } p \text{ и } m \geq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Иными словами:

- если n — степень простого числа (p^m, где p — простое, m — натуральное), то $\Lambda(n) = \ln p$;
- если n не является степенью простого числа, то $\Lambda(n) = 0$.

Примеры значений Для первых натуральных чисел функция принимает значения:

$$\begin{aligned} &\Lambda(1) = 0 \quad (1 \text{ не является степенью простого числа}); \\ &\Lambda(2) = \ln 2 \quad (2 = 2^1); \\ &\Lambda(3) = \ln 3 \quad (3 = 3^1); \\ &\Lambda(4) = \ln 2 \quad (4 = 2^2); \\ &\Lambda(5) = \ln 5 \quad (5 = 5^1); \\ &\Lambda(6) = 0 \quad (6 = 2 \cdot 3 \text{ — не степень простого}); \\ &\Lambda(7) = \ln 7 \quad (7 = 7^1); \\ &\Lambda(8) = \ln 2 \quad (8 = 2^3); \\ &\Lambda(9) = \ln 3 \quad (9 = 3^2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Основные свойства

1. Суммарное свойство (следует из фундаментальной теоремы арифметики):

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n,$$

   где сумма берётся по всем делителям d числа n
2. Выражение через функцию Мёбиуса $\mu(d)$ (формула обращения Мёбиуса):

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d} = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d.$$

3. Связь с дзета-функцией Римана $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n},$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

4. Связь с L-функциями Дирихле $L(s, \chi)$ (для характера χ):

$$\ln L(s, \chi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s \ln n},$$

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

5. Асимптотические соотношения (при $x \to \infty$):

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} \sim \ln x,$$

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n \ln n} = \ln \ln x + \gamma + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

где γ — постоянная Эйлера, c — некоторая положительная константа.

Отдельно следует рассмотреть связь $\Lambda(n)$ с функциями $\psi(n)$ Чебышёва и ζ-функции Римана.

Связь с $\psi(n)$ функцией Чебышёва

$\psi(n)$ функция Чебышёва $\psi(x)$ определяется как сумматорная функция $\Lambda(n)$:

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

Одним словом, $\Lambda(n)$ помогает изучить вопрос о распределении простых чисел и используется в доказательстве теоремы о простых числах. Через $\Lambda(n)$ выражается логарифмическая производная ζ-функции (формула Перрона):

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}\, dx, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Следствие 2.1 Функция Мангольдта — ключевой инструмент в аналитической теории чисел:

- доказательство теоремы о распределении простых чисел;
- изучение нулей дзета-функции Римана;
- анализ L-функций Дирихле;
- оценка сумм, связанных с простыми числами и их степенями.
- Функция Мангольдта с позиции термодинамики выражает вероятность нахождения частицы в микросостоянии, соответствующему энергетическому уровню $p \mapsto e^{\beta p}$, другими словами - состоянию, порождённому на основе простого числа p.

3 Функции Чебышёва и энтропия

Определение 3.1 Риман ввёл специально функцию $\pi(n)$ для обозначения числа простых чисел, не превосходящих n.

Арифметические функции Чебышёва определяются следующими выражениями. Для случая $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} log(x), \quad p > 0 \tag{3.1}$$

Из определения энтропии 3.1 через усреднение логарифма значений по следу конечномерной матрицы $\check{D}$ 3.1 следует, что физический смысл функций Чебышёва находится во взаимосвязи с энтропией в естественном базисе. Пусть p_n — n-ое простое число, тогда $\pi(p_n) = n$, где $\pi(x)$ — это функция Римана, определяемое как число простых чисел, не превышающих целое x. С учетом определения конечномерной матрицы 3.1 имеем для таких: p_n

Физический смысл θ функции Чебышёва

p_n — n-ое простое число, и $\pi(p_n) = n$

$$\begin{aligned} \pi(p_n) &= n \\ e^{\theta(n)} &= \left\langle \mathrm{Tr}\, log\check{D}(n) \right\rangle = S_{D(n)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Число L — это размерность гильбертова пространства системы $D(n)$, т.е. количество всех линейно независимых состояний $\mathrm{Tr}\,\underline{E}$, которые учитываются в рассматриваемом описании.

Здесь в формуле выше взято среднее значение логарифма. Это значит, что каждое простое в последовательно нарастающем ряде простых чисел $2, 3, \ldots p_n$ встречается лишь один раз см. 3.3. Другими словами энтропия находится с помощью выражения $S_{D(n)}$ для системы, не имеющей вырожденных уровнен энергии из чего следует отсутствие алгебраической кратности в характеристическом многочлене $detD(n)$.

Функция Чебышёва $\psi(x)$ определяется несколько иным выражением:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} log(x), \quad p > 0 \tag{3.3}$$

$\Longrightarrow e^{\psi(x)}$ - это наименьшее общее кратное всех положительных чисел $\leq x$. Также по аналогии очевидно:

Физический смысл ψ функции Чебышёва

p_n — n-ое простое число, и $\pi(p_n) = n$

$$\begin{aligned} \pi(p_n) &= n \\ e^{\psi(n)} &= S_{\tilde{D}(n)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Размерность гильбертова пространства (длина диагонали матрицы плотности $\check{D}(n)$) равна $\mathrm{Tr}\,\underline{E}$ сумма кратностей вырождения по всем энергетическим уровням системы $L = \sum_{i=1}^{k} g_i$

Энтропия рассчитывается $S_{\tilde{D}(n)}$ для системы, имеющей вырожденных уровнен энергии в характеристическом

многочлене $det\tilde{D}(n)$ присутствуют собственные значения с алгебраической кратностью ≥ 1

Из двух определенных функций Чебышёва [Чан74] следует их взаимосвязь по следующей формуле:

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots \tag{3.5}$$

Этот ряд конечен, поскольку $\theta(x) = 0$ при $x < 2$. Если $p^m < x < p^{m+1}$, то $log(p)$ встречается в 3.3 ровно m раз $m = \left[\frac{log(x)}{log(p)}\right]$, а следовательно:

$$\begin{aligned}\psi(x) = \sum_{p\leq x}\left[\frac{log(x)}{log(p)}\right] log(p) &\leq \sum_{p\leq x}\frac{log(x)}{log(p)} log(p) \\ &= log(x)\sum_{p\leq x} 1 = log(x)\pi(x)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Модель, заложенная в ABC-гипотезе, соответствует термодинамической системе $\tilde{D}$, находящейся в тепловом равновесии с надсистемой 9.5. При адиабатических изменениях по теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется и $S_D = S_{\tilde{D}}$. Теорема Лиувилля и сохранение энтропии при адиабатических изменениях сохраняют силу для случая $\check{D}$. Именно этот принцип заложен во взаимосвязях функций $\psi(x)$ и $\theta(x)$ Чебышёва.

В работе [Чан74] §2 утверждается, что если одна из трёх функций:

[Чан74]: Чандрасекхаран (1974), Введение в аналитическую теорию чисел

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \qquad \frac{\theta(x)}{x} \qquad \frac{\psi(x)}{x} \tag{3.7}$$

имеет предел при $x \to \infty$, то другие две функции также имеют пределы при $x \to \infty$ и все эти три предела совпадают.

Предложение 3.1 (асимптотический закон распределения p) Таким образом, для того чтобы доказать асимптотический закон распределения простых чисел, достаточно доказать, что $\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$.

Можно интерпретировать дроби $\frac{\theta(x)}{x}$ и $\frac{\psi(x)}{x}$ как удельные значения функций Чебышёва $\theta(x)$ и соответственно $\psi(x)$ в расчёте на число квантовых уровней L. Для сравнения:

в термодинамике осмыслена такая величина как плотность густота энергетических уровней в энергетическом представлении $\frac{\Delta\Gamma}{dE}$. В рассматриваемом случае матрицы энтропии $S_{D(n)}$ $L = \pi(x) = n$ в силу условий 3.2. Исходя из этой интерпретации, следует вывод: $S_{D(n)} = \log n$ - энтропия максимально смешанного состояния. Исследуем вопрос, что означает $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}$?

S термодинамическая и S по Шеннону и фон Нейману

В формулах информационной энтропии по Шеннону и фон Нейману 12 температура T явно не фигурирует. В то же время, в феноменологической термодинамике энтропия S неразрывно связана с температурой:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T}, \qquad \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}, \qquad F = E - TS.$$

Возникает кажущееся противоречие: почему в определении энтропии как меры неопределённости нет температуры T, которая относится к основным термодинамическим переменным?

Иерархия сущностей

Информационная энтропия (общий уровень) Формулы Шеннона и фон Неймана описывают меру неопределённости любого вероятностного распределения или квантового состояния. Они применимы к:

- текстам и данным
- неравновесным физическим системам
- квантовым состояниям (чистым и смешанным)
- в том числе к равновесным термодинамическим системам

На этом уровне температура T не фигурирует, так как понятие энтропии шире понятия термодинамического равновесия.

Статистическая механика (мост между уровнями) Статистическая механика постулирует: термодинамическая энтропия равна информационной энтропии, вычисленной для равновесного распределения Гиббса.

Для системы в тепловом равновесии с термостатом при температуре T:

$$w_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i}.$$

Подставим распределение Гиббса в формулу Шеннона:

$$\begin{aligned} S &= -\sum_i w_i \ln w_i \\ &= -\sum_i w_i \ln\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}\right) \\ &= -\sum_i w_i \left[-\ln Z - \beta E_i\right] \\ &= \ln Z \underbrace{\sum_i w_i}_{=1} + \beta \underbrace{\sum_i w_i E_i}_{=\langle E \rangle} \\ &= \ln Z + \frac{\langle E \rangle}{T}. \end{aligned}$$

По определению свободной энергии $F = -T \ln Z$. Кроме того $\langle E \rangle$ - это и есть среднее значение энергии системы в термодинамическом смысле, а следовательно:

$$S = \frac{E - F}{T} \quad \Rightarrow \quad F = E - TS,$$

что в точности соответствует термодинамическому определению.

Температура как производная энтропии В статистической механике температура возникает естественным образом из условия максимизации энтропии при фиксированной средней энергии $\langle E \rangle = E$:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}.$$

Это соотношение:

1. Определяет температуру для равновесных систем
2. Показывает, что T – параметр, характеризующий зависимость энтропии от энергии
3. Не выполняется для неравновесных систем (где температура может быть не определена)

Физическая интерпретация

- Информационная энтропия – это мера нашего незнания о микроскопическом состоянии системы
- Термодинамическая энтропия – та же мера, но вычисленная для специфического (равновесного) распределения

Таким образом температура T — параметр, который a) определяет форму равновесного распределения (Гиббса) b) характеризует, насколько "энергоёмким" является увеличение энтропии c) Появляется только при рассмотрении систем в тепловом равновесии

S термодинамическая и S по Шеннону и фон Нейману

Пример 3.1 (Пример: двухуровневая система) Рассмотрим систему с двумя уровнями энергии: $E_0 = 0$, $E_1 = \varepsilon$. Распределение Гиббса:

$$w_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}, \quad w_1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}.$$

Энтропия Шеннона:

$$S = -\left[w_0 \ln w_0 + w_1 \ln w_1\right].$$

Эта энтропия:

- Зависит от T через $\beta = 1/(T)$
- При $T \to 0$: $S \to 0$ (система в основном состоянии)
- При $T \to \infty$: $S \to \ln 2$ (равновероятные состояния)
- Все производные $\partial S/\partial T$ дают корректную температуру

S термодинамическая и S по Шеннону и фон Нейману

Следствие 3.2 (Общее определение энтропии) Убедимся, что энтропия Шеннона/фон Неймана является корректной мерой неопределённости.

- Формулы Шеннона и фон Неймана задают общее определение энтропии, термодинамические формулы – частный случай для равновесия
- Температура T не входит в определение энтропии, но определяет конкретное распределение (Гиббса), для которого информационная энтропия становится термодинамической
- Статистическая механика является мостом: $S_{\text{терм}} = S_{\text{Шеннона}}(w_i^{\text{Гиббса}}(T))$
- Для неравновесных систем понятие температуры может быть не определено, но энтропия Шеннона/фон Неймана остаётся корректной мерой неопределённости

Таким образом, кажущееся противоречие разрешается пониманием иерархии:

$$S_{\text{информационная}} \xrightarrow[\text{равновесие}]{\text{условие}} \text{распределение Гиббса.}$$

Из этого выражения следуют формулы термодинамики с параметром $\beta = \frac{1}{T}$.

В силу стационарности температуры исследуемой системы выражения $\frac{\theta(x)}{x}$ и $\frac{\psi(x)}{x}$ сходятся к константе. Докажем это сначала для $\theta(n)$ (условие: p_n — n-ое простое число, и $\pi(p_n) = n$):

$$\frac{\theta(n)}{n} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial E} \longrightarrow \frac{\ldots \partial \ln e^{\beta p_i} + \partial \ln e^{\beta p_{i+1}} + \partial \ln e^{\beta p_{i+2}} \ldots}{\ldots \beta \partial p_i + \beta \partial p_{i+1} + \beta \partial p_{i+2} \ldots} \longrightarrow 1. \qquad (3.8)$$

Здесь в числителе и знаменателе дроби расположены простые числа, взятые из главной диагонали матрицы $\breve{D}(n)$, где они расположены в порядке возрастания. Наибольший вклад вносят старшие слагаемые. Именно поэтому рассматриваются достаточно большие p_i. Энергия, энтропия являются аддитивными функциями (вероятности несовместных событий также складываются, т.е. облада-

ют свойством аддитивности при условии не превышения суммы 1), что позволяет свести числитель и знаменатель дроби 3.8 к тривиальному случаю эквивалентных выражений. Исходя из отношения биекции $p_i \mapsto e^{\beta p_i}$, можно вычислить частную производную через дифференциалы. Параметр $\beta = \frac{1}{T}$ - является постоянным для исследуемой термодинамической системы в всех её подсистем.

Следовательно, $\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \log x$, что соответствует энтропии S для случая максимально смешанного состояния. В силу отношений изоморфизма, рассмотренного в главе, посвященной ζ-функции Римана 5.2, имеем: $p \mapsto e^{\beta p}$ и аналогично $p \mapsto \ln p$. Это напоминает правило Лопиталя.

Любая термодинамическая система может быть разложено по векторам естественного базиса (базис является полным). Благодаря свойству аддитивности энтропия S и энергии E, оценки, данной в выражении 3.6 соотношение 3.8 будет выполняться на тех же условиях для случая $\frac{\psi(x)}{x} \quad x \in \mathbb{N}$.

В силу 3.4, 3.4, теоремы Лиувилля и полноты естественного базиса для функции Чебышёва $\psi(n)$ выражение и значение константы сохранятся, поскольку умножение частных дифференциалов энтропии и энергии на одно и то же число в 3.8, соответствующее алгебраической кратности корня (степени вырождения энергетического уровня) не меняет результата. Именно термодинамическим соотношения объяснятся ограничение функции Чебышёва сверху 3.6.

4 Функция Мёбиуса $\mu(n)$

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ — это арифметическая функция, которая определяется следующим образом:

(i) $\mu(1) = 1$;
(ii) $\mu(n) = (-1)^k$, если n есть произведение k различных простых чисел;
(iii) $\mu(n) = 0$ в противном случае, т.е. если n делится на квадрат целого числа, отличного от единицы.

Из определения сразу же вытекает

Лемма 4.1 Функция Мёбиуса $\mu(n)$ мультипликативна.

Доказательство этой леммы следует непосредственно из определения.

Теорема 4.1 Справедливо соотношение

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ — каноническое разложение числа $n > 1$. Делители d числа n, для которых $\mu(d) \neq 0$, имеют вид

$$1,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m,\ p_i p_j\ (i \neq j),\ p_i p_j p_k\ (i \neq j \neq k),\ \ldots,\ p_1 p_2 \ldots p_m. \tag{4.1}$$

Тогда

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{i} \mu(p_i) + \sum_{i<j} \mu(p_i p_j) + \ldots + \mu(p_1 p_2 \ldots p_m) \tag{4.2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots = (1-1)^m = 0. \tag{4.3}$$

□

Пусть p_n — n-ое простое число, и $\pi(p_n) = n$. Обозначим под $\check{D}' = D' = d \in diag(\check{D}(n)$, который выбирает лишь уникальные значения простых чисел с главной диагонали матрицы $\check{D}$, без повторения, и сравним последнее выражение с характеристическим многочленом:

$$f_{D'}(\lambda) = det\,(\lambda I - D) = \prod_{j=1}^{\pi(n)} (\lambda - p_j) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda^{m-i} (-p)^i \tag{4.4}$$

где m - является произведением последовательного ряда первых $\pi(n)$ простых чисел начиная с 2. Выражения 4.3 и

4.4 структурно эквивалентны. Более того, если взять характеристический многочлен в виде матричной функции, подставить $\lambda = 1$, а вместо простого числа - единичный орт $p_i = |e_i|$, с учётом его знака (+ - по и − - против направления вектора), то оба последних уравнения станут тождественными. Эта идея требует более тщательной проработки.

5 Связь разности гиперкубов, знаковой меры и функции Мёбиуса

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега λ. Для $a > 0$ определим гиперкуб:

$$Q_a = [0, a]^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le a \ \forall j\}.$$

Для $0 < b < a$ рассмотрим слой между кубами:

$$S_{a,b} = Q_a \setminus Q_b.$$

Его объём известен:

$$V_{a,b} = \lambda(S_{a,b}) = a^n - b^n.$$

Разложение по включениям-исключениям

Для непустого подмножества $J \subset \{1, \ldots, n\}$ определим множество:

$$F_J = \{x \in Q_a \mid x_j > b \text{ для всех } j \in J\}.$$

На координаты, не входящие в J, ограничений кроме $0 \le x_j \le a$ не накладывается.

Объём F_J равен:

$$\lambda(F_J) = (a - b)^{|J|} a^{\,n-|J|}.$$

Применяя принцип включений-исключений к событиям $A_j = \{x \in Q_a : x_j > b\}$, получаем равенство индикаторных функций:

$$\mathbf{1}_{S_{a,b}}(x) = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|-1} \mathbf{1}_{F_J}(x).$$

Интегрирование даёт знакопеременную формулу для объёма:

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (a-b)^k a^{n-k}. \tag{1}$$

Аналогия с функцией Мёбиуса

Пусть $n = p_1 p_2 \dots p_m$ — произведение различных простых чисел. Функция Мёбиуса $\mu(d)$ для делителя d равна $(-1)^k$, если d — произведение k различных простых множителей из $\{p_1, \dots, p_m\}$, и 0 в противном случае.

Известное тождество:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), видим структурное сходство:

- В (1) число слагаемых с $|J| = k$ равно $\binom{n}{k}$, знак $(-1)^{k-1}$.
- В (2) число делителей с k простыми множителями равно $\binom{m}{k}$, знак $(-1)^k$.

Оба выражения представляют собой знакопеременные биномиальные суммы, обеспечивающие полную компенсацию в предельном случае.

Предельный переход $b \to a$

Положим $t = a - b > 0$. Тогда (1) переписывается как:

$$a^n - (a-t)^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} t^k a^{n-k}.$$

При $t \to 0^+$ (т.е. $b \to a^-$) правая часть стремится к нулю. Геометрически слой $S_{a,b}$ истончается у границы Q_a и в пределе "схлопывается" в $(n-1)$-мерное множество нулевой меры Лебега.

Этот процесс может быть реализован изотопией (семейством непрерывных обратимых вложений) $Q_b \hookrightarrow Q_a$ при b, меняющемся от 0 до a.

Формализация в терминах знаковых мер

Пусть $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ — пространство конечных знаковых мер на $\mathbb{R}^n$. Для измеримого множества A обозначим через $[A]$ меру Лебега, ограниченную на A.

Тогда равенство (1) может быть записано как тождество в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$:

$$[S_{a,b}] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{|J|=k} [F_J]. \tag{3}$$

При $b \to a$ каждая мера $[F_J]$ слабо сходится к мере, сосредоточенной на грани куба Q_a, определяемой условиями $x_j = a$ для $j \in J$. Сумма в (3) становится нулевой мерой, что соответствует топологическому вырождению слоя.

Принцип симметрии

Оба тождества — (1) для разности гиперкубов и (2) для функции Мёбиуса — выражают один и тот же принцип комбинаторной симметрии: знакопеременная сумма по всем подмножествам некоторого конечного множества (координат или простых множителей) даёт ноль, за исключением тривиального случая, когда исходное множество пусто.

В геометрической интерпретации этот принцип проявляется как взаимное уничтожение вкладов перекрывающихся областей при вычислении меры разности множеств.

Следствие 5.1 Таким образом, формула

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (a-b)^k a^{\,n-k}$$

является не только алгебраическим тождеством, но и отражает глубокую связь между:

1. Теорией меры (разложение знаковой меры слоя);
2. Комбинаторикой (принцип включений-исключений);
3. Топологией (предельное стягивание слоя при деформации);
4. Теорией чисел (аналогия с функцией Мёбиуса).

Данная связь позволяет рассматривать разность объёмов гиперкубов как тополого-арифметический инвариант, обладающий свойством полной компенсации в пределе.

Симметрия в функции Мёбиуса
Изложенное означит, что функция Мёбиуса тесно свя-

зана со структурой слоёв гиперкуба, а следовательно с изотропностью пространства . Можно представить себе обратную операцию в виде удаления слоя единичного куба 1^m, заключающуюся в последовательном вычитании каждой гиперграни, каждого класса эквивалентности. Эта аналогия формул свидетельствует в пользу работоспособности модели естественного базиса, где каждое простое число рассматривается в виде ортогонального вектора. (Выше было установлено, что простые числа являются порождающей группой натуральных чисел $\mathbb{N}$ 4.3). Буквально в последней формуле характеристического многочлена можно заменить каждое простое единичными ортами, чтобы убедиться в гомоморфизме алгебр.

6 Определение преобразования Дирихле

Определение 6.1 (Преобразование Дирихле) Преобразование Дирихле — это операция над арифметической функцией f, результатом которой является новая арифметическая функция F, определяемая формулой:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad n \in \mathbb{N},$$

где суммирование ведётся по всем положительным делителям d числа n.

Рис. 6.1: Петер Густав Лежён Дирихле (1805-1859 нем. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. В теории чисел доказал теорему о прогрессии: последовательность $a + nb$, где a, b — взаимно простые целые числа, содержит бесконечно много простых чисел.

Связь с мультипликативностью

Если f — мультипликативная функция, то её преобразование Дирихле F также мультипликативно.

Обратно: если F мультипликативно, то и f мультипликативна.

Формула обращения Мёбиуса

Если F — преобразование Дирихле функции f, то:

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

где μ — функция Мёбиуса.

Ассоциативность с свёрткой

Преобразование Дирихле можно выразить через свёртку Дирихле:

$$F = f * \mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}(n) = 1$ для всех n.

6.1 Примеры преобразований Дирихле

Для единичной функции $\mathbf{1}$

$$F(n) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n.

Для функции Эйлера φ

$$F(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Для степенной функции $f(n) = n^s$

$$F(n) = \sum_{d|n} d^s = \sigma_s(n),$$

где $\sigma_s(n)$ — сумма s-х степеней делителей n.

Для функции Мёбиуса μ

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Связь с рядами Дирихле

Преобразование Дирихле тесно связано с рядами Дирихле. Если

$$\mathrm{DG}(f; s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

— ряд Дирихле для f, то ряд для преобразования $F = f * \mathbf{1}$ равен:

$$\mathrm{DG}(F; s) = \mathrm{DG}(f; s) \cdot \zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Следствие 6.1 (Важные следствия) 1. Преобразование Дирихле сохраняет мультипликативность. 2. Обратное

преобразование выражается через функцию Мёбиуса. 3. Операция полезна при изучении делителей, сумм функций на делителях и аналитической теории чисел.

7 Свёртка Дирихле и ряды Дирихле

Выше было сказано, что физический смысл имеют лишь унитарные преобразование, сохраняющие нормы векторов и свойства эрмитовости операторов см. 3.1, где рассматриваются вопросы инвариантности относительно некоторого преобразования гамильтониана исследуемо системы.

Рассмотрим пространство арифметических функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ с нормой, определяемой через взвешенное ℓ^2-скалярное произведение:

$$\|f\|_\zeta^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^2}.$$

Эта норма связана с рядом Дирихле:

$$L_{|f|^2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^s},$$

так что $\|f\|_\zeta^2 = L_{|f|^2}(2)$.

Свёртка Дирихле определяется как:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Исследуем вопрос, при каких условиях выполняется равенство:

$$\|f * g\|_\zeta^2 = \|f\|_\zeta^2 \cdot \|g\|_\zeta^2$$

Случай вполне мультипликативных функций Функция f называется вполне мультипликативной, если $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$ и $f(1) = 1$.

Для вполне мультипликативной f её ряд Дирихле допускает представление в виде эйлерова произведения:

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

при условии сходимости $|f(p)p^{-s}| < 1$. В частности, для $|f(n)|^2$ (которая также вполне мультипликативна) имеем:

$$L_{|f|^2}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - |f(p)|^2\, p^{-s}}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_\zeta^2 = L_{|f|^2}(2) = \prod_p \frac{1}{1 - |f(p)|^2\, p^{-2}}.$$

Известно, что для любых арифметических функций f, g:

$$L_{f*g}(s) = L_f(s) \cdot L_g(s).$$

Если f и g вполне мультипликативны, то

$$L_{f*g}(s) = \prod_p \frac{1}{(1 - f(p)p^{-s})(1 - g(p)p^{-s})}.$$

Однако $f * g$, вообще говоря, не является вполне мультипликативной, поэтому $L_{|f*g|^2}(s)$ не разлагается в простое эйлерово произведение.

Условие сохранения нормы

Пусть f и g — вполне мультипликативные функции, причём их носители имеют непересекающиеся множества простых делителей. То есть, если $f(n) \neq 0$, то все простые делители n лежат в некотором множестве $\mathbb{P}_f$, а если $g(n) \neq 0$, то все простые делители n лежат в $\mathbb{P}_g$, и $\mathbb{P}_f \cap \mathbb{P}_g = \varnothing$.

Тогда для любого n, если $n = ab$ с $\gcd(a, b) = 1$, в сумме

$$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g(n/d)$$

ненулевой вклад даёт только слагаемое, соответствующее разложению $d = a$, $n/d = b$, где a содержит только простые из $\mathbb{P}_f$, а b — только из $\mathbb{P}_g$. Следовательно,

$$(f * g)(n) = f(a) g(b),$$

и

$$|(f * g)(n)|^2 = |f(a)|^2\, |g(b)|^2.$$

Теперь вычислим норму:

$$\|f*g\|_\zeta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f*g)(n)|^2}{n^2} = \sum_{\substack{a,b\geq 1 \\ \gcd(a,b)=1}} \frac{|f(a)|^2|g(b)|^2}{(ab)^2}.$$

Из взаимной простоты носителей сумма раскладывается в произведение:

$$\|f*g\|_\zeta^2 = \left(\sum_a \frac{|f(a)|^2}{a^2}\right) \cdot \left(\sum_b \frac{|g(b)|^2}{b^2}\right) = \|f\|_\zeta^2 \cdot \|g\|_\zeta^2.$$

Интерпретация через эйлеровы произведения При условии непересекающихся простых носителей:

$$L_{|f|^2}(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}_f} \frac{1}{1-|f(p)|^2p^{-s}}, \quad L_{|g|^2}(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}_g} \frac{1}{1-|g(p)|^2p^{-s}}.$$

Поскольку $|f*g|^2$ для $n = ab$ ($\gcd(a,b) = 1$) равна $|f(a)|^2|g(b)|^2$, имеем:

$$L_{|f*g|^2}(s) = L_{|f|^2}(s) \cdot L_{|g|^2}(s).$$

Подставляя $s = 2$, получаем искомое равенство норм.

Условие сохранение нормы, определяемой через взвешенное ℓ^2-скалярное произведение имеет важное значение. Главная мысль, изложенная в главе, посвященной ζ - функции заключается, в верификации через физический эксперимент. Следует предположить, что слагаемому вида $\frac{1}{n^2}$ соответствует квадрат амплитуды волновой функции. Напомним, что среднее значение наблюдаемой f выражается формулой вида 7.2, при этом множество величин w_{nm} - это элементы статистического оператора плотности в энергетическом представлении. - они образуют статистическую матрицу. Задача нахождения такой матрицы сводится к вычислению вероятностей $w_n = w_{nn}$ - это вероятности нахождения системы в состояниях с энергией E_n, и они образуют диагональные элементы матрицы плотности (квадраты амплитуды волновой функции) см. также 8.

Из сказанного вытекает вывод, что сохранение нормы, определяемой через взвешенное ℓ^2 обусловлено физикой. Сравните полученный вывод с рассуждениями "Пифагоровы 3-ки существуют только на 2D плоскости" в 7.

Краткий вывод Таким образом, для вполне мультипликативных функций норма

$$\|f\|_\zeta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^2}$$

сохраняется при свёртке Дирихле ($\|f * g\|_\zeta^2 = \|f\|_\zeta^2 \|g\|_\zeta^2$) тогда и только тогда, когда множества простых делителей носителей f и g не пересекаются.

В общем случае (при наличии общих простых делителей в носителях) возникают перекрёстные члены, нарушающие равенство, даже если функции вполне мультипликативны.

Таким образом, функции Чебышёва и функция Римана, функция Мёбиуса, ряд соотношений между ними, имеют термодинамическое обоснование, за счёт понимания их физического смысла практически без вычислений можно произвести важные оценки.

8 Место p - чисел в физике

Именно простые числа позволяет вместе связать систему, надсистему и подсистему. Вывод канонического распределения Гиббса был сделан исходя из равновероятного распределения по всем микроканаоческим состояниям системы, вероятности нахождения сложной системы 1-2 равной произведению вероятностей её подсистем 1 и 2: $\rho_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2$, что обуславливает удобство работы с логарифмами и позволяет оперировать с аддитивными переменными. Аддитивные функции для однородных величин — это основа для ряда натуральных чисел, для счетных множеств и производства любых измерений => измеримость расстояний, ввод понятий метрики и меры. Свойства микромира определяет свойства макромира. => операция умножения является первичной в сравнении с операцией сложения / вычитания. С изложенных позиций можно объяснить аксиомы арифметики, введённых Джузеппе Пеано а также принцип математической индукции, широко практикуемый в математических доказательствах. см. [Деп65].

[Деп65]: Депман (1965), История арифметики

Таблица 8.1: Математическая модель. Алгебра.

Сложность понимания ⟶			
Простые числа	Целые многочлены	Матрицы систем ЛДУ $\mathbf{y} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$.	Квантовая механика. Линейные операторы
2, 3, 5, 7, 11 ... и чётные целые числа $2\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$	Неприводимые многочлены	Группа симметрии G. Вполне приводимые представления, разложенные на неприводимые: $D = \sum_j^{\oplus} r_j D^{(j)}$	$\widehat{H}\psi = E\psi$ и формула энтропии $S = -\sum_i w_i \ln(w_i)$
$g = \frac{1}{p}$ – плотность вероятности и $\underline{\tilde{Z}} = \langle g \rangle$ – порождающий элемент группы	Характеристический многочлен $(\lambda - a_i)^k$ матрицы	Статистический вес Γ и его дифференциал $\Delta\Gamma$	Плотность вероятности $\lvert\Psi\rvert^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n$. Статистическая матрица. Z-сумма
Основная теорема арифметики $a = \prod_p p^{\alpha(p)}$	$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}$	$R = R_1 \oplus R_2 \cdots \oplus R_i$. Инвариантные подпространства. Характеристический многочлен.	Вырожденные собственные значения Гамильтониана (вырождение энергетического уровня)
Познание Вселенной	Многочлены и матричные функции	Описание динамических процессов	Моделирование микромира
⟵ Основы			

9 Ряд Гранди и квантовая неопрелённость

Ещё одно любопытное свидетельство в пользу связи арифметики с квантовой механикой приведено в публикации "Математик-монах находит божественное в парадоксальном ряде чисел" 21:49 / 16 августа, 2024 Источник Securitylab.ru

Замечание 9.1 Как математический парадокс привёл монаха Луиджи Гранди к философским и теологическим выводам, перевернувшим представление о бесконечности?

Вопрос о том, каков результат бесконечного математического ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ на первый взгляд может

показаться простой задачей, но в XVIII веке он стал настоящим вызовом для многих выдающихся математиков. Этот парадокс, известный как ряд Гранди, получил свое название в честь итальянского математика и монаха Луиджи Гвидо Гранди, который впервые начал его изучать в 1703 году.

Суть парадокса заключается в том, что, несмотря на кажущуюся простоту вычислений, различные методы подсчета приводят к разным результатам. Если представить ряд в виде $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ то каждая пара чисел $1-1$ равна нулю, и вся сумма ряда сводится к нулю. Однако, если расставить скобки иначе, например, оставить первый элемент вне скобок, а затем сгруппировать остальные: $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$ то сумма уже оказывается равной 1. Таким образом, простое изменение порядка выполнения операций приводит к совершенно различным итогам.

Этот парадокс интересовал не только Гранди, но и таких выдающихся математиков, как Готфрид Вильгельм Лейбниц и Леонард Эйлер. Лейбниц, размышляя над этой проблемой, предложил, что правильным ответом может быть $\frac{1}{2}$. Он обосновывал это тем, что если остановить сложение в случайной точке, промежуточная сумма будет либо 0, либо 1 с равной вероятностью. Поэтому, по его мнению, среднее значение суммы должно быть $\frac{1}{2}$. Леонард Эйлер в своем труде «О расходящихся рядах», опубликованном в 1760 году, поддержал эту идею и даже утверждал, что сумма ряда Гранди и дробь $\frac{1}{2}$ эквивалентны и могут быть заменены друг на друга без ошибки.

Однако, несмотря на все аргументы в пользу различных результатов, современные математики пришли к выводу, что ряд Гранди не имеет определенной суммы. Этот вывод основан на анализе частичных сумм ряда, которые чередуются между 0 и 1 и никогда не сходятся к какому-либо фиксированному значению. В математике такое поведение ряда означает, что он расходится, то есть не имеет конкретной суммы.

Современные подходы к бесконечным рядам и их суммированию появились благодаря развитию анализа в XIX веке. Было введено понятие сходимости, которое позволяет определить, к какому значению приближается сумма

ряда по мере добавления всё большего числа его элементов.

Тем не менее, в случае ряда Гранди частичные суммы колеблются между 0 и 1 и не приближаются к какому-либо одному значению. Это ведёт к заключению, что ряд Гранди не имеет определенной суммы. Однако, существуют альтернативные методы суммирования, такие как метод Чезаро, при котором вычисляется среднее значение частичных сумм. Применение этого метода к ряду Гранди приводит к результату $\frac{1}{2}$

Следствие 9.1 Читателей, знакомых с парадоксом Кот Шрёдингера такая квантовая неопределённость не удивляет. Это ещё один пример связи арифметики (в данном случае можно говорить о способах обособления чисел за счёт ассоциативных правил) с квантовой механикой.

Сделанные выводы могут быть обобщены на целый ряд подсистем и в равной мере относятся как к математике (основы теории вероятности, логики), так и физике. Логично при этом определить логарифм от распределения вероятности и получить аддитивную величину — энтропию. Сепарабельность - возможность выделения подсистемы в составе сложной системы и возможности задания функции позволили Архитектору Вселенной (если таковой существует даже вопреки скепсису атеистов) сделать мир управляемым и познаваемым, редуцировать сложные явлений к простым.

The Riemann hypothesis and statistical physics

6 The Riemann hypothesis from the standpoint of statistical physics

1 Introduction 266
2 The Infinity of Non-Trivial Zeros . 268
2.1 Phase space and entropy 277
2.2 Statistical weight and density of states 279
3 Algebra and Symmetry 284
4 Symmetry. Groups. Characters 289
5 Gibbs distribution and Zeta function . 294
6 Orthogonality. Separation. p-Number . 299
7 Diffraction Grating. The natural basis for the wave function. 306
7.1 Generalization of analogies of the natural basis and the diffraction grating formula 310
8 The theorem on the quantum nature of p numbers 313
9 The Riemann hypothesis for schoolchildren . . . 324

1 Introduction

The Riemann hypothesis RH is regarded as one of the most significant unsolved mathematical problems in the field. In this manuscript, author considers a proof of the RH concerning the so-called non-trivial zeros of the zeta function. The Riemann zeta function occupies a pivotal role in the realm of analytic number theory, with its applications extending to the domains of theoretical physics, probability theory, and mathematical statistics. The author is convinced that the RH should be verified from the standpoint of physics, quantum mechanics, reference to the Standard Model of the Universe, symmetry and algebra. In the contemporary era, fundamental knowledge of these subjects is imparted in educational institutions. Prime numbers can be considered a mathematical model of the possibility of separateness of a subsystem within a system. Despite the fact that the formulae delineating the zeta function and its properties are somewhat cumbersome and necessitate a grasp of higher mathematics, the theory of analytic functions, and number theory, the proof's fundamental premise is predicated on the principles of physics, mathematics, and logic that are typically covered in school.

With a focus on a broad readership, including high school students, the italics marks special terms that can easily be found in the scientific literature. The interdisciplinary nature of the study and the conflict in the notation used, such as p - probability and p - momentum, p - prime number, prompted the author to declare at the beginning of each section the main local variables, functions, in order to convey in what sense their use is meant.

The most characteristic property of the Riemann $\zeta(s)$ function, which can be written by two formulas. The first one is an

infinite sum Dirichlet series of the form:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.1}$$

where is meant the convergence of the series for s (the question of convergence is discussed below), and n runs through all natural numbers. The second formula defines a $\zeta(s)$ function as an infinite series of products:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} \dots\right) \tag{1.2}$$

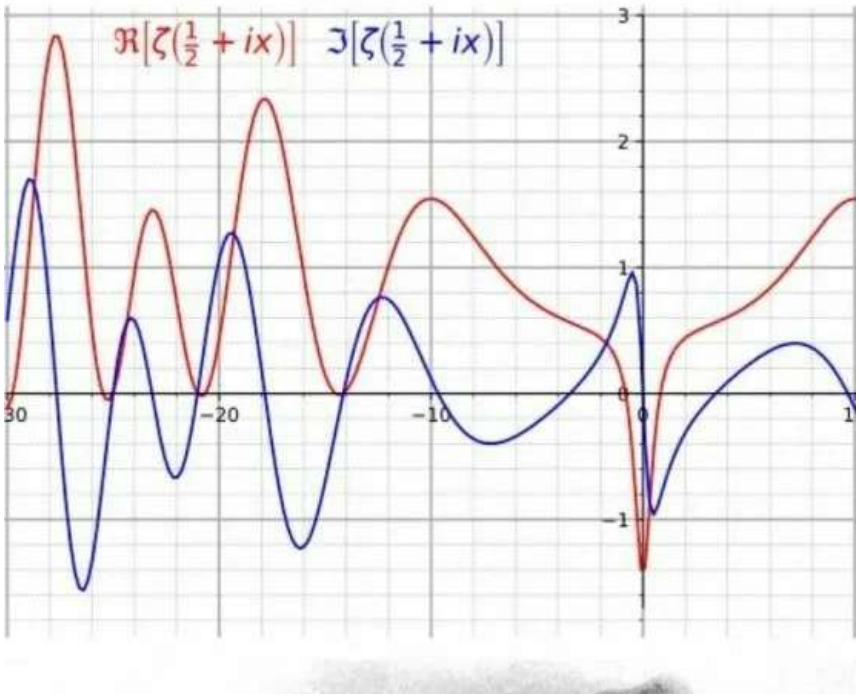


Figure 1.1: The graph shows the real part $\Re$ and the imaginary part $\Im$ of the Riemann Zeta function.

in this formula, p runs through all the primes. (In the case of a convergent series (1.1), it is easy to consider its partial sums, apply the associative law, and perform arithmetic operations on prime numbers, discarding low-order terms). Euler proved [Cha74] that both definitions are equivalent for the case of integers s.

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

Lemma 1.1 *As complete multiplicative function* $f(ab) = f(a)f(b) \Longrightarrow f(1) = 1$, *we assume absolute convergence of a series of the form similar to just given* Φ *(the so-called generating*

special arithmetic function). If $f(x)$ - completely multiplicative functions and series $\sum_1^\infty f(n)$ converges absolutely, then the identity is true

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) \dots) = \prod_p (1 - f(p))^{-1} \tag{1.3}$$

The proof of this lemma is similar to the proof of equivalence of both definitions of the ζ - function 1.1 and 1.2

[Rie76]: Riemann (1876), *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*

As an analytical function of the argument of the - complex variable $s = \sigma + it$, $\zeta(s)$ was first studied by Riemann [Rie76]. It turned out that $\zeta(s)$ can be extended analytically to the entire complex plane $\mathbb{C}$, including negative values of σ, and has no features on it other than $s = \frac{1}{2} + it$ (first-order poles). $\zeta(s) = 0$ turns to zero in the range $(-2, -4, -6 \dots)$ negative values σ - these are the so-called trivial zeros. Of particular scientific interest is the search for non-trivial zeros of the $\zeta(s)$ - function. The RH states that all nontrivial zeros of $\zeta(s)$ are located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$.

2 The Infinity of Non-Trivial Zeros

In this section, Γ denotes the mathematical Gamma function; $\psi(x)$, χ, and Ξ are functions specially defined by Riemann to simplify expressions; and T is an interval for the variable t along the imaginary axis on $\mathbb{C}$.

[Tit86]: Titchmarsh (1986), *The Theory of the Riemann Zeta-Function*

A function $f(z)$ of a complex variable z which is single-valued in this domain and which has a finite derivative at every point. Such function that can be locally represented by power series.

The following functional equation holds [Tit86], whose form may initially appear overly complex:

$$\zeta(1 - s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s) \tag{2.1}$$

due to the use of the Euler gamma function in the form familiar to modern readers, as refined by Legendre:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{2.2}$$

Figure 2.2: Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866 was the first to study the analytic function $\zeta(s)$ of the argument - a complex variable $s = \sigma + it$.

This integral is easily evaluated by parts and reduces to an integral of a similar form — ultimately yielding the recurrence relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. For school students, it suffices to recall the definition of the factorial $n!$ to better understand the gamma function and its properties. From 2.2, through a double substitution of variables, the following formula emerges:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha} \exp(-at^{\beta}) dt = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right). \tag{2.3}$$

Substituting $a = -n^2\pi$, $\beta = 1$, and $\alpha = \frac{s}{2} - 1$, we arrive at the expression:

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^s \pi^{s/2}}. \tag{2.4}$$

Since the ζ-function can be analytically continued to the entire plane $s = \sigma + it$ for $\sigma > 1$, factoring out the constant from under the summation sign yields:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{s/2}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x}\, dx &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\, dx \end{aligned} \tag{2.5}$$

Here, the interchange of summation and integration is permissible due to the absolute convergence of the series. Riemann isolates the function

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \tag{2.6}$$

and simplifies the expression:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x), dx, \quad \sigma > 1. \tag{2.7}$$

From 2.6, using the known formula for the Gaussian integral $\int_0^\infty e^{-ky^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}$, we derive:

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left\{2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right\}. \tag{2.8}$$

[Tit86]: Titchmarsh (1986), *The Theory of the Riemann Zeta-Function*

Titchmarsh deduced from the last formula that there is a connection between the derivative and the function itself [Tit86], which is easy to see directly by simplifying the expressions obtained during differentiation by replacing the variable with its values $x = 1$:

$$4\psi'(1) + \psi(1) = -\frac{1}{2} \tag{2.9}$$

So from 2.7 and 2.8 follows the formula:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\psi(x)dx \\ = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}&\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\psi(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right\}dx + \int_1^\infty \psi(x)dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(x)dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

Riemann drew attention to the symmetry of the occurrence of the factors s and $s-1$ in the resulting formula, from which he concluded that the zeros ζ should be located symmetrically relative to the axis $\sigma = \frac{1}{2}$ on $\mathbb{C}$. From the obtained formulas 2.8 and 2.9 by replacing $s = \frac{1}{2} + it$ Bernhard Riemann easily obtained the expression:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}cos\left(\frac{1}{2}tln(x)\right)dx \tag{2.11}$$

Also to simplify working with the expression 2.1 Riemann

specifically introduced the function $\chi(s)$ according to the expression $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$.

$$\chi = 2^{1-s}\pi^{-s}cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \tag{2.12}$$

Therefore, $\chi(s)\chi(1-s) = 1$. According to the formulas 2.1, 2.12 above, if you put:

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{2.13}$$

then you can output a symmetric expression for the function:

$$\xi(s) = \xi(1-s) \tag{2.14}$$

Riemann then replaced the variable by rotating the axes of the plane $\mathbb{C}$ by an angle of $\frac{\pi}{4}$:

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) \tag{2.15}$$

Thus, the functional equation 2.1 is equivalent to the statement about parity of the function $\Xi(z)$. In Chapter *XI* [Rie76] On the number of primes not exceeding this value Riemann concludes that the function ξ can vanish only if the imaginary part of t is enclosed between $-\frac{i}{2}$ and $\frac{i}{2}$, and the number of roots of the equation whose real part is enclosed between 0 and T is approximately equal to:

$$\frac{T}{2\pi}log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \tag{2.16}$$

Riemann writes: 'the specified limits contain approximately the same number of valid roots; therefore, it is very likely that all the roots are valid. In any case, it would have been desirable to find a rigorous proof of the second proposition; after several futile, not very persistent attempts to find one, I temporarily abandoned them, since it was not necessary for the immediate purpose of my research'. Based on the biography of Riemann [Der09], it is natural to assume that Riemann made many persistent attempts to prove the Hypothesis formulated by him, but based on the level of development of physics in the middle of the XIX century, it was impossible to prove it.

Riemann's conclusion also confirms Titchmarsh by analyzing the following integral [Tit86]:

[Rie76]: Riemann (1876), *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*

[Der09]: Derbyshire (2009), *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*

[Tit86]: Titchmarsh (1986), *The Theory of the Riemann Zeta-Function*

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \, ch(\alpha t) \, dt = \frac{(-1)^n \pi \, cos \, \frac{\pi}{8}}{2^{2n}} \tag{2.17}$$

where $n = (0, 1, 2 \ldots N)$ has as many zeros as the sequence $(-1)^n$ for sufficiently large $a = a(N)$ and sufficiently close $\alpha \to \frac{\pi}{4}$. Therefore,on the interval $(0, a)$, the function $\Xi(t)$ has at least N variables of the sign. By directing $N \to \infty$, Riemann concluded that the number of non-trivial zeros is infinite.

Physical phenomena are the key to solving the puzzle

The phenomenon of light interference was first clearly described and demonstrated in 1801 by the British physicist Thomas Young. In his famous double-slit experiment, he observed the appearance of interference fringes, which became classic proof of the wave nature of light. Young not only conducted the experiment but also provided a theoretical generalization of the phenomenon, introducing the very term "interference."

Although diffraction effects (for example, from the edge of a slit or an obstacle) had been observed earlier, their systematic study and the creation of a rigorous theory began in the 19th century. The theoretical foundation for understanding diffraction was laid by Christiaan Huygens, who formulated his principle of wave propagation in 1690, and Augustin-Jean Fresnel. In 1818, Fresnel developed a quantitative theory of diffraction by combining Huygens' idea of secondary wavelets with the principle of interference.

The study of light intensity distribution from periodic structures became possible with the advent of diffraction gratings. The prototype of the first such grating was created by David Rittenhouse in 1786 using a system of parallel wires. However, the real breakthrough in the use of gratings for spectroscopy was made by Joseph von Fraunhofer, who began using them in 1821 for precise wavelength measurements. The final contribution to the rigorous mathematical description of diffraction and interference phenomena was made by Gustav Kirchhoff, who presented his fundamental theory based on the wave equation in 1883.

Thus, the RH states that all non-trivial zeros of $\zeta(s)$ are located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$. But no one has yet succeeded in confirming or refuting this statement, despite the persistent efforts of mathematicians using supercomputers and distributed computing. Algorithm found Odlyzhko-Schoenhage for calculating the Riemann zeta function up to 10^{20} (The 10^{20}-th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors) see. also [Odl87].

[Odl87]: Odlyzko (1987), «On the distribution of spacings between zeros of the zeta function»
[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

It is not difficult to derive [Kub+07] the formula for the propagator of free particle motion:

$$K(r, r', t) = \frac{m}{2\pi i\hbar t} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar t}(r - r')^2\right\} \tag{2.18}$$

It is easy to trace the analogy of the propagator with the formula for determining the so-called $\psi(\frac{1}{x})$ - function introduced by Riemann 2.6, where you can set $r' = 0, r = n, t = x$. This analogy may seem artificial at first glance, but it will be explained more fully in the next section.

The Green's function and propagator are based on the principle of linearity of the influence of independent factors, superposition of forces, and fields. For the case of a quasiclassical approximation, a function is substituted into the Schrödinger equations but with the addition of a complex term as the root of the probability density ρ to the phase $\frac{\hbar}{i} ln(\sqrt{\rho})$ and further expansion of the phase in a series with respect to the degree of the Planck constant $\hbar$:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(r)\right) \\ S &= S_0 + \hbar S_1 + \frac{\hbar^2}{2} S_2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.19}$$

Substituting 2.19 in the Schrödinger equation and equating the terms with the same powers $\hbar$, it is easy to derive the equation for a wave packet with a given propagation direction, calculate its amplitude through the pulse $p(x)$ as in the classical case using the formula for amplitude of wave function: $A(x, t) = \frac{const}{\sqrt{p(x)}}$ and the phase exactly up to the multiplier $\frac{i}{\hbar}$ equal to the classical action.

It is interesting to note that from a mathematical point of view, the quasilassical approximation described by in solving problems of quantum mechanics (1926) WKB Wentzel, Kramers, Brillouin and is a variant of the stationary phase

method. Based on WKB, an alternative formulation of quantum theory is developed Feynman path integral method [Tak08], which consists in summing the contributions from all trajectories with the exponent weight $exp\left\{i\frac{S}{\hbar}\right\}$, where S - classic action along this path. The classical textitprinciple of least action selects from the family of virtual trajectories one that satisfies the classical equation of motion.

[Tak08]: Takhtajan (2008), *Quantum Mechanics for Mathematicians*

Feynman Path Integral Method

Quantum mechanics is founded on the superposition of trajectories, where the resultant wave function (probability amplitude) arises from the interference of contributions with differing phases [Zel02]. This mirrors the phenomenon of wave interference in optics.

[Zel02]: Zelevinsky (2002), *Quantum Physics Lectures*

The analogy between the propagator 2.18 and Riemann's $\Psi(x)$ 2.6 function merits closer examination. Meanwhile, since the formulation of the RH in 1859, important discoveries have been made in physics, repeatedly confirmed by experiments. And this knowledge will help you find a proof of the RH.

Definition 2.1 *According to [Osi06] Verification (from Latin. verificatio – proof, confirmation, from Latin. verus – true and facio – to do) is a concept used in epistemology, logic and methodology of science to refer to the processes of establishing the truth of scientific statements as a result of their empirical verification. Such verification is possible by setting up a physical experiment, observing the phenomenon, measuring and interacting the observation instrument with the object under study.*

[Osi06]: Osipov (2006), *The Russian Academy of Sciences, 2006 Update*

Although it may be of scientific interest to build mathematical models for which there are no analogues in the known physical world [Vin03], but in this paper the Riemann hypothesis will be proved to the contrary: if the nontrivial zeros $\zeta(s)$ were located outside the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$, then this would contradict the fundamental laws of physics, quantum mechanics, the axioms of arithmetic, abstract algebra.

[Vin03]: Vinberg (2003), *A Course in Algebra*

The wave-particle dualism studied in school is a property of nature, which consists in the fact that material microscopic objects can exhibit the properties of classical waves under

some conditions, and the properties of classical particles under others.

A force carrier or exchange particle

A force carrier, gauge boson, or exchange particle is a type of particle in quantum field theory that mediates the fundamental forces between matter particles. These particles are the quanta (discrete packets) of their corresponding quantum fields. Quantum field theory describes nature by treating forces as interactions between these fields. The force between two particles can be described in two complementary ways: as the effect of a field generated by one particle acting on the other, or as the exchange of virtual force-carrying particles between them.

If the Lagrange function of a given mechanical system is known, then the Lagrange equation:

$$\frac{dL}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.20}$$

establishes the relationship between accelerations, velocities, and coordinates, thereby representing the equations of motion of the system. a system of s second-order equations for s unknown functions $q_i(t)$. For simplicity, the s coordinates $q_1, q_2 \ldots q_s$ are simply denoted by q. The general solution of such a system contains $2s$ arbitrary constants. To fully determine the motion of a mechanical system, it is necessary to set the initial conditions: all coordinates q and velocities $\dot{q}$.

For a system consisting of subsystems that do not interact but share a common resource (more on this below), the Lagrange function of the system is equal to the sum of the Lagrange functions of the subsystems.

The total derivative of the action is equal to the Lagrange function is determined by taking the derivative of the action S:

$$\frac{dS}{dt} = L \tag{2.21}$$

The first-order Hamilton-Jacobi equation will also be used below, where the partial derivatives of actions S in coordinates coincide with the momenta $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$:

$$H\left(q_1,\ldots,q_n;\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n};t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0. \tag{2.22}$$

The choice of generalized coordinates q is completely free, they can be any s quantities that uniquely determine the position of the system in space.

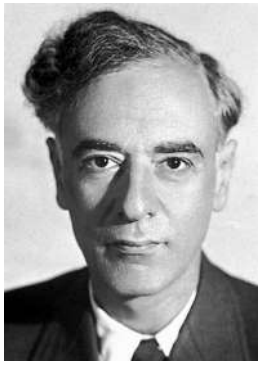


Figure 2.3: Lev Davidovich Landau (1908-1968) was a Soviet theoretical physicist, founder of the scientific school, academician of the USSR Academy of Sciences (elected in 1946). One of the founders of Russian theoretical physics. Winner of the Nobel Prize in Physics in 1962 for pioneering research in the theory of condensed matter, especially liquid helium.

Each point in the phase space corresponds to a certain state of the system in generalized coordinates (p, q). During the evolution of the system, the phase point representing it describes a certain phase trajectory in the phase space. For a system that performs one-dimensional finite motion and is characterized by a certain parameter α that determines the properties of the system itself (the external field in which the system is located). When this parameter is it changes slowly over time, i.e. during the period of the system's movement, then such a change is considered adiabatic. In this case, the integral:

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq \tag{2.23}$$

taken along the trajectory of movement with the specified E and the parameter α. The value of I remains constant in the approximation under consideration when the parameter α is changed, i.e. it is an adiabatic invariant.

According to Liouville's theorem, the volume of phase space has the property of invariance with respect to canonical transformations preserving Hamiltonian and integrals of motion, in particular energy, momentum, angular momentum. [LL04] [pp. 192-193]

[LL04]: Landau et al. (2004), *Theoretical Physics. Volume 1: Mechanics*

It is not difficult to prove the invariance of integrals by analogy.:

$$\begin{gathered}\iint\sum_i dp_i dq_i\\ \iiiint\sum_{i\neq k} dp_i dq_i dp_k dq_k\end{gathered} \tag{2.24}$$

in which integration is performed over specified two-, three-four-, etc. -dimensional manifolds in the phase space (the counter i - numbers the subsystem as part of the system under study). Along with the action, the phase volume, other thermodynamic variables are preserved during an adiabatic

change: energy, number of particles, entropy, free energy, enthalpy, and thermodynamic potential.

This suggests that there is a connection between the invariants of the studied subsystems in the system and the primes.

2.1 Phase space and entropy

The well-known formulas for the distribution of probability density of finding particles are studied in physics and mathematics schools [LAL69], this is the Boltzmann distribution $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$, the so-called barometric formula and Maxwell distribution in the coordinate-momentum representation q, p (for schoolchildren, the formula expressed in terms of velocities is more familiar):

[LAL69]: Landau et al. (1969), *Course of General Physics. Mechanics and Molecular Physics*

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi\hbar k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}{2mk_B T}} dp_x dp_y dp_z \qquad (2.25)$$

Figure 2.4: James Clerk Maxwell 1871-1879. — English physicist, creator of classical electrodynamics, co-founder of statistical physics.

Both formulas give an idea of the statistical ensemble, which should be considered in more detail. (Further in the text, the temperature T is set in energy units and the Boltzmann constant k_B) is lowered, as is customary in the traditions of theoretical physics $k_B T \to T$ 1 electron volt = 11606 degrees. Similarly, the Boltzmann constant is omitted below in the formulas for expressing entropy S).

The principle of equal probability is that in an isolated system in a state of thermal equilibrium, each microscopic state belonging to the aggregate is realized with the same probability.

For the combination of two subsystems, the distribution of ρ_{12} it is expressed as the product of the distribution functions ρ_1 and ρ_2 of individual subsystems, with $\rho_{12} = \rho_1 \rho_2$ Applying the natural logarithm to both sides of the equation, we get:

A microstate is a specific configuration of a system that describes the exact positions and momenta of all the individual particles that make up the system. Each microstate has a certain probability of occurrence during the movement of molecules. The macrostate of a system refers to its macroscopic properties, such as temperature, pressure, volume, and density.

$$ln\ \rho_{12} = ln\ \rho_1 + ln\ \rho_2 \qquad (2.26)$$

this demonstrates the additivity of the logarithm of the distribution function.

It follows that the logarithm of the distribution function is not only an integral of motion (a quantity that persists over time), but also has the property of additivity $\Longrightarrow$ for a composite

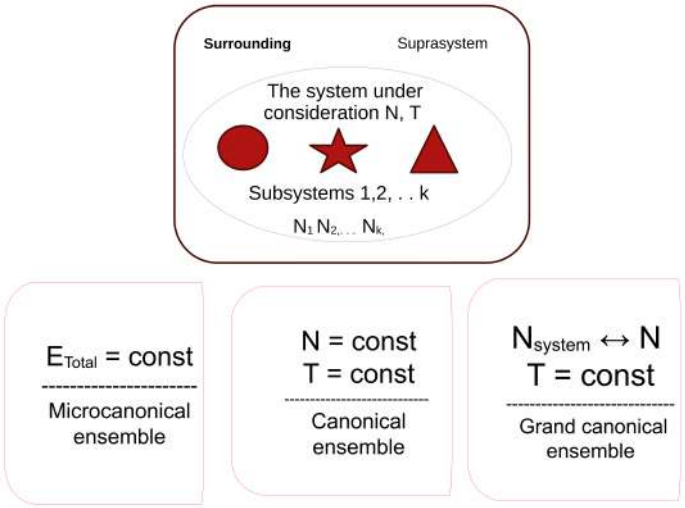


Figure 2.5: The studied (thermodynamic) system is a part of the universe allocated for observation, consisting of subsystems with a given number of particles, energy and temperature.

system, the value of the logarithm of the distribution function is equal to the sum of the corresponding quantities for its subsystems. This property plays a key role in statistical mechanics in the analysis of complex systems.

A statistical ensemble defined by the principle of equal probability of microscopic states, or, more precisely, a probability distribution of the form 2.30 is called microcanonical ensemble, and the distribution is microcanonical distribution.

Thus, a microcanonical ensemble describes an isolated system that has reached a state of thermal equilibrium.

Heisenberg's uncertainty principle

The Heisenberg uncertainty principle is expressed in the formula: $\Delta p \Delta q \geqslant \hbar/2$ It also manifests itself at the macro level in Fourier transforms, in spectra and signals: it is impossible to simultaneously narrow the band spectrum and signal duration.

The Heisenberg uncertainty principle from the standpoint of mathematics and physics is well analysed in [Mys72].

[Mys72]: Myshkis (1972), *Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics*

The set of microscopic states in quantum statistical mechanics forms a discrete countable set of quantum states defined by the quantum the number l (In statistical mechanics, one usually considers systems limited in space, so that the quantum

number l is discrete. Systems with unlimited dimensions are considered as the limiting case of finite systems.)

Statistical physics is based on the postulate equality of microstates, which is a development of the principle of symmetry.

The following definition can be given, which is obvious but important for further conclusions.

Definition 2.2 *One-time accounting of each microstate Each quantum microstate is calculated without repetition.*

This definition follows from quantum physics. See the reasoning in §31[LL02], where L.D. Landau and E.M. Lifshits write: From the point of view of classical statistical physics, the necessity of such an understanding of statistical integration is due to the fact that otherwise the multiplicativity of the statistical weight would be violated, and with it the additivity of entropy and other thermodynamic quantities.

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

This definition follows from quantum physics. For the prepared reader, you can also refer to Fedholm's fourth theorem. It states that the set of characteristic numbers of an equation is no more than countable, with a single possible limiting point at infinity. Recall that the characteristic number is uniquely related to the energy level, it is its inverse value. For more information, see 6.1.

2.2 Statistical weight and density of states

Since the potential energy is determined exactly to a constant, we will order the values of the energy levels in ascending order and consider them positive.

Each point of a given section of the phase space moves with time according to equations of motion of the considered mechanical system. This will move the entire site. In this case, the distribution function remains constant along the phase trajectory of the subsystem. For the quasi-classical case, where the laws of quantum mechanics can be replaced by Hamilton's equations, which are a reformulation of the well-known Newton's equations from the school.

Consider the following differential:

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s}$$
$$\Delta\Gamma_0 \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s} \tag{2.27}$$

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

The value of $\Delta\Gamma$ is called statistical weight microscopic state of the subsystem, and its logarithm is entropy [LL02]. (In the bottom line of the formulas just given, the expression Γ_0 characterizes the discreteness of space, its estimation is based on the uncertainty principle). Let's determine the probability density ρ finding a particle in the vicinity of a given point r:

$$\rho(r,t) = |\Psi(r,t)|^2 \tag{2.28}$$

and write down the normalization condition for the entire variety $\mathcal{M}$, taking into account the probability just determined:

$$\sum_{\mathcal{M}} \rho(\bar{E})\Delta q \Delta p = 1 \tag{2.29}$$

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

The number of quantum states lying in the energy range $\bar{E} \in (E, E + \delta E)$ is denoted as $d\Gamma$ (R. Kubo introduced the designation [Kub+07] $\Omega_0 \to \Gamma, \Omega \to \Delta\Gamma$, which seems to be unsuccessful due to the designation of the specified letter thermodynamic potential in Russian literature).

A simple form of the formula 2.27 does not really reflect the complexity of calculating statistical weight. Statistical weight is closely related to the symmetry of the system under study, driven by representations of the symmetry group, which in the general case can obey the rules of the tensor product 3.2. Therefore, along with the above, we will consider an alternative definition, which we will rely on in the future.

Let the variety be $\mathcal{M}$ It is a set of all possible microscopic states in which a system can be located under given macroscopic conditions. In the classical case, $\mathcal{M}$ is a certain subspace of the phase space, and in the quantum mechanical case, it is a set of quantum states of the system. The probability of the realization of these microscopic states of the system is determined by the probability that one of the microscopic states is realized in the volume element $\Delta\Gamma$ of the phase space:

$$Pr(\Delta\Gamma) = \int\limits_{\Delta\Gamma \in \mathscr{M}} w(q,p)\, d\Gamma$$
$$Pr(l) = w(l), \quad (l \in \mathscr{M}) \tag{2.30}$$

(where Pr is short for $Probability$). The formulas are given for the classical and quantum mechanical cases, respectively. [Kub+07].

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

Having chosen a reporting system with a resting center of mass (the total momentum of the angular momentum is zero), we express the statistical weight in terms of energy using the formula:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(E)}{dE}\Delta E \tag{2.31}$$

Above, $\Delta\Gamma(E)$ denotes the number of quantum states with an energy value of E' in the range of $E \leq E' \leq E + \delta E$. The value of $\Delta\Gamma$ is called statistical weight of the microscopic state of the system, and its logarithm S is called entropy.

The probability distribution of energy is given by the expression:

$$W(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE} w(E). \tag{2.32}$$

The integral over all probabilities of subsystem states forms a complete group of events ⇒ normalization condition for the probability density function W(E):

$$\int\limits_{\mathscr{M}} W(E)dE = 1$$
$$\sum_{l}^{L} W\Delta\Gamma = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} W_{i,j}\Delta\Gamma_{i,j} = 1 \tag{2.33}$$

for the classical and quantum mechanical cases, respectively, and in the lower formula, the summation occurs according to the quantum states l grouped by each of the subsystems $1, 2 \ldots k$ included in the system under study. Recall that the variety $\mathscr{M}$ It is a set of all possible microscopic states in which a system can be located under given macroscopic conditions,

the quantum number l is the counter of a discrete set of quantum states.

The total number of microstates Γ is a function of the energy of the system under study E, the number of particles in this system N, the volume V, and some parameter X, such as the strength of the electromagnetic/gravitational field:

$$\Gamma(E,N,V,X) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3(N_a+N_b+N_c\ldots)}N_a!N_b!N_c!\ldots}\int\limits_{H\leq E} d\Gamma$$
$$\Gamma(E,N,V,X) = \sum_{0<E_l<E} 1 \tag{2.34}$$

for the classical and quantum mechanical cases, respectively. In both formulas, the manifold $\mathcal{M}$ in the phase space and the eigenvalues of the H-Hamiltonian of the system are considered for the energy range $E < H < E + \delta E$.

Unique accounting of each microstate In quantum mechanics, identical particles are indistinguishable — this is symmetry of permutations of identical particles. Therefore, the result of phase space integration is divided by the number of permutations from combinatorial formulas, which explains the appearance of the multipliers $N_a!N_b!N_c!\ldots$ in the denominator, providing a unique account of each microstate.

Note that in quantum mechanics identical particles are indistinguishable - this is symmetry with respect to permutations of identical particles. Therefore, the result of phase volume integration is divided by the number of permutations according to combinatorics formulas - this explains the appearance of multipliers of the form $N_a!N_b!N_c!\ldots$ in the denominator.

Let's express the differential for the probability distribution function in the phase space and the probability density ρ to detect an object in the given coordinates of the phase space using the obvious formula:

$$dw = \rho(q_1,q_2,\ldots q_s,p_1,p_2,\ldots p_s)dpdq = e^{-\frac{E(p,q)}{T}}dpdq \tag{2.35}$$

- the probability of finding the object under study in the specified infinitesimal intervals of s coordinates and s pulses within the limits of: $q_i \ldots q_i + dq_i, p_i \ldots p_i + dp_i$. - abbreviated in the formula 2.35 and further in the text, this is denoted as $dpdq$ and is considered as an "element of volume" of the phase space $\Delta\Gamma$. In this case, the probability density is expressed in terms of the energy of the system $\rho = e^{-\frac{E(p,q)}{T}}$.

In most formulas here, the temperature T is set in energy units and the Boltzmann constant k_B) is lowered, as is customary in the traditions of theoretical physics $k_BT \to T$1 electron volt = 11606 degrees. Similarly, the Boltzmann constant is omitted in formulas for expressing entropy S

Again, significantly simplifying the presentation, avoiding the general case of the tensor product of representations of symmetry groups, discussed below, consider a closed system

as a whole (i.e. isolated from other systems, for example, placed in a thermostat), where $\Delta\Gamma_1$, $\Delta\Gamma_2$, $\Delta\Gamma_3$ are defined . . - statistical weights of its various subsystems. If each of the k subsystems forming the system under study together can be in one of the $\Delta\Gamma_\alpha$ states, then the phase volumes of the states are multiplied, and the corresponding entropies are added, as illustrated by the expressions:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= \prod_\alpha \Delta\Gamma_\alpha \\ S &= \sum_\alpha S_\alpha \end{aligned} \tag{2.36}$$

$\Delta\Gamma_i$ is the statistical weight, i.e. the number of microstates in the ith cell of the phase space (or for the ith energy level). Statement $\Delta\Gamma_i$ and $\Delta\Gamma_j$ are independent random variables, which means that fluctuations in the number of states in one cell of the phase space do not depend on fluctuations in the other. This is a common assumption for macroscopic subsystems.

For a system with a discrete energy spectrum, the number of such independent random variables $\Delta\Gamma_i$ is determined by the number of energy levels of the system under study. In general, their number can be very large or even infinite.

Note that the function describing the phase space 2.24, is multiplicative and allows separation of variables by subsystems in the system under study (an analogy with statistical weight is traced, but a more accurate convolution formula for statistical weights of subsystems is given below).

The stars and stripes method

It is interesting to note that the volume of the phase space 2.36 the number of microstates in the system under study for the case of bosons is calculated using the well-known in combinatorics method of stars and stripes. To find the number of placement methods N_j of identical balls of G_i We will represent the balls to the distinguishable boxes as a sequence of N_j points, and the separation between the boxes as $G_j - 1$ vertical segments. The total number of elements (points and segments) is $N_j + G_i - 1$ The number of ways to select positions for $G_j - 1$ dashes among these elements is equal to the number of combinations of

$$a = \binom{N_j+G_i-1}{G_i-1} = \frac{(N_j+G_i-1)!}{(G_i-1)!N_j!} \tag{2.37}$$

The additivity property is an important property of entropy (along with other thermodynamic variables: energy, number of particles, enthalpy, free energy, thermodynamic potential).

Let's assume that the physical quantity A (observed) is observed in the system under study. From a microscopic point of view, A is a dynamic quantity and is a function of microscopic variables. In classical mechanics, the microscopic value of an observable is determined by a function of the generalized coordinates of the phase point, and in quantum mechanics, the average value of such an observable it is expressed as follows: .

$$A(l) = \int \phi^* A \phi d\tau = \langle l|A|l\rangle \tag{2.38}$$

So, the phase space is discrete 2.27 and is a multiplicative function of generalized coordinates. The principles of multiplicativity of phase volume 2.36 and additivity of entropy are fulfilled here.

The following formula from quantum mechanics is useful to us, determining the average value of the operator A, which, as proved in quantum physics, coincides with the value of the observed A:

$$\langle A\rangle = \frac{\langle \Psi, A\Psi\rangle}{\langle \Psi, \Psi\rangle}. \tag{2.39}$$

This formula can be interpreted from the standpoint of probability theory and mathematical statistics: averaging must be performed over all microstates.

See also Appendix 14 (Lebesgue, Hilbert space. Operators).

3 Algebra and Symmetry

As in classical mechanics, the presence of integrals of motion is closely related to the symmetry of a quantum-mechanical

system. Suppose the system is invariant under some transformation $\hat{U}$, where only unitary transformations preserving vector norms and the Hermiticity of operators have physical meaning. Since the system's dynamics are determined by its Hamiltonian, the invariance property implies that under such a transformation, H satisfies:

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1} = \hat{H} \tag{3.1}$$

(For classical mechanics, Poisson brackets are analogously applicable.) In other words, the operator $\hat{U}$ commutes with the Hamiltonian $\hat{H}$, and their commutator vanishes:

$$\left[\hat{U}, \hat{H}\right] = \hat{U}\hat{H} - \hat{H}\hat{U} = 0 \tag{3.2}$$

If the operator $\hat{U}$ does not explicitly depend on time, it must correspond to a conservation law. Then, the eigenvector Ψ_E of the Hamiltonian $\hat{H}$, with definite energy E, transforms under $\hat{U}$ into a vector Ψ'_E possessing the same energy: $\Psi'_E = \hat{U}\Psi_E$.

Any operator $\widehat{Q}$ is expressed in terms of

$$\left\langle n|\widehat{Q}|m\right\rangle = \int \psi_n^* \widehat{Q}\psi_m \, dq \tag{3.3}$$

If $\widehat{Q}$ is explicitly time-independent and commutes with the Hamiltonian, its matrix elements $\left\langle n|\widehat{Q}|m\right\rangle$ do not change with time. This is the quantum form integrals of motion are quantities preserved under canonical transformations: momentum, angular momentum, volume of phase space during adiabatic variation, etc. It is important to cancel that for our case all eigenvalues- energies of microstates are real, this means that the operator H Hermit $H = \overline{H^*}$ (in the algebra of matrices, the tradition is adopted to denote the Hermitian conjugation $H = H^+$). The remarkable Hermitian property of the operator ensures the commutativity of the Hamiltonian with a number of operators.

The spectral theorem for Hermitian matrices

Any Hermitian matrix is reduced to a diagonal form by means of a unitary transformation. This fundamental result of linear algebra is as follows.

Let A be a Hermitian matrix ($A = A^\dagger$, where $A^\dagger$ is a Hermitian conjugate). Then there are: The unitary matrix U ($U^\dagger U = UU^\dagger = I$) is a diagonal matrix D with real elements on the diagonal such that the equality holds:

$$A = UDU^\dagger. \tag{3.4}$$

In other words, the matrix A is unitarily diagonalizable.

- All eigenvalues of a Hermitian matrix are real. This follows from the fact that the diagonal elements of D are eigenvalues of A.
- eigenvectors corresponding to different eigenvalues are orthogonal. The matrix U consists of orthonormal eigenvectors A.
- The columns of the matrix U form an orthonormal basis in $\mathbb{C}^n$.

Hermitian matrices play a key role in a number of fields: quantum mechanics (operators of physical quantities), signal theory and data processing; optimization and numerical methods.

As is known, a physical measurement in quantum mechanics corresponds to the effect of the operator of a physical quantity on the vector of state of the system. The so—called pure states, in which a physical quantity has a strictly defined value, correspond to eigenvectors, while the value of the quantity in this state is the eigenvalue of the vector of the pure state.

Converting G establishes a one-to-one correspondence between dynamic variables: a given variable B is transformed into a new variable Based on the assumption that the image of B' has the same spectrum is the same as B, and the eigenstates for each eigenvalue of the variable B' are images of the eigenstates corresponding to the same eigenvalue of the variable B. These two conditions express the requirement to preserve physical properties when transforming dynamic variables. As a rule, in physical applications, the T operator is linear, with the exception of the time reversal operator (example the antilinear operator). Various transformations found in physics form certain transformation groups. Each such group of transformations $\mathcal{G}$ is assigned a group of G operators that implement these transformations.

Definition 3.1 *It is customary to call a certain set of transformations a transformation group if it, together with any two transformations, contains the transformation resulting from their sequential execution, and together with each transformation contains the inverse transformation.*

Let there be a $\mathcal{G}$ transformation group $g_1, g_2, g_3 \ldots$ and each element of g_i of this set can be associated with the operator $\hat{T}(g)$, which defines the transformation of vectors and operators in the state space. The operator $\hat{T}(g)$ is group representation, it is defined by its physical properties only up to the phase multiplier $e^{i\alpha}$. We will get a set of $[T]$ transformation operators, the elements of which are in one-to-one correspondence with the elements from the group $\mathcal{G}$. Exactly, for each product $g_k = g_i g_j$ we have:

$$T_k = e^{i\alpha_j^k} T_i T_j \tag{3.5}$$

where $e^{i\alpha_j^k}$ is a certain phase, depending on the phase choice of $T_i T_j$. In order for [T] to be a group, it is necessary that all α_j^k,- vanish. Then the group [T] will become isomorphic to the group $\mathcal{G}$. This option is available for a number of groups, but not for all [Mes14]. In particular, this is possible for a group of permutations, but impossible for a group of rotations if the system contains an odd number of particles with a half-integer spin. It is not difficult to ensure the choice of $\mathcal{G}$ so that the set of $[T]$ transformation operators is a group $\hat{G}$, homomorphic to the group $\mathcal{G}$.

[Mes14]: Messiah (2014), *Quantum Mechanics*

So, a number of conservation laws are associated with each group of transformations. Whenever a conserved observable has a classical counterpart, these conservation laws are identical to the corresponding classical laws. The most common ones are listed below.:

1. Translational invariance and conservation of total momentum. A necessary and sufficient condition for the invariance of the Hamiltonian with respect to translations is its invariance with respect to infinitesimal translations;
2. Invariance with respect to rotations and conservation of angular momentum;
3. Reflection invariance and parity conservation. From the invariance of the Hamiltonian with respect to re-

flections at the point $\left[\hat{H}, \hat{S_0}\right] = 0$, it follows that the parity of S_0 is the integral of motion.

4. Permutation invariance and symmetry conservation. In a system consisting of identical particles, the Hamiltonian of invariance under any permutation P of these particles $\left[\hat{H}, \hat{S_0}\right] = 0$ for all P. $\Longrightarrow$ that $\forall$ observable (quantity), in quantum physics, constructed from P, is the integral of motion.

Every observable B is a real function of $F(\xi)$ fundamental observables $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)\ldots$, $f(\xi_n)$, systems. The image of this observable is $B' \equiv F(\xi')$ The transformation of G is fully determined if the laws of transformation of the main observables are known, i.e. if the functions $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)\ldots$, $f(\xi_n)$ are known such that

$$G\left[\xi_n\right] \equiv \xi_n' = f(\xi_n) \tag{3.6}$$

Since the transformations under consideration preserve algebraic relations, there are only two Possibilities: the transformation a) preserves the fundamental permutation relations, b) changes their sign. In the first case, the operator T corresponding to the transformation is linear, in the second case it is anti-linear.

The operator T must satisfy the relation $\xi_n' = T\xi_n T^+$ containing all the physical properties of T. However, these equalities are not sufficient to fully define T. You can choose T_1, another unitary (or antiunitary operator that satisfies the same ratios. But in this case, the ratio $T_1\xi T_1^+ = \xi'$ will be correct (omitting the index n to simplify writing) $\Longrightarrow T_1 T\xi T T_1^+ = \xi'$ $\Longrightarrow [TT_1, \xi] = 0$ for $\forall\xi$.

Assuming irreducibility of the state space R^m with respect to the observables ξ, i.e. that R^m does not contain subspaces invariant with respect to ξ, then the latter formula will be true if and only if the operator $T_1 T = cE$ is proportional to singular.This result follows from Schur's first lemma 4.2 and suggests a connection with the formula for two-to-one numbers whose greatest common divisor is one: $(m.n) = 1$. The homomorphism of algebras will help explain this relationship.

Definition 3.2 *A mapping of f from algebra A to algebra B is called a homomorphism if it is linear and preserves the*

multiplication operation, i.e. $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$ *for any* $x, y \in A$*, Fig. 3.6. The image* Im, f *of the homomorphism* f *is a subalgebra of the algebra* B*, and its kernel* Ker, f *is an ideal of the algebra* A*.*

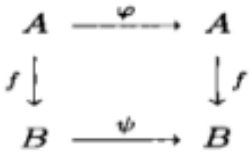


Figure 3.6: A group homomorphism is a mapping that preserves a group operation.

4 Symmetry. Groups. Characters

The term 'transformation group' is conventionally applied to a set of transformations that, in conjunction with any two transformations, encompasses the transformation resulting from their sequential execution. Moreover, each transformation within the group is required to contain the inverse transformation. All representations are considered over the field $\mathbb{C}$, which is an algebraically closed field.

Definition 4.1 *Abelian group — a group in which the operation is commutative:* $\forall g_1, g_2 \in G$ *we have* $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$*.*

Definition 4.2 *A representation of a group is a homomorphism of the group into a group of linear operators on the vector space. If the representation is irreducible, it cannot be decomposed into a direct sum of smaller representations. Representation dimension — the dimension of the vector space on which the representation operators operate.*

Let be in the space of R^m is a representation of D of a finite group G. If there is a subspace in the space $R^m \subset R^k$ (where $(0 < k < m)$) is invariant under all transformations of D, then the representation is called reducible - t. e. $\forall x \in R^k$ result of $D(x) \in R^k$. If an invariant subspace cannot be separated in the R^m space, then the representation is called irreducible. If the space R^m is decomposed into invariant subspaces, each of which implements an irreducible representation, then the representation of D is called completely reducible.

Lemma 4.1 *If a reducible representation* D *is unitary, then the orthogonal complement of the subspace* R^k *which we denote*

by R^{m-k} is also invariant under the transformations D. The selection of the first basis k elements as the first and m basis elements as the last m elements, respectively, of the subspaces R^k and $R^{(m-k)}$, results in the attainment of a block-diagonal form of the representation matrix D.

To illustrate this let $\{v_1, \ldots, v_k\}$ be a basis for R^k and $\{v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ be a basis for R^{m-k}. The combined basis $\{v_1, \ldots, v_m\}$ transforms D into block-diagonal form:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G \tag{4.1}$$

where D_1 acts on R^k and D_2 on R^{m-k}.

For an irreducible representation, any operator that commutes with all representation operators must be scalar of the form cE, where c is a number. Below are **Schur's lemmas** from which the orthogonality relation matrix elements of the unitary representation:

Proposition 4.2 (Schur's lemmas) $\forall g \in G$

1. *The matrix M commuting with all matrices of an irreducible representation is a multiple of E - unit: $MD(g) = D(g)M \Longrightarrow Mx = c\,x$ (M is a scalar t. e. multiplying E by a number c).*
2. *Let $D^{(1)}(g)$ and $D^{(2)}(g)$ are matrices of two irreducible, nonequivalent representations of the group G of order n_1 and n_2, respectively. Then any rectangular matrix M with n_1 columns and n_2 rows satisfying the relation $MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M$ for $\forall g \in G$, must be a null matrix.*

In the case of unitary irreducible representations of $D^{(i)}$, $D^{(j)}$ of orders n_i and n_j, respectively, for the group G with m elements from the first and second groups, from Schur's lemma follows orthogonality ratio for matrix elements.

Let the group of linear operators $\hat{T}_g$ be homomorphic to the group G: $g_1, g_2 \ldots g_m$ - . Then the representation of an arbitrary linear operator is 3.5, to be decomposed by ortham in the linear space R^m, where - m is dimension of the space and at the same time degree of representation of the group G.

$$T(\hat{g}_1)_k = \sum_{r=1}^{r=m} D_{r,k}\mathbf{e_r} \tag{4.2}$$

Matrices $D(g_i)$ form a representation of the order of m of the group G. Here R^m is the representation space, $e_1, e_2 \ldots e_m$ - representation basis. Working with linear operators boils down to working with matrices. When moving to a new basis, V representation matrices experience similarity transformations $V^{-1}DV$. If all the representation matrices are unitary, then the representation itself is called unitary - it preserves the length of the vector.

For an irreducible representation, any operator commuting with all representation operators must be scalar of the form cE, where c is a number. From Schur's lemma 4.2 implies an orthogonality relation 4.3 matrix elements of the unitary representation.

In the case of irreducible unitary representations of $D^{(i)}$, $D^{(j)}$ of order n_i and n_j, respectively, for the group G containing m elements from the first and second Schur's lemma implies orthogonality ratio for matrix elements (For clarity, imagine a chessboard and remember how $\delta_{i,j}$ works):

$$\sum_{g \in G} D^{(i)}_{\mu\nu}(g) \overline{D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g)} = \frac{m}{n_i} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} \delta_{ij} \tag{4.3}$$

This relation is interpreted as a condition for orthogonality and normalization of vectors in an m-dimensional space. This means the vector $D^{(i)}_{\mu\nu}(g_1), D^{(i)}_{\mu\nu}(g_2) \ldots D^{(i)}_{\mu\nu}(g_m)$ or $D^{(i)}_{\mu\nu}$, decomposed into components and similarly for $D^{(j)}$. The number of such vectors corresponding to one irreducible representation = n_i^2:

$$\sum_i n_i^2 = m \tag{4.4}$$

which is equal in sum to the dimension of the space of matrix elements of an irreducible representation. This follows from Burnside's theorem.

Definition 4.3 *The following expression defines the nature of the group representation is a complex—valued function* $\chi(ab) \not\equiv 0$ *such that* $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

Calculate the nature of the group representation is a function defined on the group that returns the trace of the matrix for

the element under study g in the representation (see more details about the character below 5):

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{i=m} D_{ii}(g) = \mathrm{Tr}(D) \tag{4.5}$$

The operator Tr is used along with Sp and denotes the trace of the matrix

[PT09]: Petrashen et al. (2009), *Applications of Group Theory in Quantum Mechanics*

Properties of group representation characters [PT09]:

- Equivalent representations have identical characters $\chi(D) = \chi(V)^{-1}(D)V(g)$, since the matrix trace is invariant under similarity transformations.
- The characters of representation matrices corresponding to elements of the same conjugacy class in group G coincide. Characters are constant on conjugacy classes.
- Characters of irreducible representations satisfy the orthogonality property:

$$\sum_{g \in G} \chi^i(g)\overline{\chi^j(g)} = m\delta_{i,j} \tag{4.6}$$

- The character $\chi(g)$ of a completely reducible representation D equals the sum of the characters of all irreducible representations into which it can be decomposed. The decomposition into irreducible representations is unique up to equivalence:

$$\chi(g) = \sum_j r_j \chi^{(j)}(g) \quad r_j = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \overline{\chi}(g)\chi^{(j)}(g) \tag{4.7}$$

Here, the number r_j counts how many times the irreducible representation $D^{(j)}$ appears in the decomposition of the reducible representation D. This is symbolically expressed via the formula (analogous to decomposing a reducible representation into components of irreducible representations):

$$G \cong \bigoplus_j r_j G^{(j)} \tag{4.8}$$

The $\oplus$ symbol denotes not matrix addition but the decomposition into irreducible representations. [PT09]

[PT09]: Petrashen et al. (2009), *Applications of Group Theory in Quantum Mechanics*

A representation of D is reducible if there exists a nonsingular matrix V such that, by a similarity transformation, the representation matrix is that $V^{-1}DV$ takes a block-diagonal form 4.1, where each block corresponds to an irreducible representation of D.

Composition of reducible representations

The decomposition $D^{(i)} \otimes D^{(j)}$ of the composition of reducible representations into irreducible ones can be achieved using Clebsch-Gordan coefficients :

$$D^{(i)}(g) \otimes D^{(j)}(g) = \sum_l \gamma_{i,j,l} D^{(l)}(g), \tag{4.9}$$

In physics, the Clebsch–Gordan (CG) coefficients are numbers that arise in angular momentum coupling in quantum mechanics. They appear as the expansion coefficients of total angular momentum eigenstates in an uncoupled tensor product basis.

If $V^{(i)}$ is a representation of some symmetry group (for example, a unitary group G acting on $\mathbb{R}^m$), then according to the general theory of representations of compact or semisimple groups, it can be decomposed into a direct sum of irreducible representations:

$$V_i = \bigoplus_j r_{i,j} W_j, \tag{4.10}$$

where W_j are irreducible representations, and $r_{i,j}$ are their multiplicities.

When G is a tensor product of representations:

$$G = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cdots \otimes V_k \tag{4.11}$$

its decomposition into irreducible components V_j corresponds to the isolation of symmetric subspaces (for example, the total angular momentum in a system of spins). If V_i decomposes into components as in 4.10, then G further decomposes according to the formula:

$$G = \bigotimes_{j=1}^{k} \left(\bigoplus_i r_{i,j} W_j \right) = \bigoplus_{j_1, j_2, \ldots, j_k} (r_{1 j_1} \cdots r_{k j_k})(W_{j_1} \otimes \cdots \otimes W_{j_k}). \tag{4.12}$$

The interrelation is determined by the rules of representation composition, which in turn depend on the specific symmetry group. It is evident that the fundamental principles of algebra are rooted in the realms of physics and symmetry.

5 Gibbs distribution and Zeta function

In this section and further, $gcd(m,n)$ is the abbreviated designation of the greatest common divisor, in particular $gcd(m,n) = 1$ is the designation of mutually prime numbers, $\hbar$ is Planck's constant N is the number of particles, bosons, photons, c is the speed of light, w is the frequency de Broglie waves l is the de Broglie wavelength instead of the usual λ, $\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{l}$ is the wave vector indicating the direction of the wave, μ is the chemical potential, T is the temperature, V is the volume, F - the free energy of the gas, due to the change of which work is performed in thermodynamics, which explains the convenience of using this variable.

The microcanonical Gibbs distribution is derived from the formula 2.26, which postulates the equilibrium and independence of each microstate of a thermodynamic system

$$\begin{aligned} dw &= const\ \rho\ \delta(E - E') \\ dw &= const\ \delta(E - E') \prod_{\alpha} d\Gamma_{\alpha} \end{aligned} \tag{5.1}$$

The first line of the formula expresses the probability of finding the system under study in terms of the probability distribution density in the quasi-classical case, the second line of the formula shows the probability of finding the system under study in a certain state of $d\Gamma$ in the quantum mechanical representation. Statistical physics is based on the postulate equality of microstates, which is a development of the principle of symmetry.

It is interesting to note that the free energy of the gas is a simple consequence of normalization conditions the canonical Gibbs distribution. The normalization condition allows us to calculate the free energy F in terms of the probabilities of quantum states:

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n}^{N} w_n &= e^{\frac{F}{T}} \sum_{n}^{N} e^{-\frac{E_n}{T}} \\ \Rightarrow F &= -T\ ln \sum_{n}^{N} e^{-\frac{E_n}{T}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

In this work, the temperature T is set in energy units and the Boltzmann constant k_B) is lowered, as is customary in the traditions of theoretical physics $k_B T \rightarrow T1$ electron volt = 11606 degrees. Similarly, the Boltzmann constant is omitted in formulas for expressing entropy S

This is a clear example of the connection between mathematics, theoretical physics and laboratory experiment. In

thermodynamics, free energy F, entropy S, energyE, volume V, pressures P, temperature T, and a number of other variables are derived from each other and controlled. The first three listed variables are additive functions.

Based on this postulate of the equal probability of all microstates available to the system under study, resulting from symmetry, Gibbs derived the formula 8:

Z-sum - partition function or statistical sum corresponds to the summation of probabilities for all microstates for a given value of the energy interval, the condition of equality to the unit of the sum of probabilities for the complete group of events and is derived from the normalization condition similar to the one given by 2.33. The density matrix of the canonical Gibbs distribution is found by the formula:

$$\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \quad \left(\beta = \frac{1}{T}\right). \tag{5.3}$$

where T is the temperature of the system under study regarded as unified parameter for the system and all subsystems. Let $\phi'_E = |E\rangle'$ be the eigenvector for eigenvalue E' of the Hamiltonian $\hat{H}$ and $\mathscr{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$ then for a canonical ensemble that is classical and discrete, the canonical partition function is defined as:

$$Z(\beta) = tr(\underline{Z}(\beta) = \operatorname{tr} e^{-\beta \mathscr{H}} = \sum_{E'} e^{-\beta E'} \tag{5.4}$$

In the following text, the notation $Z - sum$ will be used to denote the value of the sum of the specified series.

Remark 5.1 Simultaneously, the scalar partition function can be regarded a trace of infinite sparse matrix $\underline{Z}$, that is to say, a matrix with finite support [SM02]. $Z - sum$ corresponds to the summation of probabilities for all microstates for a given value of the energy interval, the condition that the sum of probabilities for full group of events is equal to unity, and is derived from the normalization condition similar to the one given 2.33.

[SM02]: Szidarovszky et al. (2002), *Introduction to Matrix Theory: With Applications to Business and Economics*

The partition function is included in the Gibbs distribution as a normalization factor (it does not depend on j, ensuring that the probability sum is equal to unity:

$$\sum_j P_j = \frac{1}{Z}\sum_j e^{-\beta E_j} = \frac{1}{Z}Z = 1. \tag{5.5}$$

If a system having a volume of V and containing $N = N_a + N_b + N_c \ldots$ particles is in equilibrium with a thermostat at a temperature of T (in the quasi-stationary case, the subsystems forming one system under considerattionhave the same temperature and β), then the probability of its microscopic states is determined by the following expressions:

$$Pr(d\Gamma) = e^{-\beta \mathcal{H}_N}\,\frac{d\Gamma}{Z_N} \tag{5.6}$$

a partition function:

$$Z_N = \frac{1}{\prod_{a,b,c\ldots} N_a!N_b!N_c!\ldots, (2\pi\hbar)^{3N_a}} \int e^{-\beta \mathcal{H}_N}\, d\Gamma \tag{5.7}$$

Appearance of multipliers of the form $N_a!N_b!N_c!\ldots,$ in the denominator follows from combinatorics and is caused by permutation symmetry 4 to provide unique accounting of each microstate.

The Boltzmann and Maxwell distributions are special cases of the canonical Gibbs distribution. In consideration of the molecular identity of gas molecules, it is sufficient to analyse the distribution by considering the phase space of a single molecule. Furthermore, the energy can be expressed in the momentum representation in the coordinates dp. Furthermore, integration over the generalized coordinates dq of the system can be replaced by simple multiplication by the volume of the vessel. This greatly facilitates the calculation of.

It is important to remember that the statistical weight $\Delta\Gamma$ satisfies the relation for quasi-stationary thermodynamic systems:

$$\Delta\Gamma \geq 0, \quad \lim_{E\to\infty} \Delta\Gamma\,(E)\, e^{-\alpha E} = 0 \quad (\alpha > 0) \tag{5.8}$$

To find the statistical weight of the system under study I + II, consisting of subsystems I, II, use convolution operations of

statistical weights:

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_{\mathrm{I+II}}(E) &= \int \Delta\Gamma_{\mathrm{I}}(E')\,\Delta\Gamma_{\mathrm{II}}(E-E')\;dE' \\ &= \int \Delta\Gamma_{\mathrm{I}}(E-E'')\,\Delta\Gamma_{\mathrm{II}}(E'')\;dE''.\end{aligned} \tag{5.9}$$

A close look at the last formula allows us to conclude that Z - sum (partition function) for a canonical ensemble is determined by the Laplace transform from its statistical weight:

$$Z(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} e^{-\beta E}\Delta\Gamma(E)\;dE$$

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} Z(\beta)e^{\beta E}\,d\beta \tag{5.10}$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(\beta'+i\beta'')e^{(\beta'+i\beta'')E}\,d\beta'', \quad (\beta'>0).$$

where E_0 is the lowest level of the system. The lower formulas are finding the statistical weight $\Delta\Gamma(E)$ by the inverse Laplace transform of Z- sum $\Delta\Gamma = \mathscr{L}^{-1}\left\{Z(\beta)\right\}(E)$. The integral is easily evaluated using the calculus of residues by considering the residues along the contour in the plane $\beta \in \mathbb{C}$ formed by a vertical straight line $\beta = \beta'$ and closed by a semicircle arc on ∞.

Formula 5.9 corresponds to the product of $Z-sums$:

$$Z(\beta)_{\mathrm{I+II}} = Z(\beta)_{\mathrm{I}} \cdot Z(\beta)_{\mathrm{II}} \tag{5.11}$$

See § 2Kubo[Kub+07].

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

Integer group $\{E_i\}$

The expression of the Hamiltonian of the system under study, which combines k subsystems, will now be considered. The Hamiltonian is thus expressed as: $\hat{H}_{\mathrm{Total}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \ldots \hat{H}_k$. Furthermore by employing an arbitrary definition of the zero potential energy level, it is possible to consider all energy levels for examination:

- $E \geq 0$ (the minimum energy value for the oscillator due to the uncertainty principle is $\frac{1}{2}\hbar\omega$);
- by virtue of $\left\|\hat{H}_{\text{Total}}\right\| < \infty$ being finite and quantization of energy being integer, the appropriate unit of energy measurement must be chosen so that $\Delta E = 1$;
- is an ordered (or partially ordered set in the case of multiple eigenvalues) in ascending order $0 \leq E_0 \leq E_2 \cdots \leq E_m$.

Subsequently, using prime numbers, these straightforward considerations will be generalized to the case of an arbitrary thermodynamic system described by a Gibbs distribution.

Definition 5.1 (Equidistant Energy Levels) *Let the eigenvalues of the Hamiltonian of the system under study form a series of consecutive natural numbers of energy: $E_n = \Delta E \cdot n$ in some energy units. Then the wave functions corresponding to these eigenvalues (energy) will be denoted as the series: $|1\rangle, |2\rangle, |2\rangle \ldots |m\rangle$. This will allow us to work with $\{E_i\}$ according to the rules of an integer group.*

In a quasi-stationary state, the total energy of the system under consideration is conserved; therefore, the set $\{E_m\}$ is closed under the operation of addition/subtraction. From a physical standpoint, operations related to transitions between energy levels can be considered as a single operation $\circ$.

In the quasi-stationary state, the total energy of the system under consideration is conserved, so the set $\{E_m\}$ is closed by the addition/subtraction operation. From the point of view of physics, operations associated with transitions between energy levels can be considered as a single operation $\circ$.

For example operators birth and annihilation, widely used in quantum mechanics, including the study of harmonic oscillators. The destruction operator (usually denoted by $\hat{a}$ reduces the number of particles in a given state by one. The birth operator (usually denoted by $\hat{a}^\dagger$ increases the number of particles in a given state by one, it is conjugate to the destruction operator. It is possible to formulate a random function from two arguments, $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, and to consider such a function as one operation $\circ$ in the group $\{E_m\}$.

However, prior to this, it is necessary to consider in greater detail the basic information from group theory in relation to the partition function, and to define the concept of a normalized partition function.

Definition 5.2 *We say that $\langle S \rangle$ is a subgroup generated by S in particular, if S consists of just one element g then $\langle S \rangle = \langle g \rangle$ is a cyclic subgroup generated by the element g.*

Remark 5.2 An element g^k of the cyclic group $G = \langle g \rangle$ (ord(G) = n) is generating $\langle g \rangle$ if and only if $gcd(k, n) = 1$.

Definition 5.3 *For any subset $S \subseteq A$, the set of all linear*

combinations $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n$ ($a_i \in S, k_i \in \mathbb{Z}$) is the smallest subgroup of A containing S. It is called the subgroup generated by S and denoted $\langle S \rangle$. If $\langle S \rangle = A$, the group A is said to be generated by S, and S is termed a generating set of A.

Remark 5.3 If the order of a group $ord(G) = p$ - prime number then the group: $G = \langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}\}$) contains exactly p elements, where e identity element of G so $\forall g_n \quad e\, g_n = g_n$. G is a cyclic group generated by the element g_n.

6 Orthogonality. Separation. p-Number

In this section, $gcd(p, q)$, when applied to numbers, denotes the greatest common divisor of p and q.

Partition function Z_i is a series of terms $e^{\beta E_i} = \frac{1}{p_i}$ becomes a (finite/infinite) cyclic subgroup of G generated by $\langle g \rangle$ ($g = \frac{1}{p}$) , with each microstate constructed from elements of the group generated by prime numbers.

hereinafter index i is omitted for simplicity

In the canonical ensemble, normalization of the density matrix already involves dividing by the partition function Z 5.5. However, the group structure will require additional normalization of the Z-sums themselves:

$$\tilde{Z}(\beta) = \frac{Z(\beta)}{Z_0(\beta)} \tag{6.1}$$

where $Z_0(\beta)$ is the partition function of the reference system (for example, a system with $d\Gamma_0(E) = \delta(E)$ and $Z_0(\beta) = 1$ - ground state. Why is the delta function of energy chosen as the reference system for normalized $\tilde{Z}(\beta)$-sums? - Because from the definition of the delta function introduced by Paul Dirak:

$$Z_0(\beta) = \int_{E_0}^{\infty} \delta(E)\, e^{-\beta E}\, dE = e^{-\beta \cdot 0} = 1 \tag{6.2}$$

Proposition 6.1 (Axioms of groups of $\tilde{Z}$) *Checking the axioms of groups of normalized statistical sums:*

1. *The product of normalized $\tilde{Z}(\beta)$ - sums must correspond to the convolution of statistical weights (5.9). This is true because $\tilde{Z}(\beta)_{\mathrm{I+II}} = \tilde{Z}(\beta)_{\mathrm{I}} \cdot \tilde{Z}(\beta)_{\mathrm{II}}$ (5.11).*
2. *The neutral element is $\tilde{Z}_0(\beta)$ corresponding to the system $d\Gamma(E) = \delta(E)$*
3. *$\exists$ inverse element $\forall \quad \tilde{Z}_n(\beta) \quad \exists \tilde{Z}_n(\beta)^{-1}$, such that: $\tilde{Z}_n(\beta) \cdot \tilde{Z}_n(\beta)^{-1} = 1$*

Remark 6.1 Hereafter $\tilde{Z}_m(\beta)$ is denoted as Hereinafter $\tilde{Z}_m$ and argument β is omitted for simplicity

Statistical sum - characteristic f of a random variable

$\tilde{Z}_0(\beta) = 1$ corresponds to a system with a fixed energy $E = 0$ (ground state, Dirac delta function $\delta(E)$). After this normalization, $\tilde{Z}(\beta)$ becomes characteristic function of energy fluctuations $\Delta E = E - E_0$ relative to the ground state. Indeed, $\tilde{Z}(\beta) = e^{-\beta(E-E_0)}$.

Thus, the normalized statistical sum is $\tilde{Z}(\beta)$ It is a characteristic function for a random variable - the fluctuating energy of the system. This makes it possible to apply the entire apparatus of probability theory (calculation of moments, cumulants, distribution analysis) to thermodynamic fluctuations.

[Vin03]: Vinberg (2003), *A Course in Algebra*

The following lemma is proved obviously [Vin03]:

[Vin03]: Vinberg (2003), *A Course in Algebra*

Lemma 6.2 *A ring $\mathbb{Z}_n$ is a field only if n is a prime number [Vin03].*

In an orthonormal system, the statistical weights corresponding to different microstates $\Delta\Gamma_i$ and $\Delta\Gamma_j$ are independent, and the corresponding distribution functions X_i and X_j are also independent. Consider the characteristic functions introduced by Russian mathematician A.M. Lapunov [Gmu68] $\xi(t)$ of these quantities, which are the Laplace transform. Let us verify that $\{\xi\}$ also forms a group under multiplication.

[Gmu68]: Gmurman (1968), *Fundamentals of probability theory and mathematical statistics*

The characteristic function for x_k where parameters k - is the mean (expected value) of x_k and σ is the standard deviation, and σ^2 is the variance of x_k:

$$\xi_k(t) = M\left[e^{itx_k}\right] = e^{ikt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \tag{6.3}$$

Normalized characteristic functions of 6.1 obtained by dividing by Z_0:

$$\tilde{\xi}_k = \frac{\xi_k}{\xi_0} = \frac{e^{ikt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}} = e^{ikt} \tag{6.4}$$

The group structure $\left\{\tilde{\xi}_k\right\}_{k=0}^{p-1}$ consists of functions of the form e^{ikt} and forms a group under multiplication. The axioms of the group were examined by analogy 6.1.

Definition 6.1 (Direct sum of subgroups) *An (additive) Abelian group A is said to decompose into a direct sum of subgroups $A_1, A_2 \dots A_k$ if every element $a \in A$ can be uniquely expressed as $a = a_1 + a_2 \dots a_k$, where $a_i \in A_i$. In this case, we write:*

$$A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k \tag{6.5}$$

The direct sum of (additive) abelian groups $A_1, A_2 \dots A_k$ is an abelian group $A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k$, consisting of all sequences $a = a_1 + a_2 \dots a_k$, where $a_i \in A_i$, with the component-wise addition operation. For example, $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_2 \cdots \oplus \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}^k$.

If the groups $A_1, A_2 \dots A_k$ are finite, then $|A_1 \oplus A_2 \cdots \oplus A_k| = |A_1|\,|A_2| \dots |A_k|$. For the case of two subgroups A_1, A_2 the uniqueness of the representation $a = a_1 + a_2$ is equivalent to condition $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

In the context of multiplicative Abelian groups 4.11, direct multiplication is the preferred method. In the event of a composite representation of groups, the following equation is to be considered: $A_1 \otimes A_2 \cdots \otimes A_k$.

The last definition may be applied to the statistical weight Γ of the the system under consideration.

Definition 6.2 *If two systems are isomorphically equivalent, it means that they are structurally analogous, and there is a well-defined bijective mapping f (denoted as $\longrightarrow$) that shows this:*

$$f : \mathbb{Z} \mapsto G \quad m \mapsto g^m \; f : \mathbb{Z}_k \longrightarrow G \quad [m] \mapsto g^m \tag{6.6}$$

for infinite and finite groups, respectively, where $[m]$ denotes the residue class $(mod\,\Gamma)$.

Lemma 6.3 (Orthogonality and coprimality) *To ensure the fundamental thermodynamic relations of the system under study, prime numbers are necessary. So that the set of $\{\psi_i\} \in \mathfrak{L}_2(G;\rho)$ and $\{E_i\}$ satisfies the orthogonality relation $\langle \psi_{E_p} | \psi_{E_q} \rangle = \delta_{p,q}$*

($\frac{1}{p} \mapsto e^{-\beta E_p} = e^{-\beta p}$, $\frac{1}{q} \mapsto e^{-\beta E_q} = e-\beta q$), the condition must be fulfilled: $\gcd(p,q) = 1, \quad p \neq q$, *i.e. it is necessary and sufficient that the numbers p and q are coprime.*

Proof of Lemma 6.3 by contrapositive.

In the orthonormal system, due to the orthogonality of wavefunctions 1.2 corresponding to distinct eigenvalues, the statistical weights $\Delta\Gamma_i$ and $\Delta\Gamma_j$ of different microstates are independent random variables. As shown for partition function and statistical weight 5, assuming equidistant energy levels $\Longrightarrow p \mapsto e^{\beta E_p} = e^{\beta p} \quad q \mapsto e^{\beta E_q} = e^{\beta q} \quad (\beta = \frac{1}{T}$ and $\Delta E = 1)$, where T is the temperature of the system under consideration regarded as unified parameter for the system and all subsystems), from the independence of microstates determined by the energy level 2.34 and definition of partition function 5.4, it follows that the same microstate as function of energy level l should be unique and not repeated in the Z-sum series, i.e expression $p_1^{\gamma_1} p_1^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}$ must be unique in formula:

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots k_n p_n \mapsto \sum_{p<N;\, \alpha=1,2\dots\infty} \left(p_1^{\gamma_1} p_1^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}\right)^{-1} = \tilde{Z_1}^{k_1} \tilde{Z_2}^{k_2} \dots \tilde{Z_n}^{k_n} \tag{6.7}$$

where $\gamma_i = k_i \alpha$ and $\forall k_i, \gamma, \alpha, N \in \mathbb{N}$ and α sequentially runs through a series of natural numbers. Therefore, according to Definition 6.2, this condition expresses the probability density of each microstate as a function of its energy.

According to fundamental theorem of arithmetic every integer greater than 1 is prime or can be represented uniquely as a product of prime numbers, up to the order of the factors. §1 [Cha74].

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

Therefore for $\forall a = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k} \dots$ and $a \leq N$ if $\forall i, j$ and $gcd(p_i, p_j) = 1, \Longrightarrow \forall i, k \quad \gcd(p_i, p_k) = 1$ i.e. the relation of coprimality of a number is reflexive and transitive $\Longrightarrow$ if in a sequence of natural numbers $p_1, p_2, p_3 \dots \leq N$, all numbers are pairwise prime $gcd(p_i, p_j)$ (coprime), $\Longrightarrow$ every number in the sequence $\forall p_i \in a = p_i^{\alpha_i} p_j^{\alpha_j} p_k^{\alpha_k} \dots \quad a \leq N$ and a is prime.

The Laplace transform is a linear operator $Lu = F$ with the domain $\mathcal{M}_L$. We denote with $\mathcal{R}_L$ - the range of values

of the L operator. The inverse Laplace transform is found via the inverse linear operator $u = L^{-1}F$. It is easy to prove that the systems of functions $\{\psi_k\}$ and $\{L_{\psi_k}\}$ simultaneously linearly independent [Vla76] Therefore $\tilde{Z}(\beta)_m, \tilde{Z}(\beta)_n$ normalized partition function $m \neq n$ as images of random variables, must be generated based on coprime numbers $gcd(m,n) = 1 \quad m \neq n$. The proposition has been proven. □.

[Vla76]: Vladimirov (1976), *Equations of Mathematical Physics*

The statistical weight Γ is subject to fluctuations according to the normal law [LL02]. This can be taken into account by introducing random matrices:

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

- Let $\hat{H}$ be the Hamiltonian of the system, and its energy levels $\{E_n\}$ are random (as in the theory of random matrices).
- Then the density of states $\rho(E)$ can be described by a Gaussian ensemble.

According to the central limit theorem for the group G if the fluctuations are small, then $ln\ \tilde{Z}$ will be distributed normally. This allows you to apply a lognormal distribution for $\tilde{Z}$. For a more detailed exposition, see appendix 10.

In the model under consideration, each eigenvalue of the energy E_i is repeated in accordance with the multiplicity r_i. This matrix representation can be generalized by considering the algebra of operators over the Hilbert space of the system.

Definition 6.3 (Hamiltonian in diagonal form) *Let's introduce **hamiltonian in diagonal form** (or **energy operator in its eigenbasis**):*

$$\hat{H} = diag(\underbrace{E_1, \ldots, E_1}_{r_1 times}, \underbrace{E_2, \ldots, E_2}_{r_2 times}, \underbrace{E_3, \ldots, E_3}_{r_3 times}, \ldots) \tag{6.8}$$

Or, in a more compact form:

$$\hat{H} = \bigoplus_i (E_i I_{r_i}), \tag{6.9}$$

where I_{r_i} is a unit matrix of size r_i. To the entered operator $\hat{H}$ of the system in question 6.3 it is possible to apply the definition of 5.3.

The joint consideration of subsystems within the system under study corresponds to the operation of combining sets of eigenvalues of the Schrodingen equation - this follows from its linearity. In the event of projectors P_{E_i} being introduced * into subspaces with energy E_n, the partition function referred to as equation 5.4 is to be written as follows:

$$Z_n(\beta) = tr(\underline{Z}) = tr\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i\, e^{-\beta E_n} \;\mapsto\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{r_i}} \quad (6.10)$$

The partition function Z_n as a (finite/infinite) cyclic group G generated by the element $e^{-\beta E_n}$. The validity of this assertion is contingent upon the mathematical model under consideration. In physics, discrete energy ΔE and statistical weight $\Delta\Gamma$, systems characterised by infinite E_{Total}, entropy S_{Total} are deemed to be nonexistent. It can thus be concluded that the upper limit in the last formula is $i \leq N < \infty$, where $N \in \mathbb{N}$. One can refer to the formulas linking phase space and entropy $\Delta\Gamma = e^S$ (see 2.36 and 3.1)

Factorization of the statistical sum

Previously, the relationship between the statistical sum and energy was noted: $Z(\beta) = \mathcal{L}\,[\Delta\Gamma(E)]$, while $\Delta\Gamma(E)$ evolves in the energy space, and $Z(\beta)$ - in the space of reverse temperatures.

The rank of the group of k subsystems is shown here not as the number of cells of $\Delta\Gamma(E)_i$, but as the number of poles (or independent exponents) in the representation of the statistical sum. In the natural basis, where each prime number p_i can also be assigned a multiplier in a statistical sum of the form $p_i \mapsto \left(\frac{1-e^{-\beta}}{p_i}\right)^{-1}$ (or similar), the rank of k will determine that the statistical sum of $\tilde{Z}(\beta)$ is factorized into the product of k independent factors, each of which corresponds to its basic subgroup:

$$\tilde{Z}(\beta) = \prod_{i=1}^{k} \tilde{Z}_i(\beta) \quad (6.11)$$

* For a more detailed exposition, see below in the Goldbach-Euler conjecture 7 below

This means that the complete system decomposes into k statistically independent subsystems - this directly follows from the decomposition of the statistical sum. Each such subsystem (basic mode) has its own endless ladder of microstates.

It was shown above that $\tilde{Z}_n(\beta)$ is isomorphically equivalent to the projector of the introduced energy operator $P_{E_i}\hat{H} = \hat{H}_i$, where $\hat{H}, \hat{H}_i$ is the Hamiltonian of the system under consideration and its subsystems i, respectively 6.3. This result is consistent with the conclusions about the structural isomorphism for the groups 6.6.

Without altering the generality $\forall$ linearly independent quasi-stationary functions orthonormal system $\{\psi_k\}$ is possible through the group generating element by the formula, containing the amplitude, phase multiplier and oscillation part:

$$\psi_{p_n}^{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E p_n t\right), \quad i^2 = -1 \tag{6.12}$$

where the prime number $p_n \mapsto exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E p_n t\right) = exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_n t\right)$, $\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ the fractional part function, represented by curly braces: $\{\}$, t - time, $\hbar$ - Planck constant, $\Delta E = 1$ according to corollary 5.1 equidistant energy level. It can be demonstrated that the corresponding matrices of representations of wave functions $\psi_{p_n}^{(\nu)}$ and $\psi_{p_m}^{(\mu)}$ are commutable, in accordance with the hypothesis that they are irreducible and unitary representations of subgroups the group G order p_n and p_m respectively.

$$\left\langle \psi_{p_m}^{(\mu)} | \psi_{p_m}^{(\mu)} \right\rangle = \delta_{m,n}\delta_{\mu,\nu} \tag{6.13}$$

The Schur lemmas imply an orthogonality relation for the matrix elements 4.1. In summary, prime numbers can be regarded as a manifestation of the symmetry property of the system under consideration. It can be deduced from the evidence presented that the process of decomposition is only possible if the property of symmetry under discussion is present. Hereafter, such a basis will be denoted as the natural basis for the wave functions.

The aforementioned measures enable us to ensure the consistency of the proposed mathematical model with the fundamental theorems of abstract algebra.

7 Diffraction Grating. The natural basis for the wave function.

The physical approach to the verification of a mathematical proof makes it possible to compare phenomena similar in nature. Since electricity and magnetism, the phenomenon of interference and diffraction are studied in school, we reformulate the problem of statistical physics in terms of the spectral decomposition of light using a diffraction grating. If in the case of statistical physics, the use of prime numbers provided a condition for the uniqueness of each microstate, then when working with diffraction gratings, prime numbers help prevent overlapping of spectra. According to Huygens-Fresnel Principle each point (each slit) on the wavefront that has reached the grating becomes a source of secondary coherent spherical waves.

The mathematical derivation for the light intensity on a diffraction grating is transferred verbatim to the calculation of probability in quantum mechanics by replacing the electric field strength $E \rightarrow \psi$ with a wave function, and the light intensity $I \rightarrow Pr(obability) = \left|\Psi^2\right|$ with the probability of finding the system in the quantum state under study: The

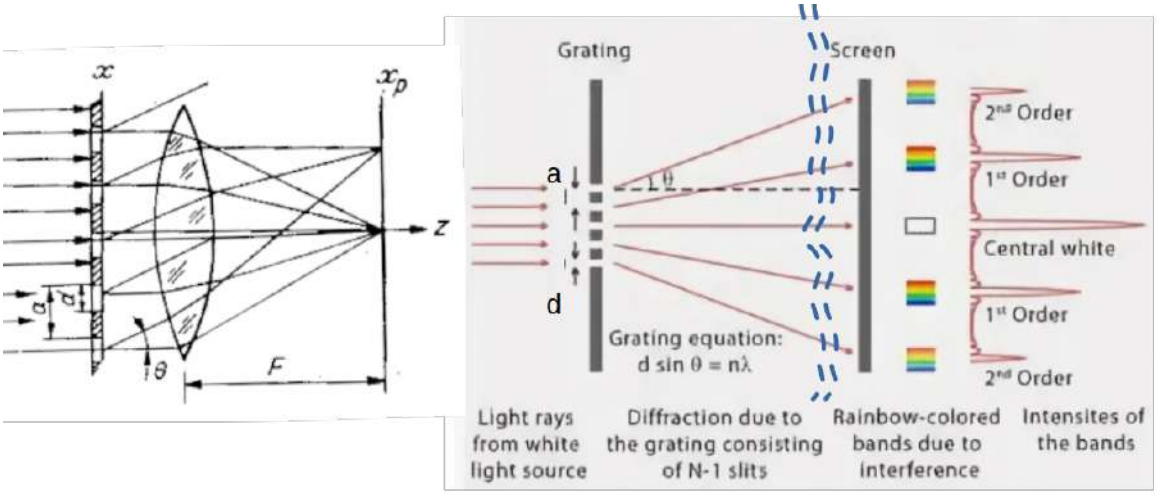


Figure 7.7: The diffraction pattern of a monochromatic wave is observed on a screen located in the focal plane of a lens (on the left). Simultaneously, the diffraction grating can function as a spectrometer for the case of white light (on the right, the converging lens is omitted for simplicity).

formula for calculating the light intensity of a diffraction grating is derived from solving the problem of diffraction of an electromagnetic wave on a screen using the Kirchhoff integral, which can be calculated in elementary functions

for the case of plane electromagnetic waves (Fraunhofer approximation) or waves emanating from a point (Fresnel approximation) as described in the formula below for electric field strength:

$$E(P) = \frac{k}{2\pi i z} \iint_S E(x,y) \exp\left\{i\left(kz - \omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} dxdy$$

$$x \le d_x \le x_p \le \sqrt{\lambda z}, \quad y \le d_y \le y_p \le \sqrt{\lambda z} \quad i^2 = -1 \tag{7.1}$$

The inequalities in the lower part of the formula 7.1 are necessary for applying the Fraunhofer wave decomposition.

According to Huygens-Fresnel Principle each point (each slit) on the wavefront that has reached the grating becomes a source of secondary coherent spherical waves. Since the slits are identical and illuminated equally (coherently), the electric field amplitude (E_0) and initial phase (φ_0) of the wave emanating from each slit are the same for all slits in the direction of the normal ($\theta = 0$). The initial phase φ_0 can be set to zero for convenience. This path difference leads to a phase difference (δ) between the waves from adjacent slits: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin(\theta)$

A plane monochromatic incident wave with wavelength λ is incident perpendicular to the plane of the grating. In this formula, k is a wave vector $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ and k_x, k_y are its projections onto the screen plane and $k_x = k\theta$. The x and y coordinate axes count the grid coordinates and are located parallel to the screen plane, while the z is directed orthogonally to the screen and passes through its center. The parallel rays are focused by the lens, the x_p, y_p coordinates count the coordinates on the screen and are located in its plane. d_x, d_y refers to the distance between adjacent lines or slits on a diffraction grating along the x, y axis, respectively (diffraction grating period).

According to the Ostrogradsky–Gauss theorem, which allows for the calculation of the electric field strength, for a slit-shaped hole (cylindrical symmetry, one-dimensional case), the multiplier in the Kirchhoff integral should be replaced:

$$\frac{k}{2\pi i R} \to \sqrt{\frac{k}{2\pi i z}} \tag{7.2}$$

Based on the above, it is easy to find the field intensity on the screen in accordance with path difference between adjacent slits: For waves propagating from two adjacent slits (e.g., the n-th and $(n+1)$-th) at an angle θ, a path difference (Δl) arises: $\Delta l = d \cdot \sin(\theta)$

$$E(x_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i F}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{na}^{na+d} E_0 \, e^{-ikx^2} dx \right) e^{i(k_z - \omega t)} \tag{7.3}$$

Here, N is the total number of slits in the diffraction grating that are illuminated by the wave incident on it at an angle θ (when $\theta = 0$, the light ray is orthogonal to the grating), F - focus length by Z -axis. The Sum of a geometric progression with N terms is: $Sum = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$ Substituting $q = \exp(i \cdot \delta)$: $Sum = \frac{1-\exp(i \cdot N \cdot \delta)}{1-\exp(i \cdot \delta)}$ for simplifying the Sum let's use Euler's formula ($\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$) and algebraic manipulations: $Sum = \frac{[1-\cos(N\delta)-i\sin(N\delta)]}{[1-\cos(\delta)-i\sin(\delta)]}$ Multiply the numerator and denominator by $\exp(-i \cdot \delta/2)$ [Hel67] The classical simplification yields: $S = \frac{\sin(N \cdot \delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cdot \exp(i \cdot (N-1) \cdot \delta/2)$ † By performing the integration and summing the resulting geometric progression, we will find the intensity.

[Hel67]: Helmholz (1967), *College: The Berkeley Course*

$$\begin{aligned} I(x_p) &= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{kE_0^2}{2\pi F} \cdot \left| e^{-ik\theta a} - 1 \right|^2 \cdot \left| \frac{e^{-ikN\theta a} - 1}{e^{-ik\theta a} - 1} \right|^2 \\ &= \frac{cN^2 E_0^2 k d^2}{8\pi^2 F} \cdot \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\alpha}{N \sin \alpha} \right)^2 \\ I(\theta) &= I_0 \cdot \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(N\alpha)}{N \sin \alpha} \right)^2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Where $\alpha = \frac{k\theta a}{2}$; $\quad U = \frac{k\theta d}{2} = \frac{d}{a} \cdot \alpha$.

Intensity of the Total Wave: The light intensity I is proportional to the square of the amplitude ($I \propto A^2$): $I_{\text{total}}(\theta) \propto [A_{\text{total}}(\theta)]^2 = E_0^2 \cdot \left[\frac{\sin^2(N \cdot \delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \right]$ Let us denote the intensity from

† The modulus of this expression ($|S|$) gives the amplitude of the total wave (up to a phase factor, which does not affect the intensity), and the exponential $\exp(i \cdot (N-1) \cdot \delta/2)$ describes the phase shift of the total wave relative to the zero slit.

a single slit in the direction θ as $I_0(\theta) \propto E_0^2$. Then according to [MC87]: $I_{\text{total}}(\theta) = I_0(\theta) \cdot \left[\frac{\sin^2(N\cdot\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}\right]$

[MC87]: Meshkov et al. (1987), *Electromagnetic Field, Part 2: Electromagnetic Waves and Optics*

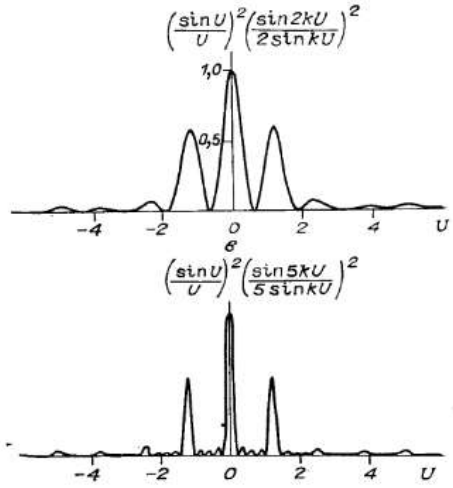


Figure 7.8: Cases of $N = 3$ (above) and $N = 5$ (below) are the total number of slits in the diffraction grating that are illuminated by the wave incident on it

At points where the argument α takes the values

$$\alpha_m = m\pi; \quad \theta_m = \frac{2m\pi}{ka} = m\frac{\lambda}{a}, \tag{7.5}$$

the *principal maxima* are located. The number m is called the order of the maximum or diffraction order. Their magnitude decreases with the order number m as

$$I_m = I_0\left(\frac{\sin U_m}{U_m}\right)^2 \sim \frac{I_0}{m^2}. \tag{7.6}$$

Note that the distance between maxima is inversely proportional to the period of the structure a. In addition to the principal maxima, the function $I(0)$ contains secondary maxima located at the points

$$N\alpha_n = (2n+1)\pi/2; \quad \alpha_n \neq m\pi; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.7}$$

and their intensities are $I_n \sim I_0 N^2 U_n^2, \quad U_n = d\alpha_n/a$. For the secondary maxima located between the m-th and $(m+1)$-th principal maxima, the value of the parameter $\alpha_n \sim m\pi$, therefore

$$I_n \sim \frac{I_0}{N^2 m^2} \cdot \left(\frac{a}{\pi d}\right)^2 \sim \frac{I_m}{N^2}. \tag{7.8}$$

Thus, the secondary maxima are on the order of N^2 times smaller than the principal ones and in practically interesting cases ($N \gg 1$) are indistinguishable. This circumstance is well illustrated by the curves shown in Fig. 6.8.

Diffraction gratings are a key element for complex spatial filtering and wavefront control of any origin (light, radio, sound). Using a cascade of two or more diffraction gratings allows for the manipulation of individual "fractions" (spatial frequencies) of the wave field, which is a powerful tool in science and engineering. When white light falls on a grating, it is decomposed into a spectrum. To filter a specific wavelength (monochromatic light), one of the spectral orders (e.g., the first order) is isolated by physically blocking all others.

It is crucial here to avoid order overlap, which occurs when:

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2 \tag{7.9}$$

where m_1 and m_2 are different diffraction orders. (In real spectrometers, engineers and scientists use several methods to solve this problem optical filters, order sorting by dispersion, using low orders, etc.). If the periods of the gratings a in a cascade of diffraction gratings relate to each other as prime numbers, this helps overcome the problem of spectral overlap .

From this perspective, the operation of a cascade of diffraction gratings (including cases of quantum diffraction gratings [Woj16]) is analogous to the problem of unique accounting of each microstate in statistical physics.

[Woj16]: Wojciechowski (2016), «Quantum diffraction grating: A possible new description of nuclear elastic scattering»

7.1 Generalization of analogies of the natural basis and the diffraction grating formula

In this subsection and the following section, $\phi(a)$ denotes the Euler function — the number of **natural numbers that are coprime with a and do not exceed a.** In particular, for $a = p$ (where p is a prime number), $\phi(p) = p - 1$, and for $a = p^\alpha$, we have $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = a\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. For the general case, $\phi(a) = a\prod_{p|a}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, where $p \mid a$ denotes all prime divisors of a.

The Euler function is multiplicative

Note that along with the function defined above, the Euler function is multiplicative, which corresponds to

the principle of multiplying the phase volumes of the subsystems forming the system under study 2.36. As part of a separate subsystem, it is possible to divide the phase volume according to those variables that correspond to the integrals of motion and are consistent with the symmetry of the system under study. see 2.24. This process is finite and it is determined firstly by the discreteness. phase space, secondly by the symmetry of the system under study.

The connection between the natural basis and the diffraction grating formula is not only convenient, but also fundamental. It allows us to interpret a diffraction grating as a device that transforms the system under study into a superposition of states with a specific pulse, effectively measuring the projection of the pulse onto the screen in the focal plane. Thus, the phase multiplier in the equation 6.12 can be identified with the nature of the group representation (see equation 4.5).

From this point of view, the equation 6.12 clearly demonstrates how an infinite series of microstates is generated with the help of a single element. This principle is embodied in a statistical sum. However, by choosing an orthonormal basis, the calculation of averages can be limited to the number of microstates equal to the order of the underlying cyclic subgroup, p. Therefore, the average value of any observed quantity will be easily determined by the equation 2.39. This series absolutely converges when The Z-sums are normalized (equation 6.1).

The choice of prime numbers is critically important in this formalism. It guarantees a unique account of each microstate in statistical physics. It is necessary for the ideal operation of the cascade of diffraction gratings — a spectrometer without overlapping spectra. For diffraction gratings, this means choosing the relationship between the periods of the gratings (in whole units) with a fixed number of slits. Within the framework of the Fraunhofer approximation, we can simplify the calculations by assuming in the equation 7.4, that the relations between the total numbers of slits $N_1, N_2 \ldots$ are prime numbers, while maintaining a constant total aperture of the cascade.

This requirement of the mutual simplicity of integers is justified by the Bezout identity, which ensures that both the

number-theoretic and physical approaches are equivalent.

Remark 7.1 It is noteworthy that the operation of an ideal cascade of diffraction gratings is described by the Chinese remainder theorem, which is easily proved by induction in the same way as the 8.1 Lemma.

The Bezoux identity is the following theorem. Let $a_1, \ldots, a_n$ be integers, not all equal to 0. Then there are integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ such that the ratio holds: $gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

According to the equation 7.3, the initial phase (φ_0) of the wave emanating from each slit in the normal direction ($\theta = 0$) is represented by a single element e of the cyclic group $\{e, g, \ldots g^{p-1}\}$.

Using the natural basis, hereinafter referred to as in the equation 6.12, allows you to apply the Euler function $\phi(n)$. This function counts the number of adjacent classes in a multiplicative group modulo n (where $n = \Delta\Gamma$). As stated in the first paragraph of this subsection, (order) of a cyclic subgroup is equal to $ord = \phi(n) + 1$.

The History of the Concept of Light as a Form of Matter

The idea that light is matter originated in antiquity. One of the first to consider light as a material object was Epicurus—an ancient Greek philosopher and representative of the atomistic school. Like his predecessor Democritus, he believed that everything in the world consists of atoms, and light is no exception. Epicurus proposed that light is a special type of matter, composed of the tiniest particles moving through space.

Later, this idea was developed by Lucretius—a Roman poet and philosopher, author of the poem "On the Nature of Things." He also viewed light as a material flow of particles.

In the 17th century, the concept of the materiality of light was revived by Pierre Gassendi—a French philosopher and scientist. In his work *Syntagma Philosophicum* ("Philosophical Treatise"), published posthumously in 1658, he developed an atomistic theory of matter. Gassendi argued that light is a stream of special particles (*atomi lucificae*), which belong to different types (e.g., colors). In his view, these particles are identical to atoms of heat and move at an extremely high speed.

At the same time, Isaac Newton developed the corpuscular

theory of light, which became classical. According to it, light consists of the smallest particles—corpuscles—emitted by luminous bodies. These particles move in straight lines at a finite speed, possessing mass and momentum. Newton relied on existing atomistic ideas, including those of Gassendi, to develop his concept.

An opposing viewpoint was held by proponents of the wave theory (René Descartes, Robert Hooke, Christiaan Huygens). They believed that light is waves propagating in a special medium—the ether. Huygens, in his "Treatise on Light" (1690), developed this idea by proposing a principle later named the Huygens–Fresnel principle.

In the 19th century, the wave theory triumphed thanks to the work of Thomas Young and Augustin-Jean Fresnel, who experimentally confirmed the phenomena of interference and diffraction, explainable only from the standpoint of wave theory. Then, James Clerk Maxwell formulated the theory of electromagnetism, according to which light is an electromagnetic wave. The experiments of Heinrich Hertz brilliantly confirmed this theory.

At the beginning of the 20th century, the quantum properties of light were discovered (photoelectric effect, Compton effect), leading to the revolutionary idea of the dual nature of light—wave-particle duality. Light can exhibit both wave-like and particle-like (quantum) properties, depending on the experimental conditions.

Thus, the concept of light as a form of matter has ancient roots. Its development passed through centuries of competing theories and a series of fundamental discoveries, which ultimately led to the modern, complex, and remarkable understanding of the nature of light.

8 The theorem on the quantum nature of p numbers

Since the product $c_i c_i^*$ gives the probability of finding a thermodynamic system in the state $|i\rangle$ with an eigenvalue of energy E_i (as can be seen from the equation 1.3), it follows that the eigenvalues of the operator equations determine the coefficients c_i and c_i^* in a superposition of stationary

solutions of the $\Psi(q,t)$ Schrodinger equation.

Definition 8.1 *p is a primitive Abelian group (where p is a fixed prime number) is an Abelian group $(A,+)$ such that the order of any element in A is a power of p. $(\mathbb{Z}_{p^n},+)$ is an additive group of residue classes modulo p^n.*

The decomposition of an Abelian group into a direct product of cyclic groups follows from the theorem on the structure of finite abelian groups. Any finite Abelian group can be decomposed into a direct sum of its cyclic subgroups, the orders of which are powers of primes. Multiplicative notation does not change the essence of decomposition — it is only an alternative way of denoting a group operation.

Lemma 8.1 *If a runs through the full reduced deduction system modulo m, and a' runs through the full reduced deduction system modulo m', then $am'+a'm$ runs through the full reduced deduction system modulo mm'*

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

(ch. 2§2 [Cha74])

Proof. To prove the lemma to the contrary, we note that there is mm' integers of the form $am'+a'm$. We show that they are pairwise incomparable modulo mm'. Assume the opposite: $a_1'm + a_1m' \equiv a_2'm + a_2m' \pmod{mm'}$. Then $a_1m' \equiv a_2m' \pmod{m}$, from which, taking into account $gcd(m,m') = 1$, it follows that $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$. Similarly, $a_1' \equiv a_2' \pmod{m'}$. The opposite is not true. □

Speaking of the bijection $p_i \mapsto e^{\beta E_i}$, we can also summarize the geometric progression with the denominator $\frac{1}{p}$ and establish a similar ratio of the bijection $p_i \mapsto \left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}$

Before formulating a theorem in the development of the Lemma on orotogonality and mutual simplicity, 6.3 we will make a number of important remarks.

Proposition 8.2 *Since the set of primes is countable, instead of natural numbers for the case of equidistant spectrum 5.1, an infinite sequence of primes can be used, numbering the energy levels - the eigenvalues and their corresponding wave functions with prime numbers p. In other words, we can consider $\Delta E_p = p$ and $E_n = \Delta E_p \cdot n = p \cdot n$. With the help of unitary transformations, it is possible to make the transition to the basis just described. The homomorphisms $p \mapsto e^{\beta p}$, $\frac{1}{p} \mapsto e^{-\beta p}$ will also be used below in the natural basis defined below, each prime*

number p_i will be assigned a multiplier in the statistical sum of the form $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$ (or a similar expression).

Consider a quantum system whose Hilbert space of states $\mathcal{H}$ is separable and infinite-dimensional. Let's choose a special basis, which we have already defined as natural basis.

Statement of the theorem

Theorem 8.3 (On the quantum nature of prime numbers) *Let the quantum system be in a state of thermodynamic equilibrium described by canonical ensemble at the inverse temperature $\beta = \frac{1}{T}$. In a natural basis consisting of a complete orthonormal system of wave functions $\{|\psi_{p_k}\rangle\}$ with eigenvalues (energy levels) equal to the prime numbers p_i, with $\Delta E_{p_i} = p_i$ and $E_n = \Delta E_{p_i} \cdot n = p_i \cdot n$. Then this basis and the corresponding statistical operator $\hat{\rho}_\beta$ they have the following properties:*

1. *Diagonality and explicit form. The density matrix is diagonal in this basis. Its diagonal elements (statistical weights) are set by Gibbs distribution over prime numbers.*
2. *The universality of representation. For an arbitrary quantum system with a Hamiltonian $\hat{H}$ having a discrete spectrum, there exists a unitary transformation $\hat{U}$ that converts its own energy basis into a complete orthonormal natural basis $\{|\psi_{p_k}\rangle\}$ (up to degeneracy and renormalization energy). In this representation, the original Hamiltonian $\hat{H}$ is transformed to the form $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$, and its spectrum is mapped to a subset of the set of primes (with possible repetition if the spectrum is degenerate). The diagonal of the density matrix of the canonical ensemble for the initial system in this representation will be determined by the Gibbs distribution over this arithmetized spectrum.*

Proof: According to the lemma of orthogonality and mutual simplicity 6.3: $\underline{Z}^{(i)} = \langle g_i \rangle$, where $g_i = \frac{1}{p_i}$ for a specific energy value $p_i \mapsto e^{\beta E_i}$ and each E_i repeats according to the multiplicity of r_m, $\tilde{Z}_i$ is isomorphically equivalent to the projector operator $P_{E_i}\hat{H}6.3$, and the normalized statistical sum is $\tilde{Z}(\beta)$ is the character of the Abelian cyclic energy group $G = \mathbb{Z}_{E_{\text{General}}}$. Let $n = E_{\text{General.}}$, then the additive group of residue classes modulo is denoted as $\mathbb{Z}_n$ (here $\mathbb{Z}$ is a set of integers):

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n \ldots [n-1]_n\} \tag{8.1}$$

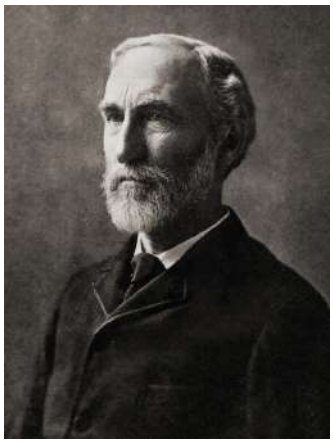


Figure 8.9: Josiah Willard Gibbs (1839-1903) was an American theoretical physicist, one of the founders of thermodynamics and statistical mechanics.

(where $n = E_{\text{General}}$) are the residue classes $mod\, n$.

By the coprimality lemma 6.3, we restrict our attention to the reduced residue classes $[k]_n$ satisfying $\gcd(k, n) = 1$. This condition ensures the standard algebraic operations in the residue ring are valid. Let's express the probability density matrix in terms of the natural basis for wave functions 6.12, according to the definition of probability density: $|\Psi|^2 = \sum\limits_{\mu,\nu} c_\mu^* \cdot c_\nu \psi_\mu^* \psi_\nu$ let's average over the quantum states $\langle\rangle$:

$$\left\langle \psi_{p_m}^{(\mu)} | \psi_{p_n}^{(\nu)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_m p_n}} \left\langle exp\left(i2\pi \frac{r}{p_m p_n} \right) \right\rangle_r \cdot \left\langle \sum_{m,n} exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta E (p_m - p_n) t \right) \right\rangle_{m,n}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{p_m - 1} \int dq \psi_{p_m}^{(\mu)*} \psi_{p_m}^{(\mu)}}{p_m} \delta(m,n) = \frac{p_m}{p_m} \delta(m,n) = \delta(m,n) \quad i^2 = -1 \tag{8.2}$$

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

According to Lemma 8.1, the expression $r = mp_n - np_m$ for $m \neq n$ runs through a complete residue system $mod(p_m p_n)$ and, in turn, the signed multiplier $\sum$ forms Dirac delta function $\delta_{m,\mu}$ [Kub+07]. Integral $\langle\rangle$ for each class of deductions $\sum\limits_{\mu=0}^{p_m - 1} \int dq \psi_{p_m}^{(\mu)*} \psi_{p_m}^{(\mu)} = 1$ gives one, ($\forall$ an element of the group $\tilde{Z}$ has an inverse element), and in total the number of such deductions is equal to p_m. As noted above, for different eigenvalues, the corresponding wave functions are orthogonal. Therefore, the first multiplier in the line of the first formula above is simplified to: $\mu = \nu$ and $\frac{1}{\sqrt{p_m p_n}} \to \frac{1}{p_m}$ and the expression $r = 1, \ldots p_m - 1$ runs through a complete residue system $mod(p_m p_n)$. $\forall p_m$ can be considered as a random variable or a vector orthogonal to other $p_m \perp p_q, \quad p \neq q$. Each eigenvalue of energy, even without taking into account degeneracy, is repeated p_m times. This does not change the average value for calculating the observable, but it has important consequences.

Here $\otimes$ stands for direct product of matrices, referring to the formula: $\left\{ \underline{A} \otimes \underline{B} \right\}_{i\alpha,k\beta} = a_{i,k} b_{\alpha,\beta}$

The statistical sum of $\left\{ \tilde{Z}_m \right\}$ is calculated through the trace of the diagonal density matrix $\hat{\rho}_m = \left\langle g_m \right\rangle$. In turn, the density matrix is the result of tensor multiplication of supermatrices 5.3: $\hat{\rho}_m = \left\langle g \right\rangle$:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_m = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_m), \quad \hat{\rho}_m = \left\langle g_m \right\rangle = \frac{1}{p_m} \\ = diag\left\{e, g, \dots g^{p_m-1} \dots\right\} \\ g_m = \frac{1}{p_m},\ p_m \mapsto e^{\beta E_m} \\ \hat{\rho}_m = diag\left\{e, g, \dots g^{p_m-1}\right\} \\ \otimes diag\left\{I_{p_m}, \left(\frac{1}{p}\right)^{p} I_{p_m}, \left(\frac{1}{p}\right)^{2p} I_{p_m}, \left(\frac{1}{p}\right)^{3p} I_{p_m} \dots\right\}\end{aligned} \tag{8.3}$$

where I_{p_m} is a unit matrix of size $p_m \times p_m$, p_m is a prime number (along with this, an abbreviated notation is used, where the index is omitted: p).

Thus, a complete orthogonal system of functions is formed $\psi_{p_m}^{(\mu)}$ in Lebesgue space with weight. The Hamiltonian of an arbitrary thermodynamic system decomposes in this basis into the sum of independent terms $H = \sum_{i=1}^{k} H_i$, where H_i acts only on subsystem i, then the canonical density matrix has the form:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z} = \frac{\prod_{i=1}^{k} e^{-\beta\hat{H}_i}}{\prod_{i=1}^{k} Z_i} = \bigotimes_{i=1}^{k} \frac{e^{-\beta\hat{H}_i}}{Z_i} = \bigotimes_{i=1}^{k} \hat{\rho}_i, \tag{8.4}$$

where

$$\hat{\rho}_i = \frac{e^{-\beta\hat{H}_i}}{Z_i}$$

— the density matrix of the ith subsystem, and $Z_i = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}_i}$ — its statistical sum. This follows directly from the factorization of the statistical sum and the exponent of the Hamilton operator.

It is enough to calculate the average value of the observed value only for $diag\left\{e, g, \dots g^{p-1}\right\}$ the first elements of the cyclic group generated by the element 8.3 (torsion groups), and extrapolate the result to all microstates. □.

The theorem on the quantum nature of prime numbers defines only the general properties of the Schrodinger equation. To solve a specific problem, it is necessary to solve a partial differential equation and take into account the values of

the wave function/its derivatives at the boundary of the localization region (including the point at infinity).

At the same time, finding the Hamiltonian of the studied system and knowing the properties of its symmetry makes it possible to significantly simplify the search for a solution and calculate the observables (energy, momentum, entropy, and other thermodynamic quantities).

Corollary 8.4 (The natural basis is a complete orthogonal system of functions) *Without limiting generality, it is always possible to choose a natural basis for an arbitrary wave function describing a thermodynamic system in which the main diagonal of its statistical matrix in the energy representation consists of eigenvalues created on the basis of a series of prime numbers with the multiplicity of each eigenvalue equal to a prime number. As a result, a complete orthogonal system of functions in the Lebesgue space with weight is formed.*

Simplification due to the choice of the basis

In a natural basis, instead of an infinite statistical matrix, a finite one can be used. Let the system have a symmetry described by a finite cyclic group of order p_m. Then the task of finding the statistical average of the observed is reduced to an elementary averaging along the main diagonal in this p_m-dimensional basis. Calculating the average using the formula 2.39 boils down to working with a finite diagonal matrix consisting of segments of length p_m. In the case of degenerate energy levels (multiples of algebraic roots g_m), the situation does not change qualitatively - the segment lengths increase taking into account the multiplicity of $p_m g_m$ see below.

Indeed, let the system under study contain k subgroups. Then such a system is described by the direct product of k such finite groups. Its Hilbert space will be a tensor product of k spaces of dimension p_m, respectively. Thus, instead of one infinite matrix, it is sufficient to average over a set of finite matrices (their tensor product). This huge simplification follows from the symmetry property.

Corollary 8.5 (An important property of the natural basis

for the wave function) *In the above-mentioned natural basis for the wave function 6.12, each energy value, even without taking into account degeneracy, occurs p_m times, where p_m is the mth prime number in ascending order. The statistical sum-generating element $\frac{1}{p_m}$ for $\forall p_m$ can be considered as a random variable or a vector orthogonal to others.*

It is enough to generate a cyclic subgroup $\underline{F} \subset \underline{Z}$ of order p. According to Lagrange's theorem, if $\underline{F}$ is a subgroup of the group $\underline{Z}$, then $\left|\underline{Z}\right| = \left[\underline{Z} : \underline{F}\right] \cdot \left|\underline{F}\right|$. Let the number of microstates $\Delta\Gamma$ be divisible by a prime number p with the remainder:

$$\Delta\Gamma = ap + b, \quad b < p \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta\Gamma}{p} = a \quad \text{microstates.} \tag{8.5}$$

Then we can extrapolate a number of statistical sums to the residual elements or discard them as negligible terms. Given the absolute convergence of a number of statistical sums according to the Dalembert feature, the sum of the series can be calculated without difficulty. Approximate computational methods are a common approach in the field of quantum mechanics. As A. Messia writes: Practically none of the physical systems can be studied without using a suitable approximate method [Mes14].

[Mes14]: Messiah (2014), *Quantum Mechanics*

As a result of the choice of a natural basis for the wave functions discussed earlier, the calculation of the average value of the observables can be greatly simplified. This can be seen from the expressions 2.39 and 8.3, where the average value of the observable is calculated from a finite number of microstates generated by the element $\left\langle g \right\rangle$ of cyclic groups $diag\left\{e, g, \ldots g^{p-1}\right\}$. In addition, orthogonality with weight is applied 1.1, calculated according to the elementary rules of infinite geometric progression with the real denominator $\left(\frac{1}{p}\right)^p$.

Remark 8.1 The theorem establishes a deep isomorphism between the canonical ensemble structure in quantum statistical mechanics and the multiplicative structure of the set of prime numbers. This makes it possible to apply the methods of number theory to problems of statistical

physics and vice versa.

Definition 8.2 *In group theory, the subgroup H of the group G can be used to decompose the main set G into disjoint, equal-cardinality subsets known as cosets. In general, there are the left cosets and the right cosets. Obviously, for an Abelian group, the left and right adjacent classes are cosets are identical.*

Remark 8.2 (Not only ideal gases) It is important to remember that the fundamental laws of statistical physics (especially symmetry) are applicable to any material objects. It is from these laws that the general concepts of variable observation, principles of interaction, laboratory measurements, and verification of mathematical theories follow.

Corollary 8.6 (Assignment of prime numbers) *The purpose of prime numbers is to ensure the realization of the symmetry property of an arbitrary system, the fulfilment of the orthogonality ratio of wave functions. In other words, prime numbers provide separability (from Latin 'separo' - to separate) - the ability to divide an object into separate components while preserving their properties. This is the separability of parts of a composite system as independent and completely independent objects. It is thanks to prime numbers that it is possible to ensure states of isolation or, conversely, a state of quantum entanglement (coherence).*

According to the Definition of 5.3, the primes p_n are the smallest subgroup containing the set of all linear combinations of the form $k_1p_1 + k_2p_2 + \cdots + k_mp_m$ and homomorphic to the statistical sum $\tilde{Z_1}^{k_1}\tilde{Z_2}^{k_2}\ldots\tilde{Z_m}^{k_m}$. The inverse Laplace transform from the product of the statistical sum will be identical to the convolution operation on the statistical weights $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \ldots, \Delta\Gamma_k$. This formula corresponds to the character of a finite Abelian group. The antipode of separability is connectedness (entanglement) from the Lemma on orthogonality and mutual simplicity 6.3 it follows that in order to ensure the uniqueness of the calculation of each microstate, it is necessary to get rid of the common divisors in the expression 6.7. To do this, the result must be divided by the Euler function $\phi(a)$. A similar technique was used above in the formula for calculating the statistical sum of a mixture of gases by including multipliers of the form $N_a!N_b!N_c!\ldots$, in

the denominator of the formula 2.2.

As a result, the product of statistical sums forms a multiplicative Abelian group isomorphic to $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ the group of reduced residue classes modulo $(mod\, m)$, with the order of $m = \phi(a)$ being the value of the Euler function 4.2. For more information, see appendix 4.

Can the considered theorem be formulated purely in terms of linear operators with limited discrete spectral measures of finite quadratically integrable functions? According to the author, the answer is no: the postulates in mathematics are based on the principles of physics. To illustrate, it is enough to refer to the Principles of Euclid [Euc48]. Why is it accepted as an obvious and unprovable statement that length is preserved during rotation and parallel transfer? - because these are the invariants of quantum mechanics discussed above, which follow from translational symmetry and rotational symmetry, preserving the solution of the Schrodinger equation. Geometry and mathematics in general are based on observation and empirical experience.

[Euc48]: Euclid (1948), *Beginnings Books II*

Mathematical postulates are based on the principles of statistical physics.

For curious readers

The proof is presented with a focus on the knowledge of high school students and first-year students of physics and mathematics faculties of universities. For a deeper acquaintance with the theory of prime numbers, readers can refer to the literature:

[MP22], [AR87], [Pra76].

[MP22]: Manin et al. (2022), *Introduction to Modern Number Theory*

[AR87]: Aerland et al. (1987), *Classical Introduction to Modern Number Theory*

[Pra76]: Prahar (1976), *Distribution of Prime Numbers*

At the same time, the ring of integers $\mathbb{Z}$ is not isomorphic to the group of characteristic functions $\tilde{Z}$. (To do this, any integer must be invertible with respect to the multiplication operation. But this is only possible in the case of a field, such as for the previously discussed group $\mathbb{Z}_n$ of residue classes modulo n.

A sequence of prime numbers (inverses) generates $\{\tilde{Z}_p\}$, which corresponds to a complete orthonormal system of wave functions that are solutions to the Schrodinger equation. Multiple repetitions of eigenvalues are possible, up to arbitrarily large values.

From Fredholm theorems I, II for the specified statistical matrix, there exists an isomorphic system of algebraic equations,

where the eigenvalues are prime numbers repeated on the diagonal, taking into account the multiplicity of degeneracy 6.1.

Since the probability density is proportional to the square of the amplitude of the wave function, $\forall$ the wave function is $\{\Psi_n\} \in \mathscr{L}_2$ it can be expressed as a probability density function $|\Psi|^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n, \quad \rho = \frac{1}{p}$ and phases of S as an imaginary number, i.e. exponents in a ζ function containing nontrivial zeros $s = \frac{1}{2} + it$. The square of the modulus of the characteristic number $\left|\mu_i\right|^2 = \frac{1}{p}$ for the Fredholm integral equation (for example, the propagator of a free particle 6.11) is the square of the eigenvalue module $|\lambda_i|^2 = p$ of the operator $\hat{E}$6.3, where p is a prime number. This matrix representation can be generalized by considering the algebra of operators over the Hilbert space of the system. The volume of the phase space is found from the determinant of this matrix $det\ \hat{E}$ — characteristic polynomial:

$$\begin{aligned} det\ \hat{H} &= (\lambda - p_i)^{g_i} \\ \Delta\Gamma &= \prod_{i=1}^{k} p_i^{g_i} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Note: In the model under consideration, each E_i is repeated according to the multiplicity of g_i.

Corollary 8.7 (Cyclic group of prime order and $\phi(x)$Euler) *The above result for the case of a cyclic group of prime order can be expressed in terms of the Euler function using the formula* $\phi(\Gamma) + 1$. *For large values, the coefficient is* $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma} \to 1$

The correction factor $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma}$

Obviously, $\phi(n) < n$ by virtue of the definition and property of the Euler function 2.34, for the case $n = p^m, m > 1$ (p is prime and $\frac{1}{p} > \epsilon$), $\phi(n) = n(1-\epsilon) \Longrightarrow$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = 1. \tag{8.7}$$

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

[Cha74] provides a more accurate estimate of $\phi(n)$ using the adder function.

For more information, see Application 10. Above, in the

formula 2.34, it was concluded that the result of phase space integration is divided by the number of permutations in the denominator to ensure a unique account for each microstate. Based on the same considerations, it is necessary to introduce the correction factor $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma}$, taking into account the order of the group: the number of adjacent classes of completely reducible representations plus one. According to 5.10 and the theorem on the structure of finite Abelian groups, assuming $n = \Gamma$:

$$\frac{\phi(n)+1}{n} = \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{n} \geq \prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{n} \to \frac{1}{\zeta(1)} \tag{8.8}$$

Where p is a prime number, $p \leq n = \Gamma$. Obviously, the number of prime divisors of n is less than the number of primes not exceeding n, and each multiplier under the product sign is less than 1. ($\pi(x)$ is a function of counting primes, the number of primes less than or equal to n, $\pi(n) \sim \frac{n}{ln\, n}$.)

The relationship of phase space with entropy and prime numbers is discussed in more detail in the chapter 8.

From a formal point of view, the ζ-function is defined as a product of the form 8.8 for the case of all $\tilde{Z}$ raised to all possible powers. The ζ function has been identified as a universal scale and normalizer. This can be compared to an infinitely labeled field where microstates can potentially be placed.

Thus, a prime number is associated with probability, with a specific microcanonical state, and with the energy of a subsystem in the system under study. The additive properties of energy, entropy, and the number of particles in the subsystems forming the system under study are, in fact, manifestations of symmetry phenomena.

The assumption of the existence of nontrivial zeros outside $\frac{1}{2}+it$ on $\mathbb{C}$

Since the considered system of orthonormal functions in the Hilbert space for $\forall$ solutions of the Schrodinger equation is complete, the above arguments imply that other solutions outside this orthonormal system contradict

the Parseval–Steklov equality. This means that nontrivial zeros ζ functions located outside the straight line $s = \frac{1}{2} + it$ on $\mathbb{C}$ cannot model material objects in the universe. The assumption of the existence of nontrivial zeros outside this line leads to the aporia.

Mathematical theorems must be empirically verified. A logically consistent statement that does not correspond to any object in nature is false (aporia). Such an assumption cannot be verified or empirically tested. Aporia (from Greek. $\alpha\pi\rho\upsilon\alpha$ — stalemate, deadlock) is a fictitious, logically correct scenario (statement, assumption, or conclusion) that cannot exist in reality.

Therefore, the Riemann hypothesis has been proved. □

Remark 8.3 A lognormal distribution should be applied for energy levels 6.3 and 6.4. According to the central limit theorem for the group G, if the fluctuations are small, then $ln\,\tilde{Z}$ will be distributed normally. This is the fundamental principle underlying the proof of the ABC hypothesis in the next chapter.

9 The Riemann hypothesis for schoolchildren

To understand the fundamental premise of the proof of the Riemann hypothesis, students are invited to refer to Planck's quantum radiation formula, discovered by Max Planck in 1900. In this study, the hypothesis is put forward that radiation is studied not in a vacuum, but in a material environment. The condition that the gas is ideal depends on the weak interaction with the substance. The existence of a minimum amount of matter is a necessary condition for the existence of the phenomenon in question. The establishment of thermal equilibrium in the radiation field is of paramount importance.

The total number of photons studied, denoted as N, is a variable determined from the conditions of thermal equilibrium. Obviously, minimizing the free energy of a gas, denoted as F, at a given temperature T and volume V leads to the following necessary condition: $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu = 0$, which means that the chemical potential of the photonic gas is zero.

Planck's formula has the form for energy density and emis-

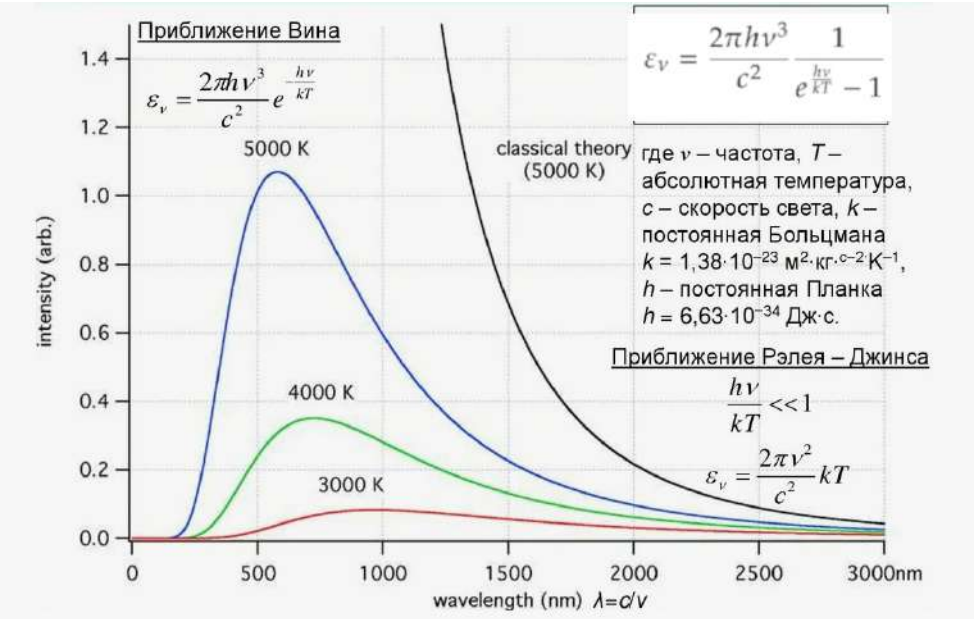


Figure 9.10: Planck's formula. Frequency distribution of energy. Wien approximation (short wave region) Rayleigh-Jeans approximation (long wave region).

sivity (ratio $\varepsilon = \frac{c}{4}u$):

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$
$$\omega = 2\pi\nu \tag{9.1}$$
$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

It allows you to calculate the probability of detecting the energy of the corresponding harmonic (overtones) in spectral decomposition over the entire spectrum. The series based on $f(n)$ converges absolutely (in our case, $\omega = \Delta\omega n$, where $\Delta\omega = 1$ by choosing the appropriate units of wavelengths and frequencies). In the high frequency domain, Planck's formula can be approximated by Wien's formula:

$$dE_\omega = V \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 e^{-\hbar\omega/k_B T}\, d\omega. \tag{9.2}$$

For the latter case, the spectral energy density of a black body is an absolutely convergent series from a completely multiplicative function, discussed earlier in the chapter on the ζ-function1.3. (The proof of this lemma is similar to the proof of the equivalence of both definitions of the ζ-function.)

The spectrum of black radiation contains the entire wave-

Figure 9.11: Max Karl Ernst Ludwig Planck — a German theoretical physicist, the founder of quantum physics. He formulated the second law of thermo-

length range, beyond which there is no radiation, and therefore there is no solution to the Schrodinger equation for a thermodynamic system (quasi-stationary case). This is a clear consequence of the completeness of the system of orthonormal functions.

Planck's quantum radiation formula is a representation of a ζ function in a complete system of orthonormal functions with weight. You can match $p_i \mapsto e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} = e^{\beta E_i} \quad \frac{1}{p_i} \mapsto e^{-\beta E_i}$ and summarize the geometric progression to establish the relationship bijections (one-to-one correspondence), namely: the number p_i will be matched with a multiplier in a statistical sum of the form $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$ (or a similar expression). $\Longrightarrow$ conclusion on the similarity of the expression of the spectral energy density of blackbody radiation and the ζ function up to a weight factor 1.1.

Corollary 9.1 *The transition to an orthonormal basis in the energy representation, taking into account the weighting coefficients in the form of prime numbers, will ensure the complete identity of Planck's quantum radiation formulas and the definition of the ζ function.*

$\phi(\Delta\omega n) = \phi(n) \quad \Delta\omega = 1$ on the appropriate frequency scale

As in the case of a diffraction grating, it is important to avoid overlapping orders 7.9 by choosing mutually prime numbers according to the lemma of orthogonality and mutual simplicity 6.3. Formula Dirichlet series 1.1 eliminates the repetition of natural numbers in a series. Similarly, the Euler function $\phi(n)$ is used to prevent duplication of frequencies in the spectrum of blackbody radiation. To cover the entire spectrum of black radiation ($\omega = \Delta\omega n$, where $\Delta\omega = 1$ is provided, by choosing the appropriate units of wavelengths and frequencies, $n \in \mathbb{N}$), the entire range of prime numbers will be required $p \in \mathbb{P}$ - their number is infinitely countable.

As a result, the principle of single accounting of each microstate is implemented 2.2.

Remark 9.1 $\phi(n)$ is the number of integers that are mutually prime with n and do not exceed n. It is consistent with the sequence 1.3 and excludes double counting of frequencies (single counting of each microstate).

In this case, the amplitude and phase of the wave correspond

to the values of the nontrivial zero ζ-function located on the imaginary axis $s = \frac{1}{2} + it$. This represents the full spectrum of radiation from a completely black body, and therefore a particle. The $\Longrightarrow\zeta$ function expresses a) the principles of equal probability of microcanonical states, which follows from the symmetry inherent in the canonical Gibbs distribution b) the completeness of the system of orthonormal wave functions in the form of the previously considered natural basis.

Corollary 9.2 *Planck's quantum radiation formula accurately describes the entire spectrum of blackbody radiation. This radiation is fundamental; there are no de Broglie waves, as well as material particles, outside the considered thermal equilibrium. Since the chemical potential of the photonic gas is zero and an ideal thermal equilibrium between matter and radiation is ensured, all the studied substance and the light emitted by it are covered by the considered spectrum. There is no other matter whose radiation would exist outside the spectrum of blackbody radiation. Thus, the verification of the Riemann hypothesis can be carried out by deeply understanding the physical phenomenon schematically represented on the graph 9.10, searching for parallels with the phenomenon of light scattering on a diffraction grating, avoiding overlapping of the order (spectrum overlap) and simple numbers.*

The zeros on the imaginary axis $s = \frac{1}{2}$ on $\mathbb{C}$ correspond to nodes of the wave function. Why the nodes? The fact is that when deriving the Planck formula, Sommerfeld radiation conditions[Vla76] are implicitly used. These conditions are derived from the solution $u(x,t) = u(x)e^{iwt}$ Helmholtz equations as eigenvalue problems for the Laplace operator. This conclusion can be compared with Riemann's conclusion, which stated that the number of nontrivial zeros of the ζ-function is infinite 2.17.

[Vla76]: Vladimirov (1976), *Equations of Mathematical Physics*

The Fermi-Dirac integral is a Γ function and a ζ Riemann function

For the trained reader, it will be interesting to consider the following relationship between The integral is considered:

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{z^{x-1}\,dz}{e^z + 1}, \quad x > 0. \tag{9.3}$$

This integral is found in statistical physics (Fermi-Dirac

distribution) and number theory.

Row decomposition Let's use the decomposition into a geometric series.:

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nz}.$$

Multiplying by z^{x-1}, we get:

$$\frac{z^{x-1}}{e^z+1} = z^{x-1}e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nz} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{x-1}e^{-(n+1)z}.$$

Slow integration We integrate the soil using the definition of the gamma function:

$$\int_0^{\infty} z^{x-1}e^{-az}\,dz = \frac{\Gamma(x)}{a^x}, \quad a>0.$$

For $a = n+1$:

$$\int_0^{\infty} z^{x-1}e^{-(n+1)z}\,dz = \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

Then:

$$I(x) = \Gamma(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}.$$

Relation to η- and ζ-functions Let's replace the index $m = n+1$:

$$I(x) = \Gamma(x)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^x}.$$

This is the Dirichlet series for **eta functions**:

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Known identity:

$$\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x),$$

where $\zeta(x)$ is the Riemann function. Proof:

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}\\ &= \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x).\end{aligned}$$

The final formula Thus:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{z^{x-1}dz}{e^z+1} = \Gamma(x)\,\eta(x) = (1-2^{1-x})\,\Gamma(x)\,\zeta(x)}.$$

Special case $x = 1$ For $x = 1$ the multiplier is $(1-2^{1-1}) = 0$, and $\zeta(1)$ diverges, which gives an uncertainty of the form $0 \cdot \infty$. Let's calculate the integral directly:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^z+1}.$$

Substitution of $t = e^z$, $dz = dt/t$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt.$$

$$= [\ln t - \ln(t+1)]_1^\infty = \lim_{T\to\infty} \ln\frac{T}{T+1} - (0 - \ln 2) = 0 + \ln 2 = \ln 2.$$

Thus:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dz}{e^z+1} = \ln 2}.$$

Short conclusion The presented formula relates the Fermi-Dirac integral to the Γ function and the ζ Riemann function through the η Dirichlet function. This connection is useful both in theoretical physics and in analytical number theory.

Physical laws must have mathematical beauty

According to physicist Paul Dirac, "Physical laws should have mathematical beauty" (Psysical laws should have mathematical beauty). This phrase was written by him on the blackboard during a lecture at Moscow University in 1956, when he was asked about his understanding of the philosophy of physics.

Dirac's methodological attitude was also reflected in his article on the centenary of Einstein's birth, where he emphasized that, first of all, one should be guided by considerations of mathematical beauty, without attaching much importance to discrepancies with experience. The belief in mathematical beauty as a criterion for the truth of physical theories was one of the key principles in Paul Dirac's scientific methodology.

However, according to the author, the feeling of beauty is an anthropological criterion of truth developed during the 4.1

Figure 9.12: Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) was an English theoretical physicist, one of the founders of quantum mechanics. Winner of the Nobel Prize in Physics in 1933.

billion years of evolution of life on Earth. There are examples of beautiful movements of animals and birds, performances of athletes that correspond to the principles of least action. Beauty manifests itself in Golden ratio in nature. Music has a close connection with mathematics. An intuitive sense of beauty helps humans (and presumably animals) to quickly come up with the right solution based on adaptation to natural laws (to filter out non-viable development trajectories).

However, verification of evidence cannot be based solely on aesthetic criteria. There are numerous examples of beautiful deliberately false pseudoscientific examinations, scientific misconceptions and biases, which will be discussed in the following chapters.

The Goldbach conjecture from the eye of physicist

Goldbach-Euler conjecture from the eye of physicist

7

1 Holbach's conjecture

In 1742, the mathematician Christian Goldbach wrote a letter to Leonhard Euler, in which he suggested that every odd number greater than five can be written as the sum of three prime numbers. Euler became interested in this problem and put forward a stronger conjecture: every even number greater than two can be written as the sum of two prime numbers.

The first statement is called the ternary Goldbach problem, and the second — the binary Goldbach problem or Euler's problem. What does this problem state? - every even number greater than two can be written as the sum of two prime numbers.

Theorem 1.1 (Binary Goldbach-Euler Problem) *Every even number, starting from four, can be written as the sum of two prime numbers*

In combination with the Riemann hypothesis, the Goldbach problem is included in Hilbert's list of problems as number eight.

This statement remains an open question in mathematics and as of 2025 has not been proven.

There exists a weaker version of the conjecture — the ternary Goldbach problem, which states that every odd number greater than seven can be written as the sum of three prime numbers. In 2013, the Peruvian mathematician Harald Helfgott proved this version.

The validity of the binary Goldbach conjecture implies the validity of the ternary one: if every even number, starting from four, can be written as the sum of two primes, then by adding three to each even number, one can obtain all odd numbers starting from seven.

An equivalent formulation of the binary Goldbach conjecture: every integer greater than one can be expressed as the arithmetic mean of two (possibly equal) prime numbers.

1 Holbach's conjecture 333
2 Preparation for the proof 336
3 Factorization of Z and Euler function 339
4 A finite-dimensional matrix. The natural basis 340
5 Analyzing Periodic Structures through Diffraction 341
6 Relationship to the group structure . . 346
7 The Chinese Remainder Theorem . 349
7.1 CRT is in the natural basis model 351
7.2 Proof of CRT 353
8 The solution is found in thermodynamics 359
8.1 The dimension of space 361
8.2 Projector operator P 362
8.3 Operator's trace . . 364
8.4 Group Character . . 364
8.5 Bertrand's Postulate 368
8.6 Additivity of Tr. Characters. Decomposition of Representations . . 369
9 Proof of the Goldbach-Euler conjecture 371

In 1937, the mathematician of the USSR Ivan Matveevich Vinogradov and Theodor Estermann proved that almost all even numbers can be written as the sum of two primes [Vin13]

[Vin13]: Vinogradov (2013), *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*

Vinogradov's Method of Trigonometric Sums

The essence of the method: an exact formula is written, expressing the number of solutions of the studied equation or the number of fractional parts of the studied function falling into a given interval, or the number of integer points in a given region, in the form of an integral of a trigonometric sum; the exact formula is represented as the sum of two terms – the principal term and the supplementary term. The principal term constitutes the main term of the asymptotic formula, the supplementary one – the remainder. In such additive problems as Waring's problem or the Goldbach problem, the principal term is investigated by a method close to the Hardy –Littlewood –Ramanujan circle method in the form of Vinogradov's trigonometric sums.

Figure 1.1: Christian Goldbach is a Prussian and Russian mathematician; full member, first conference secretary and Advisor to the Academy of Sciences and Arts, Privy Councilor.

In 2013, the ternary Goldbach conjecture was finally proven by Harald Helfgott.

The validity of the ternary Goldbach conjecture, proven in 2013, implies that every even number can be written as the sum of at most four primes.

In 1966, Chen Jingrun proved that every sufficiently large even number can be written either as the sum of two primes, or as the sum of a prime and a semiprime (a product of two primes). For example, $100 = 23 + 7 \cdot 11$.

As of April 2012, the binary Goldbach conjecture had been verified [Woo00] for all even numbers not exceeding $4 \cdot 10^{18}$.

[Woo00]: Woon (2000), «On partitions of Goldbach's conjecture»

Combined with the RH, Goldbach's conjecture is included in Hilbert's list of problems at number eight.

For curious readers

The proof is presented with a focus on the knowledge of high school students and first-year students of physics and mathematics faculties of universities. For a deeper acquaintance with the theory of prime numbers, readers can refer to the literature:

[BS85], [Kar83].

[BS85]: Borevich et al. (1985), *Number Theory*

[Kar83]: Karatsuba (1983), *Fundamentals of Analytic Number Theory*

Figure 1.2: Christian Goldbach is a Prussian and Russian mathematician, full member, first conference Secretary and Advisor to the Academy of Sciences and Arts, Privy Councilor.

An equivalent formulation of the binary Goldbach's conjecture: any integer greater than one can be represented as the arithmetic mean of two (possibly identical) primes.

In 1937, Soviet mathematician Ivan Matveyevich Vinogradov and Theodor Estermann proved that almost all even numbers can be represented as the sum of two primes. [Vin18]

[Vin18]: Vinogradov (2018), *Fundamentals of Number Theory*

Vinogradov's method of trigonometric sums

The essence of the method: an exact formula is written out expressing the number of solutions to the equation under study or the number of fractional fractions of the function under study that fall within a given interval, or the number of integer points in a given area, as an integral of a trigonometric sum; the exact formula is represented by the sum of two terms – the main and additional. The main term is the main term of the asymptotic formula,

the additional term is the residual. In additive problems such as the Waring problem or the Goldbach's conjecture, the main term is investigated using a method similar to the Hardy–Littlewood–Ramanujan circular method in the form of trigonometric Vinogradov sums.

Figure 1.3: Chen Jingrun 陈景润 (1933–1996) was a Chinese mathematician specializing in number theory. He was elected an academician of the Chinese Academy of Sciences in 1980 and is best known for proving Chen's theorem (1966), a landmark result on Goldbach's conjecture. He received the first-class National Natural Science Prize in 1982.

In 1966, Chen Jingrong proved that any sufficiently large even number can be represented either as the sum of two primes, or as the sum of a prime number and a semisimple (the product of two primes). For example, $100 = 23 + 7 \cdot 11$.

As of April 2012, Goldbach's binary hypothesis has been verified by [Woo00] for all even numbers not exceeding $4 \cdot 10^{18}$.

In 2013, the ternary Goldbach conjecture was definitively proved by Harald Gelfgott. It follows from the validity of Goldbach's ternary hypothesis, proved in 2013, that any even number can be represented as the sum of no more than four primes.

Remark 1.1 In combination with the Riemann hypothesis, Goldbach's conjecture is included in Hilbert's list of problems at number eight.

[Woo00]: Woon (2000), «On partitions of Goldbach's conjecture»

Figure 1.4: Ivan Matveyevich Vinogradov (1891-1983) was a Soviet mathematician, academician of the USSR Academy of Sciences (1929) in the Department of Physical and Mathematical Sciences.His works are devoted to analytical number theory; the main results were obtained thanks to the trigonometric sums method he created, which has become one of the main approaches to solving problems in analytical number theory.

The difficulty of finding evidence indirectly indicates the choice of inappropriate research methods and the omission of interdisciplinary approaches.

2 Preparation for the proof

It is necessary to generalize the material of the previous chapter from the perspective of algebra and group theory.

It may seem strange that even without knowing the distribution function of the primes $\pi(x)$, it is easy to draw simple conclusions that are sufficient to prove theorems in number theory. It is experiment and thermodynamics that make it possible to make fundamental generalizations in mathematics. Why? - because the world is material, and the physics of the microcosm and the macrocosm are the same, principle of correspondence of text and Heisenberg uncertainty principle operate. Thus, prime numbers model a system consisting of subsystems that do not interact, but are connected

by a common resource, the phase space. Unfortunately, a number of scientists identify the concept of interaction and communication, which is erroneous: isolation is the absence of communication, but not just absence, but disconnection - [Sel03] - separability.

[Sel03]: Selivanov (2003), *Search for the wrong and the right*

Definition 2.1 (Separability) *Separability (from Latin separabilis — 'separable") is a multi-valued scientific term used in various disciplines. It indicates the possibility of dividing an object into separate components while preserving their properties.*

Examples:

- *R^n and C^n "— separable (dense subset "— vectors with rational coordinates);*
- *space of continuous functions $C[0,1]$ "— separable (densely set of polynomials with rational coefficients);*
- *A Hilbert space is separable if and only if it has a countable orthonormal basis.*

Another example from school physics: a mixture of ideal gases. In the latter case, the volume of the vessel is also a shared shared resource.

Let's outline the conclusions of the Chapter 6 from the perspective of the algebra of group theory.

Let's summarize the conclusions of the Chapter 6. The prime number p in the natural basis serves as a generating element of a finite cyclic subgroup, The first tensor multiplier of $diag\left\{e, g, g^2, \dots, g^{p-1}\right\}$ is exactly a cyclic group of order p generated by the element g. This group is isomorphic to Z/pZ.

The second tensor multiplier is $diag\left\{\underline{E}, \frac{1}{p^p}\underline{E}, \frac{1}{p^{2p}}\underline{E}, \dots\right\}$ is a group generated by the element $\left(\frac{1}{p}\right)^p$ multiply by $\underline{E}$ a unit matrix of size $p \times p$. Because p is a prime number and $\left(\frac{1}{p}\right)^p \neq 1 \Longrightarrow$ all its degrees are different, this group is an infinite cyclic group isomorphic to $\mathbb{Z}$.

The complete group as a direct product: the statistical sum $\tilde{Z}_m(\beta)$, defined in the Chapter on the ζ-Riemann function 3.1, is represented as the tensor product (in this context equivalent to the direct product for Abelian groups) of these two subgroups. Therefore, the complete group generated by

a single generating element g_m is isomorphic to the direct sum (omit β for simplicity):

$$\tilde{Z}_m \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

An element g of a group G is called a torsion element if it has a finite order, that is, there exists a natural n such that $g^n = e$, where e denotes the neutral element of the group. A group is called periodic (or a torsion group) if all its elements are torsion elements, and a torsion—free group if the only torsion element is neutral.

In this case, the periodic part (the torsion subgroup) has the order p, its elements are $(a, 0)$. The free part (the coordinate-free part) — $\mathbb{Z}$ (the ring of integers) is an infinite cyclic group - this is the free part of our group. Its elements $(0, b)$ have infinite order. The rank of an Abelian group is defined as the rank of its free part, i.e. the number of generators in the coordinate-free part. In this case, the free part of $\tilde{Z}_m$ has rank one.

Component-by-component addition

Symbols $(a, 0)$ and $(0, b)$. Since the group is isomorphic to the direct sum $\tilde{Z}_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, each of its elements can be uniquely represented as an ordered pair: (a, b) where: the first component (a) is an element of the finite cyclic group $\mathbb{Z}/p$, and the second component (b) is an element of $\mathbb{Z}$. The group operation (addition) is performed component by component: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 \mod (p), b_1 + b_2)$. Role in the group structure: The set of all such elements $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ forms a torsion subgroup (periodic part) of the group under study, which is isomorphic to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, the order of any such element divides p. The set of all elements of $\{(0, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ forms the free part of the group under study, which is isomorphic to $\mathbb{Z}$

Now let's return to the natural basis and its interpretation based on the principles of discrete symmetry (orders in a diffraction grating), to the complete system generated by all the primes $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Each prime number p_i has its own group:

$$\tilde{Z}_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

The complete system, denoted here as $\breve{D}$, is the product (or direct sum) of all these groups over all primes. This system combines two structures:

- is the structure of an "energy grid" corresponding to the ability to independently excite multiple energy levels

to any integer degree;
- Structure of "finite symmetry": For each simple p there is a finite cyclic group $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ describing discrete symmetry (diffraction orders) within each mode.

In terms of the generally accepted isomorphism for the multiplicative group of positive rational numbers, it can be described by the following expression:

$$\mathbb{Q}^+ \cong \bigoplus_{p \text{ prime}} \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

Considering the fundamental theorem on the structure of the multiplicative group of positive rational numbers.

3 Factorization of Z and Euler function

The expression: $\tilde{Z}_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ in terms of the number of adjacent classes, is equal to the Euler function of the statistical weight $\phi(\Gamma)$ also defined in Chapter 1 3.1.

Factorization of $\tilde{Z}(\beta)$ is possible for independent subsystems. Let there be k independent subsystems in the system under study.$\Longrightarrow$ k subgroups are statistically independent, then the total statistical sum is equal to the product of the statistical sums of the subsystems.

The Euler totient function $\phi(n)$ for the number n gives the number of numbers smaller than n and mutually prime with it, i.e. it counts the number of reduced deductions $mod\,(n)$. In group theory, for a cyclic group of order n, the Euler function $\phi(n)$ is equal to the number of generating elements of this group.

In the natural basis, if the differential of statistical weight of $\Delta\Gamma$ (the number of available states) is identified with a certain natural number, then $\phi(\Delta\Gamma)$ will give the number of irreducible representations of the symmetry group or (independent) configurations of $\tilde{Z}(\beta)$.

The number k (rank) is the number of independent generators, it can also be related to $\phi(\Delta\Gamma)$, for example, if $\Delta\Gamma$ itself is a product of prime numbers. (This relationship, which depends on the symmetry of the system under study, is described below).

Figure 3.5: Leonhard Euler (1707-1783) (German: Leonhard Euler) was a Swiss, Prussian and Engssian mathematician and mechanic who made fundamental contributions to the development of these sciences (as well as physics, astronomy and a number of applied sciences).

4 A finite-dimensional matrix. The natural basis

Taking into account the previously given formula for finding the average value observed through the statistical matrix 2.39, created as a result of the tensor product of finite matrices of size $p_i \times p_i$ for k independent subsystems $p_1, p_2 ... p_k$ in a natural basis. Without loss of generality of $\forall$ linearly independent quasi-stationary functions, the orthonormal system $\{\psi_k\}$ can be obtained through the generating element of the group according to the formula containing the amplitude, phase multiplier and oscillating part. The structure of the equation 6.12 has a direct physical analogy with Fraunhofer diffraction.

Phase multiplier $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$, where $\nu = 0, 1, 2 \ldots p_n - 1$ repeats the component in the diffraction formula 7.3, which determines the intensity pattern on the screen. Similarly, $\sum_{n=0}^{N-1}\left(\int_{na}^{na+d} E_0, e^{-ikx^2} dx\right)$ corresponds to the part 7.3 describing Fraunhofer diffraction and is another multiplier in the equation describing a plane wave with a certain frequency (energy level). It can be verified that the eigenfunctions corresponding to different frequencies (wavelengths) form a complete basis for the system of wave functions. Multiplying the numerator and denominator in the formula for calculating the observable by the same number p_i does not change the value of the average.

Each state of $\psi_n^{(\nu)}$ corresponds to a certain diffraction order of m. Different p_ν define different diffraction gratings (different symmetry systems)

Orthogonality is provided by different pulses (as in diffraction, different orders of magnitude produce waves propagating at different angles).

Remark 4.1 (Sufficient to prove finite-dimensional matrices) In the natural basis, the observed value is averaged over finite-dimensional diagonal matrices with the segment size on the main diagonal without the condition of multiple roots: p_i, and with the condition of multiple roots: $g_i p_i$, where g_i is the multiplicity. It is important that multiplying

the numerator and denominator by the same number to find the observable does not change the value — a consequence of normalization in the factor space. See 8.5.

In this model, the expression $\Delta\Gamma = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$ (where p_i is determined by the symmetry of the system, the dimension of the irreducible unitary representation) becomes physically meaningful.

Statistical weight and number of unequal states

Each subsystem is described by a finite cyclic group of order p_i. The states are parameterized by deductions modulo p_i (analogous to the numbers of slits in a lattice). Here we can trace the connection between the finite system and modular arithmetic.

The complete system is described by the product of groups:

$$\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \otimes \dots \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z} \tag{4.1}$$

In such a discrete system, the total number of formal states is $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$. However, the Euler function $\phi(n)$ counts the number of elements that are mutually prime with n. In physical terms: these are states that cannot be obtained from each other by simple scaling (they are not reduced to each other by similarity transformation).

It is in the natural basis of functions that a deep physical analogy with Fraunhofer diffraction is revealed, which is clearly revealed in terms of the Fourier transform, completeness of the basis and algebraic structure.

5 Analyzing Periodic Structures through Diffraction

Consider diffraction on a one-dimensional lattice with a period of d. The field in the far zone (in the Fraunhofer approximation) is proportional to:

$$E(\theta) \propto \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik_\perp dv \sin\theta} \tag{5.1}$$

where $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, — wave vector, and $k_\perp$ is its projection orthogonal to the z axis directed orthogonally to the screen and passing through its center.That is, this projection is parallel to the screen plane. For the case of a cylindrical wave $k_\perp = k_x = k\theta$ counts the coordinate of the grid located parallel to the screen plane (the coordinate axis x_p is the coordinate of a point on the screen) 7.7.

— a wave vector orthogonal to the axis of wave propagation towards the screen (projection of the wave vector onto the axis along the screen).

Comparison with the natural basis 6.12:

- $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$ - The phase multiplier corresponds to $\exp(-ik_\perp d\nu\sin\theta)\quad \nu = 0, 1, 2\ldots p_n - 1$
- Parameter $2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ plays the role of components of the wave vector orthogonal to the screen

Fourier transform and completeness of the basis

Let's represent the functions $\psi_n^{(\nu)}$ as:

$$\psi_{p_n}^{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{p_n}} e^{ik_\perp \nu} e^{-i\omega_p t} \quad i^2 = -1 \tag{5.2}$$

where $k_\perp = 2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ is a discrete wave vector, $\nu = 0, 1, 2\ldots p_n - 1$, $w_p = \frac{1}{\hbar}\Delta E p_n = \frac{1}{\hbar}p_n$, since $\Delta E = 1$ by choosing the appropriate scale of energy units.

Fourier transform and completeness of the basis

Remark 5.1 We remind you that in the natural basis, the wave functions are numbered with prime numbers 8.2.

Key properties:

1. Orthogonality and completeness:

$$\sum_{n=0}^{p_\nu - 1} \psi_n^{(\nu)} \psi_n^{(\mu)*} = \delta_{\nu\mu}$$

   This is a direct consequence of the orthogonality of the Fourier exponentials, just as diffraction orders are orthogonal in the space of angles.
2. Discrete Fourier frequencies: The values of the projection of the wave vector in the direction orthogonal to the screen k_ν form a discrete set corresponding to allowed diffraction directions.
3. Lens as a Fourier converter: The lens performs the Fourier transform of the field at the input aperture.

This means that $\psi_n^{(\nu)}$ can be interpreted as intrinsic modes of the optical Fourier converter.

Physical interpretation

In the Fraunhofer approximation, the intensity of the diffraction grating is proportional to:

$$I(\theta) \propto \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik_\perp d\nu \sin\theta} \right|^2 \tag{5.3}$$

If we have a cascade of lattices with the numbers of slits $N_1, N_2, \ldots, N_k$, which are mutually prime in pairs, then the complete diffraction pattern corresponds to the product:

$$I_{\text{total}}(\theta) \propto \prod_{j=1}^{k} \left| \sum_{n=0}^{N_j-1} e^{-ik_\perp d_j n \sin\theta} \right|^2 \tag{5.4}$$

Remark 5.2 (For schoolchildren - The Chinese Remainder Theorem) Looking ahead, we note that the Chinese remainder theorem (CRT) guarantees that different angles of θ give different sets of residues $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, providing ideal spectral resolution.

The Brillouin zone in the quantum mechanics of periodic systems

In addition to the diffraction grating, there are other periodic systems in quantum mechanics (in particular, crystal lattices) in which the Brillouin zone plays a key role — a region in the space of the quasi-pulse k, reflecting the symmetry of the periodic potential.

Periodicity and Bloch's theorem

In a system with a period of a, the wave functions of electrons obey Bloch's theorem:

$$\psi_k(x) = e^{ikx} u_k(x),$$

where:

- $\psi_k(x)$ — full wave function;
- e^{ikx} — phase multiplier;

- $u_k(x)$ is a periodic function with the same period a as the lattice: $u_k(x + a) = u_k(x)$.

Quasi-pulse and the Brillouin zone

The quasi-pulse k characterizes the state of an electron in a periodic field. The first Brillouin zone for a one-dimensional lattice with period a is defined by the interval:

$$k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right].$$

This is an area in which the energy of the electron $E(k)$ undergoes a complete cycle of changes, and energy gaps appear at the boundaries of the zone.

Quantization of a quasi-pulse in a finite system

If the system consists of N elementary cells and satisfies periodic Born-Karman boundary conditions:

$$\psi_k(x + Na) = \psi_k(x),$$

then the allowed values of k become discrete. Substituting Bloch's theorem into the boundary condition, we get:

$$e^{ikNa} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi m}{Na}, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Number of states in the Brillouin zone

For a chain of N cells:

- there are exactly N allowed values of k;
- each $k_m = \frac{2\pi m}{Na}$ corresponds to one quantum state in each energy zone;
- the total number of states in the first Brillouin zone is N.

Example 5.1 (Example for $N = 4$) Consider a one-dimensional chain of $N = 4$ potential pits with a period of a.

Allowed values of the quasi-pulse k

We substitute $N = 4$ into the quantization formula:

$$k_m = \frac{2\pi m}{4a} = \frac{\pi m}{2a}, \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

We get 4 discrete values:

$$
\begin{aligned}
m = 0: &\quad k_0 = 0, \\
m = 1: &\quad k_1 = \frac{\pi}{2a}, \\
m = 2: &\quad k_2 = \frac{\pi}{a}, \\
m = 3: &\quad k_3 = \frac{3\pi}{2a}.
\end{aligned}
$$

Location in the Brillouin area

The first Brillouin zone: $k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$. The values of k_m fall within this range:

- $k_0 = 0$ — the center of the zone;
- $k_1 = \frac{\pi}{2a}$ — inner point;
- $k_2 = \frac{\pi}{a}$ — zone boundary;
- $k_3 = \frac{3\pi}{2a}$ is equivalent to $-\frac{\pi}{2a}$ (because of the periodicity).

The energy spectrum

For each k_m, the Schrodinger equation with periodic potential is solved, giving the energy $E(k_m)$. As a result:

- , $N = 4$ levels are formed in each energy zone;
- if there are several zones (for example, due to splitting), each will have 4 states.

Corollary 5.1 (Relation of the macroscopic parameter of the system N to the microscopic structure) *From the considered material of the inset and the example the following conclusions can be drawn:*

1. *In a finite periodic table of N cells, the number of allowed values of k in the first Brillouin zone is N;*
2. *Each k_m corresponds to one quantum state in each energy zone;*
3. *This property relates the macroscopic size of the system (N) to the microscopic structure of the spectrum (kpoints);*
4. *In the infinite system k continuously fills the zone, but in the finite system it is quantized, preserving the total number of states.*

6 Relationship to the group structure

There is a deep connection with algebra here.:

- Cyclic group $\mathbb{Z}/p_\nu\mathbb{Z}$ acts on a lattice by shifts of $n \to n+m$
- Basic Functions $\psi_n^{(\nu)}$ are irreducible representations of this cyclic group
- Completeness theorem: The characters of a finite group form a complete orthonormal basis for functions on the group. In this case:

$$\chi_\nu(n) = \exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right), \text{where } \nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1 \tag{6.1}$$

— these are exactly the characters of the cyclic group

Looking ahead, let's explain: the character χ of the group G is a homomorphism from G to the complex numbers $\mathbb{C}$. For an Abelian group, the characters also form a group isomorphic to the original one - Pontryagin duality.

States corresponding to the same subtractions modulo the common divisors of periods give indistinguishable diffraction directions.

Definition 6.1 *Let G be a locally compact Abelian topological group. In this case, the group of characters G (homomorphisms from G to $U(1)$) will also be locally compact and is called the Pontryagin dual group $\hat{G}$.*

$U(1)$ (unitary group of order 1) in mathematics is a multiplicative Abelian group of all complex numbers modulo one: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. It is also a one-dimensional Lie group and represents a circle.

This follows directly from the fact that the phase multiplier is $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$, where $\nu = 0, 1, 2 \dots p_n - 1$ corresponds to $\exp(-ikd\nu\sin\theta)$ or, in terms of number theory, depends on the fractional part of $\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$, which is the same for numbers ν that differ by a multiple of p_n.

Phase multiplier - the nature of the group representation

The phase multiplier can be identified with the nature of the group representation. Consider the cyclic group $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Her characters have the form:

$$\chi_\nu(n) = \exp\left(2\pi i\frac{\nu}{p_n}\right), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1$$

In our case, the phase multiplier is indeed the character of the cyclic group representation, where $\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}$ can be interpreted as a deduction of n modulo p_n. Compare with

the characters of the regular representation 5

Critical importance of prime numbers

The choice of prime numbers is really crucial in this formalism for several reasons. Prime numbers guarantee a unique account of each microstate, because:

- A system with a simple number of states p has no non-trivial subsystems
- All elements (except the single one) are components of a cyclic group
- This ensures maximum ‘efficiency" of statistical accounting

For a cascade of diffraction gratings, the choice of the relations between the numbers of slits $N_1, N_2, \ldots$ in the form of mutually prime numbers provides:

- No overlapping spectra of different orders;
- Maximum resolution of the spectrometer;
- Unambiguous restoration of the original spectrum from the diffraction pattern.

While maintaining a constant overall aperture of the cascade, the mutual simplicity of the slit numbers N_i ensures that Chinese remainder theorem provides a one-to-one correspondence between: the set $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ residues in modules $(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ and the diffraction angle (or energy) of the initial radiation.

The requirement of the mutual simplicity of integers is justified by by the Bezoux identity for mutually simple $(N_1, N_2, \ldots, N_k)$, which corresponds to the uniqueness of determining the projection of the wave vector in a direction orthogonal to the diffraction grating screen and, ultimately, ensures that each microstate is taken into account once 2.2.

The Bezoux identity is the following theorem. Let $a_1, \ldots, a_n$ be integers, not all equal to 0. Then there are integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ such that the ratio holds: $gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

Brief summary

Thus, the algebraic structure of the basis is $\psi_n^{(\nu)}$ and the operation of an ideal cascade of diffraction gratings are indeed described by a single mathematical apparatus based on:

- Character theory of finite cyclic groups
- to the Chinese remainder Theorem

► Properties of mutually prime numbers

This provides a deep connection between the mathematical structure, statistical physics, and optics of diffraction phenomena.

- In the diffraction grating, the directions for which $m\lambda = d \sin\theta$ give identical diffraction angles at m and $m + N$ (periodicity)
- In algebraic terms: subgroup factorization corresponds to the identification of physically indistinguishable directions

Table 6.1: The relationship between algebra, statistical physics, and optics of diffraction phenomena

Mathematical structure	Physical implementation
Irreducible representations of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	Diffraction orders
Orthogonality of characters	Angle Resolution in diffraction
Completeness of the character basis	Completeness of modes in the Fourier transform
Subgroup Factorization	Equivalence of Diffraction Directions
Cyclic Shift Group	Lattice Periodicity

Corollary 6.1 (Generalization) *Between the algebraic structure of the basis $\psi_n^{(\nu)}$ and Fraunhofer diffraction are not just analogies, but deep mathematical equivalence. Functions $\psi_n^{(\nu)}$ form a complete basis, which can be interpreted as:*

1. *Eigenmodes of the Fourier transform with a lens/lattice*
2. *Irreducible representations of a cyclic shift group*
3. *Discrete spatial frequencies in the diffraction pattern*

This is a perfect example of the manifestation of the same mathematical structure in different physical contexts, from quantum mechanics to Fourier optics.

Connection with representation theory

For the product of cyclic groups $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}\otimes\ldots\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$, where $n = (p_1^{t_1}p_2^{t_2}\ldots p_k^{t_k})$ The number of irreducible representations is $\phi(n)$. This formula has a clear physical meaning: it counts the number of physically distinguishable (unequal) states in a system with a given symmetry. In the context of the model with finite matrices $p_i \times p_i$ (p_i is a prime number), a diffraction interpretation of states with a group structure and being the product of cyclic

groups is possible. Each representation corresponds to a unique physical configuration.

7 The Chinese Remainder Theorem

For pure mathematicians, turning to physical models—such as diffraction gratings or the quantum mechanics of periodic systems like crystal lattices—in search of a mathematical proof may seem an unacceptable methodological departure. Therefore, let us instead consider a purely mathematical example: the Chinese Remainder Theorem (CRT).

This theorem was formulated by the versatile Chinese scholar Sun Tzu 孙子 author of 子算 (not to be confused with the military strategist of the same name). A thinker in the Confucian tradition, Sun Tzu was a scientist, philosopher, mathematician, and astronomer, best known for his treatise "Sunzi Suanjing" (Master Sun's Mathematical Manual), which contains the earliest known description of this theorem. He lived approximately during the 3rd to 5th centuries AD and is said to have discovered the theorem while working on calendrical calculations.

Lemma 7.1 (The lemma on the existence of the inverse element) *If a and b are mutually prime integers ($\gcd(a,b) = 1$), then there exists an integer c such that*

$$ac \equiv 1 \pmod{b}.$$

Proof. Consider the numbers

$$a \cdot 1,\ a \cdot 2,\ \ldots,\ a \cdot (b-1).$$

Statement 1: None of these numbers is divisible by b.

If $ak \equiv 0 \pmod{b}$ for some $k \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, then $b \mid ak$. But $\gcd(a,b) = 1$, so $b \mid k$. However, $1 \leq k < b$, which is impossible.

Statement 2: All residuals are different.

Suppose that $ai \equiv aj \pmod{b}$ for some $i \neq j$. Then

$$a(i-j) \equiv 0 \pmod{b}.$$

Since $\gcd(a,b)=1$, this implies $i-j\equiv 0 \pmod{b}$, in other words, $b \mid (i-j)$. But $|i-j|<b$, so $i=j$. The contradiction.

Statement 3: There is 1 among the leftovers.

The numbers $a\cdot 1,\ a\cdot 2,\ \ldots,\ a\cdot(b-1)$ give $b-1$ of various nonzero residuals modulo b. Therefore, they run through all the balances from 1 to $b-1$.

Thus, $\exists \quad c\in\{1,2,\ldots,b-1\}$, such that $ac\equiv 1 \pmod{b}$. □

Theorem 7.2 (CRT is the Chinese remainder theorem) *Let there be pairs of mutually prime natural numbers $a_1,a_2,\ldots,a_n$ and arbitrary integers $r_1,r_2,\ldots,r_n$. Then the comparison system*

$$\begin{cases} x\equiv r_1 \pmod{a_1}, \\ x\equiv r_2 \pmod{a_2}, \\ \ldots \\ x\equiv r_n \pmod{a_n} \end{cases} \tag{7.1}$$

has a unique solution modulo $N=a_1a_2\ldots a_n$.

Proof of CRT. Creating auxiliary values

Denote:

$$N=a_1a_2\ldots a_n, \quad N_i=\frac{N}{a_i} \quad \text{for each} i=1,2,\ldots,n.$$

Since a_i are pairwise coprime, then N_i and a_i are also coprime, in other words: $\gcd(N_i,a_i)=1$.

∃ of reverse elements

By the lemma of the existence of the inverse element 7.1, for $\forall \quad i \quad \exists$, an integer M_i such that

$$M_iN_i\equiv 1 \pmod{a_i}.$$

Finding a solution

Consider the number

$$x=\sum_{i=1}^{n} r_iM_iN_i.$$

Let's make sure that x satisfies all comparisons of the system. We fix an arbitrary $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Then:

- For $i \neq k$, the term $r_i M_i N_i$ contains the multiplier N_i, which is divisible by a_k (since $N_i = \frac{N}{a_i}$, and a_k is included in N and is not included in a_i when $i \neq k$). Therefore, $r_i M_i N_i \equiv 0 \pmod{a_k}$;
- For $i = k$ we have $r_k M_k N_k \equiv r_k \cdot 1 \equiv r_k \pmod{a_k}$ (by definition, M_k).

Therefore, $x \equiv r_k \pmod{a_k}$ for $\forall \quad k = 1, 2, \ldots, n$.

Uniqueness of the solution

Let x' be another solution to the system. Then

$$x \equiv x' \pmod{a_i} \quad \text{for all } i = 1, 2, \ldots, n.$$

This means that $x - x'$ is divided by each a_i. Since a_i are pairwise coprime, $x - x'$ is divided by their product N. Therefore,

$$x \equiv x' \pmod{N},$$

, which proves the uniqueness of the solution modulo N. □

A geometric model of the representation of integers in an orthogonal coordinate system based on mutually prime numbers is considered. It is shown that this model is an accurate interpretation of the Chinese remainder Theorem.

7.1 CRT is in the natural basis model

In the natural basis, $\forall p_m$ can be considered as a vector orthogonal to other $p_m \perp p_q, \quad p \neq q$, see 6.12 and 8.2. Each eigenvalue of energy, even without taking into account degeneracy, is repeated p_m times 8.5, which is embodied in the expression for the character of the group 6.1.

Let's define a set of pairwise mutually prime numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$. We compare to each a_i the basis vector $\mathbf{e}_i$ in a k-dimensional space. These vectors are orthogonal.

Any natural number N is represented in this space as a radius vector:

$$N = (r_1, r_2, \ldots, r_k) \tag{7.2}$$

where $r_i = N \bmod a_i$ is the remainder of dividing N by a_i.

Orthogonality of basis vectors ↔ mutual simplicity of modules If the modules a_i and a_j are not mutually simple (they have a common divisor $d > 1$), then changing the remainder modulo a_i may affect the acceptable values of the remainder modulo a_j. In a geometric metaphor, the vectors $\mathbf{e}_i$ and $\mathbf{e}_j$ cease to be independent (not orthogonal).

Mutual simplicity guarantees complete independence of comparison systems, similar to 7.1:

$$N \equiv r_1 \pmod{a_1}, N \equiv r_2 \pmod{a_2}, \ldots N \equiv r_k \pmod{a_k}.$$

Similarly, in the Cartesian coordinate system: movement along the X axis does not change the coordinates of Y and Z.

Coordinates of the vector ↔ set of residuals Each coordinate r_i of the vector **N** corresponds to the remainder of dividing N by a_i. Thus, each axis of space is an axis of deductions modulo a_i.

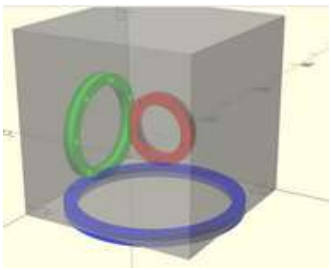


Figure 7.6: The SRC is based on a model where addition and multiplication operations are performed coordinate-wise

The existence and uniqueness of the representation

- **Existence:** CRT claims that for any set of residuals $(r_1, \ldots, r_k)$, where $0 \leq r_i < a_i$, there exists at least one number N. In the geometric model, this means that for any point with integer coordinates in the set

$$[0, a_1) \times [0, a_2) \times \cdots \times [0, a_k).$$

  there is at least one integer vector **N**.
- **Uniqueness:** CRT claims that all solutions of N are modulo comparable

$$M = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k.$$

  In the geometric model, the vectors corresponding to the numbers N and $N + M$ have the same coordinates $(r_1, \ldots, r_k)$, since when M is added (divided by each a_i), the residuals do not change. Thus, the coordinate system is cyclic on each axis with a period of a_i, and the full picture repeats with a period of M.

Radius vector ↔ ring isomorphism

The model illustrates the fundamental isomorphism underlying CRT:

$$\mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}).$$

where:

- Left part — ring of integers modulo M.
- Right part — direct product of residue rings in modules a_i.

Geometrically, the right-hand side corresponds to the k-dimensional orthotope

$$[0, a_1) \times [0, a_2) \times \cdots \times [0, a_k).$$

in which addition and multiplication operations are performed coordinate-wise (for each module independently). The radius vector $\mathbf{N}$ is an element of this direct product.

Justification of non-randomness of correspondence

This geometric interpretation is a standard and powerful way to represent and prove CRT.

Algebraic interpretation WHICH can be interpreted as the decomposition of the cyclic group $\mathbb{Z}M$ into the direct sum (product) of the cyclic groups $\mathbb{Z}a_1, \ldots, \mathbb{Z}_{a_k}$. The orthogonal vectors $\mathbf{e}_i$ correspond to the generators of these subgroups.

Remark 7.1 (The system of residual classes - SRC) The residual class system used in computer science and cryptography is based on this model. Long numbers are represented as tuples of residuals in independent modules, which allows parallel calculations (addition and multiplication coordinate-wise).

7.2 Proof of CRT

In this version of the constructive proof, CRT The proof of CRT uses "orthogonal" basis numbers e_i that satisfy the conditions:

$$e_i \equiv 1 \pmod{a_i}, \quad e_i \equiv 0 \pmod{a_j} \quad \text{for } j \neq i.$$

Then the solution of the comparison system is expressed as:

$$N = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \cdots + r_k e_k.$$

The basis vectors of the geometric model correspond to these numbers e_i.

Corollary 7.3 (The model reveals the essence of CRT) *The proposed geometric model not only corresponds to the Chinese remainder theorem, but also reveals its essence.:*

- *A set of mutually simple modules defines an orthonormal basis (with a cyclic structure) for representing numbers.*
- *The arithmetic of large numbers in this representation is reduced to parallel operations on small coordinates. The uniqueness of the representation within M reflects the fact that the space is a torus*

$$T^k = S^1_{a_1} \times S^1_{a_2} \times \cdots \times S^1_{a_k} \tag{7.3}$$

that is, the product of circles of lengths $a_1, \ldots, a_k$), and natural numbers are 'wound" on it in a single-digit spiral.

This model underlies many modern computational mathematics and cryptography algorithms. For clarity, we provide OpenSCAD code that models the space as a torus – the product of circles, as written in the last formula.

Model of Cartesian Product of Orthogonal Rings

```
###### The_space_is_a_torus.m ######
// Parameters
cube_size = 22; // Cube edge length
ring_radii = [5, 7, 11];
// Ring radii [X, Y, Z]
ring_width = 1.5; // Ring width
hole_diameter = 1;
// Hole diameter

text
// Number of holes per ring
hole_counts = [5, 7, 11];

// Colors for different rings (optional)
colors = [
```

```
[1, 0, 0, 0.7], // Red for X
[0, 1, 0, 0.7], // Green for Y
[0, 0, 1, 0.7]  // Blue for Z
];

// Module to create a ring with holes
module create_ring_with_holes(radius, thickness,
hole_count) {
 // Mid radius for hole placement
 middle_radius = radius - ring_width/2;

 difference() {
  // Main ring body
  cylinder(h = thickness, r = radius,
  center = true, $fn = 100);

  // Ring inner hole
  cylinder(h = thickness + 0.1, r = radius
  - ring_width, center = true, $fn = 100);

  // Add holes (loop to create all holes)
  for (i = [0:hole_count-1]) {
   angle = i * (360/hole_count);

   // Hole coordinates
   x_pos = middle_radius * cos(angle);
   y_pos = middle_radius * sin(angle);

   // Create hole
   translate([x_pos, y_pos, 0])
   cylinder(h = thickness + 0.2,
   d = hole_diameter, center = true, $fn = 30);
  }
 }
}

// Create bounding cube (for visualization)
%cube([cube_size, cube_size, cube_size],
center = false);

// Create three orthogonal rings
for (i = [0:2]) {
 color(colors[i]) {
  if (i == 0) {
   // Ring in YZ plane (orthogonal to X axis)
   translate([0, ring_radii[0]/sqrt(2)+ring_width,
```

```
    ring_radii[0]/sqrt(2)+ring_width])
    rotate([0, 90, 0])
    create_ring_with_holes(ring_radii[0],
    ring_width, hole_counts[0]);
   }
   else if (i == 1) {
    // Ring in XZ plane (orthogonal to Y axis)
    translate([ring_radii[1]/sqrt(2)+ring_width, 0,
    ring_radii[1]/sqrt(2)+ring_width])
    rotate([90, 0, 0])
    create_ring_with_holes(ring_radii[1],
    ring_width, hole_counts[1]);
   }
   else if (i == 2) {
    // Ring in XY plane (orthogonal to Z axis)
    translate([ring_radii[2]/sqrt(2)+2*ring_width,
    ring_radii[2]/sqrt(2)+2*ring_width, 0])
    rotate([0, 0, 0])
    create_ring_with_holes(ring_radii[2],
    ring_width, hole_counts[2]);
   }
  }
 }
```

Table 7.2: Comparison of the traditional positional system and the residual class system (SRC)

Aspect	**Traditional system**	**The system of residual classes (SRC)**
Addition	Sequential processing of digits with hyphenation	Parallel addition of k coordinates
Multiplication	$O(n^2)$ operations, transfers between digits	$O(k)$ parallel multiplications, no transfers
Concurrency	Difficult to Parallelize	Naturally parallel
Size of operations	Working with n-bit numbers	Working with small numbers (< of the SRC module)
Memory	Compact Representation	Redundant Representation (k residuals)
Comparison/sign	Simple Operation	Complex operation, requires conversion

A fundamental problem arises in the residual class system: it is impossible to directly determine whether the result of the calculations exceeded dynamic range M. Consider the following example.

Example 7.1 (Limitations of the residual class system) ▶

In the positional number system, overflow is easily determined by the number of digits of the result.

▶ In SRC information about the value of the number is distributed across all modules, and additional operations are required to determine the overflow.

Consider a system with modules:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7.$$

Dynamic range of the system:

$$M = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 3 \times 5 \times 7 = 105.$$

Representation of numbers in SRC

$$\begin{aligned}\text{Number } 100 \longrightarrow\ & (100 \bmod 3,\ 100 \bmod 5,\ 100 \bmod 7)\\ =\ & (1,\ 0,\ 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Number } 10 \longrightarrow\ & (10 \bmod 3,\ 10 \bmod 5,\ 10 \bmod 7)\\ =\ & (1,\ 0,\ 3)\end{aligned}$$

SRC multiplication

Let's perform the multiplication in SRC coordinates:

$$(1,\ 0,\ 2)\times(1,\ 0,\ 3) = (1\times1 \bmod 3,\ 0\times0 \bmod 5,\ 2\times3 \bmod 7).$$

$$= (1 \bmod 3,\ 0 \bmod 5,\ 6 \bmod 7) = (1,\ 0,\ 6).$$

The problem of interpreting the result

In fact:

$$100 \times 10 = 1000.$$

However, in the SRC we got a vector $(1,\ 0,\ 6)$. Let's check which numbers this vector corresponds to:

$$1000 \bmod 105 = 1000 - 9 \times 105 = 1000 - 945 = 55.$$

Let's calculate the representation of the number 55 in the SRC:

$$55 \to (55 \bmod 3,\ 55 \bmod 5,\ 55 \bmod 7) = (1,\ 0,\ 6).$$

Problem: the result is ambiguous.

Corollary 7.4 (Output from the example) *We got an identical vector* $(1,\ 0,\ 6)$ *both for the product of* $100 \times 10 = 1000$*, and for the number 55. This is because:*

$$1000 \equiv 55 \pmod{105}.$$

Thus, in SOC it is impossible to distinguish the result of 1000 *from the result of* 55*, since they are comparable modulo* $M = 105$.

Mathematical formulation of the problem

Let $M = \prod_{i=1}^{k} a_i$ *be the dynamic range of the system. If the result of the* R *operation satisfies the condition:*

$$R \geq M,$$

then in the SRC it will be represented by the same vector as the number:

$$R' = R \bmod M.$$

This follows from the fundamental property of SRC:

$$R \leftrightarrow (r_1, r_2, \ldots, r_k) \quad \Leftrightarrow \quad r_i \equiv R \pmod{a_i}.$$

The limitation of the SOC associated with the inability to directly determine overflow is a consequence of the very nature of the modular representation of numbers. This limitation is offset by a significant gain in the speed of performing arithmetic operations, which makes SOC effective for specialized applications where overflow is constructively excluded (for example, in modular arithmetic of cryptographic algorithms).

Corollary 7.5 (CRT helps explain statistical physics) *A similar effect when working with a diffraction grating was to avoid overlapping orders 7.9. At the level of statistical physics, this effect consists in observing the one-time accounting of each microstate 2.2. The Chinese remainder theorem helps explain important principles of statistical physics to middle school students.*

8 The solution is found in thermodynamics

It was said above that if the group of linear operators $\hat{T}_g$ is homomorphic to the group G: $g_1, g_2 \dots g_m$, then the representation of an arbitrary linear operator 3.5, to be decomposed by ortham in the linear space R^m, where - m is dimension of the space and at the same time degree of representation of the group G4.2.

According to the Goldbach-Euler hypothesis, we consider a subset of even natural numbers, i.e., N is composite. By virtue of the algebra isomorphism 3.2, in the arguments below, a completely reducible 4.1 representation D is considered, such that $N = \dim(D)$. This imposes no additional restrictions on N beyond its evenness.

In the future, we will need the concept of the dimension of Hilbert space in quantum mechanics $\dim H$.

A representation of D is reducible if there exists a non-singular matrix V such that by a similarity transformation, the representation matrix that $V^{-1}DV$ acquires a block-diagonal form, where each block corresponds to an irreducible representation. See 4.

Interpretation of the dimension of Hilbert space in quantum mechanics

Let H be the Hilbert space of the system. Let us denote by $\dim H$ the maximum number of linearly independent vectors (wave functions) in H.

1. $\dim H$ and the number of independent wave functions

By definition of the basis of a Hilbert space:

$\dim H$ = the maximum number of linearly independent wave functions of the system.

Any pure state of the system is a vector in H and the maximum number of linearly independent vectors is $\dim H$.

2. $\dim H$ and the eigenvectors of the operator Let $\hat{A}$ be the Hermite operator (observable) on H.

- If the spectrum is $\hat{A}$nondegenerate, then there are exactly $\dim H$ different eigenvectors (one for each eigenvalue).

- If available degeneracy, then the eigenvalue of λ_k has a multiplicity of g_k, and a subspace of dimension g_k corresponds to it. Then:

$$\sum_k g_k = \dim H.$$

Thus, the total number of linearly independent eigenvectors of a Hermitian operator diagonalized in H is always $\dim H$, but the number of different eigenvalues may be less. 3. $\dim H$ and the number of quantum levels of the system The 'number of quantum levels" is usually understood as the number of different eigenvalues of the Hamiltonian $\hat{H}$.

Interpretation of the dimension of Hilbert space in quantum mechanics

Example 8.1 (A particle in an infinitely deep one-dimensional well) The Hamiltonian has a countable spectrum E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), each E_n corresponds to one eigenvector (no degeneracy). Here:

$$\dim H = \aleph_0 \quad \text{(countable infinity)}, \quad \#\{\text{levels}\} = \aleph_0.$$

The numbers match because there is no degeneracy.

Interpretation of the dimension of Hilbert space in quantum mechanics

Example 8.2 (A hydrogen atom (non-relativistic), without spin) The level with the main quantum number n corresponds to several states with different orbital (azimuthal) quantum number l and magnetic quantum number m:

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2.$$

Here $\dim H = \infty$ (countable infinity), but the number of different energies E_n is finite for any top-bounded n and always: the number of levels up to a given $n < \dim H$, since there is degeneracy.

4. The finite-dimensional case For a system of N qubits (spins $\frac{1}{2}$):

$$dim H = 2^N.$$

This is the total number of linearly independent spin states. A Hamiltonian (for example, a Heisenberg one) can have degeneracy due to symmetries, so:

the number of different eigenvalues of $E_k \leq is 2^N$.

Equality is achieved only in the complete absence of degeneracy.

Corollary 8.1 (Brief conclusion) *The following conclusion can be formulated:*

- $\dim H = \sum_k g_k$($\hat{A}$ *number of linearly independent wave functions (complete set of states);*
- $\dim H = \sum_k g_k(\hat{A})$ *(for any Hermitian operator* $\hat{A}$ *of quantum levels (energies)* $\leq \dim H$ *is strictly less under degeneracy).* $\leq \dim H$

If $\dim H$ *is finite, then this is the maximum possible number of orthogonal states of the system. If* $\dim H$ *is infinite (countable), then comparison with the number of levels requires taking into account the degeneracy of the Hamiltonian spectrum.*

8.1 The dimension of space

Let $\hat{A}$ be some Hermitian operator (observable) on H. If the spectrum $\hat{A}$ is non-degenerate, then it has exactly $dimH$ different eigenvectors (one for each eigenvalue).

If there is a degeneracy, then several linearly independent eigenvectors can correspond to one eigenvalue, but the sum of the dimensions of all eigenvectors $= dimH$. Thus, the total number of linearly independent eigenvectors of the Hermitian operator diagonalized in $H = dimH$, but "different" in the meaning of "related to different eigenvalues" may be less.

Example 8.3 (Does $dimH$ correspond to the number of quantum levels of the system?) The answer to the question is no, if by the number of quantum levels we mean the number of different eigenvalues of the Hamiltonian.

So, the Hamiltonian of a particle in an infinitely deep well has an infinite number of levels $E_n = 1, 2, 3 \ldots$) and each

E_n corresponds to one eigenvector (og is non-degenerate). Here the dimension of the space is $dimH$ (countable infinity) matches the number of levels.

Counter example: degeneracy (hydrogen atom H_2: the level with the main quantum number n corresponds to several states with different l, m and the number of levels (different $E_n < dimH$ In this case, the number of independent stationary states (eigenvectors of the Hamiltonian) is equal to $dimH$.

Eigenvectors H and values

If all the eigenvalues of all matrices H are different, that is, there is no random expression of the energy level, then we can assert that the eigenvectors of the matrix H belonging to one eigenvalue λ are transformed by one of the irreducible representations of the group G, hence the multiplicity of degeneracy of the eigenvalues of the matrix H into In this case, the orders of the irreducible representations of the group G must coincide.

If there is no additional degeneracy, then for each energy level, the eigenvalue of λ, the corresponding canonical variables in the configuration space are transformed according to one of the irreducible representations of the group G. The possibility of additional expression is associated with a random coincidence of the eigenvalues of the potential energy matrices. By changing the parameters of the problem, which do not lead to a change in its symmetry, it is possible to remove the random expression. The statement that the eigenvalues of a quantum mechanical system correspond to irreducible representations of its symmetry group will be understood without reservation of the possibility of accidental degeneracy.

8.2 Projector operator P

Let G be a subspace of the Hilbert space H, and F be its orthogonal complement, i.e. $H = G \oplus F$ or $F = H \ominus G$. This means that each vector $h \in H$ can be uniquely represented as $h = g + f$. The vector g is called projection of the vector h onto G. The operator defined on the entire Hilbert space H, which maps each vector $h \in H$ to its projection onto the

subspace G, is called projection operator on G and is denoted by the symbol P_G, so that $g = Ph = P_G h$. The projection operator is obviously linear. Moreover, its norm is $||P|| = 1$.

Properties of P:

$$P^2 h = ph \quad P^2 = P \qquad P^* = P \tag{8.1}$$

Note that if P is a projection operator on G, then $E^- P$, where E is the identity operator, is also a projection operator, and $E - P$ projects onto $H \ominus G$[Sad04].

[Sad04]: Sadovnichy (2004), *Theory of Operators*

Indeed, $(E - P)^* = (E - P)$ and $(E - P)^2 = (E - P)$, and for any vector $h \in H$ we have $(E - P)h = h - g = f$, where $f \in H \ominus G$.

The product of two projection operators P_{G_1} and P_{G_2} is a projection operator if and only if they commute:

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1} \tag{8.2}$$

Subspaces G_1 and G_1 are orthogonal if and only if $P_{G_1} P_{G_2} = 0$.

Thus, the Hilbert space $H = F \oplus G$ is a direct sum of orthogonal invariant subspaces, in addition, the orthogonal projectors P_F and P_G satisfy the following expressions:

$$P_F + P_G = I, \quad P_F P_G = 0,$$

and the wave function the $\Psi \in H$ function. We denote $\Psi_F = P_F \Psi$, $\Psi_G = P_G \Psi$, so that $\Psi = \Psi_F + \Psi_G$ and $\langle \Psi_F | \Psi_G \rangle = 0$.

About equality $|\Psi|^2 = |\Psi_F|^2 + |\Psi_G|^2$

In a Hilbert space, the square of the norm of a vector:

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi_F + \Psi_G | \Psi_F + \Psi_G \rangle \\ = \langle \Psi_F | \Psi_F \rangle + \langle \Psi_G | \Psi_G \rangle + 2\,\mathrm{Re} \langle \Psi_F | \Psi_G \rangle. \end{aligned} \tag{8.3}$$

From the orthogonality of Ψ_F and Ψ_G, the last term is zero, so

$$\|\Psi\|^2 = \|\Psi_F\|^2 + \|\Psi_G\|^2.$$

Here, $|\Psi|^2$ is understood to mean the square of the norm in H (and not the pointwise value of the probability density), so the equality is true.

8.3 Operator's trace

Let A be a linear operator of some observable on H. Since F and G are invariant with respect to A (i.e. A has no off-diagonal blocks between F and G in this decomposition), then

$$P_G A P_F = 0, \quad P_F A P_G = 0.$$

Therefore,

$$A = (P_F + P_G)A(P_F + P_G) = P_F A P_F + P_G A P_G.$$

Denote constrictions:

$$A_F \equiv P_F A P_F\big|_F : F \to F, \quad A_G \equiv P_G A P_G\big|_G : G \to G.$$

Let's choose the orthonormal basis $\{e_i^F\}$ in F and $\{e_j^G\}$ in G; together they form the orthonormal basis H. Then the trace of the operator A in H:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_H(A) &= \sum_i \langle e_i^F | A e_i^F \rangle + \sum_j \langle e_j^G | A e_j^G \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i^F | P_F A P_F e_i^F \rangle + \sum_j \langle e_j^G | P_G A P_G e_j^G \rangle \\ &= \mathrm{Tr}_F(A_F) + \mathrm{Tr}_G(A_G). \end{aligned} \tag{8.4}$$

It is used here that $A e_i^F \in F$ (invariance), therefore $P_F A e_i^F = A e_i^F$, and similarly for G.

Thus, provided that F and G are invariant with respect to A**it is true** that

$$\mathrm{Tr}_H(A) = \mathrm{Tr}_F(A_F) + \mathrm{Tr}_G(A_G). \tag{8.5}$$

8.4 Group Character

We will need the definition of a group character. Since the natural basis is a diagonal matrix, and since diagonal matrices commute with each other (forming an abelian group under multiplication), taking into account the torsion subgroup, we have:

Definition 8.1 (Character χ of a finite abelian group) *A character χ of a finite abelian group G is a complex-valued*

function, not identically zero, defined on this group and satisfying the homomorphism property $\chi(g_i g_j) = \chi(g_i)\chi(g_j)$ for all $g_i, g_j \in G$.

As a result:

$$\begin{aligned} \chi(g_i)\chi(g_j) = \chi(g_k) \Rightarrow \chi(e) = 1, \\ \chi(g_i g_i^{-1}) = \chi(g_i)\chi(g_i^{-1})) = 1 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Where e is understood to be a single element in the group G. If the group G has order m, then $\forall g$ to the power of m is equal to one $g^m = e$.

The character χ_1, which has the property $\chi_1(g) = 1$ for $\forall g$, is referred to as main character of the group G.

Other character properties:

$$\begin{aligned} \chi(g) \cdot \chi(g^{-1}) = e \\ \text{if} \quad ord(G) = m \\ \Longrightarrow \chi(g^r) = \chi(g)^r = e \\ \Longrightarrow \chi = \exp(i\frac{2\pi k}{m}) \\ \chi_1(g) = 1 \end{aligned} \tag{8.7}$$

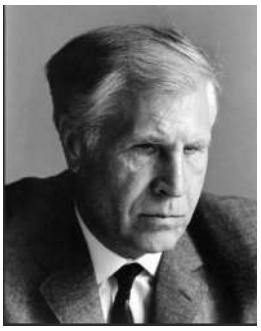


Figure 8.7: Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988) Soviet mathematician, one of the greatest mathematicians of the 20th century, academician of the USSR Academy of Sciences (1958; corresponding member since 1939). He made significant contributions to algebraic and differential topology, oscillation theory, calculus of variations, and control theory, despite the complete loss of vision as a result of an eye injury at the age of 14

Example 8.4 Examples of cyclic groups and generating elements:

- The additive group $\mathbb{Z}$ of integers is cyclic, as it is generated by the element 1;
- The additive group $\mathbb{Z}_n$ of residue classes modulo (mod, n) is cyclic, as it is generated by the element $[1]$.
- The multiplicative group C_n of complex n-th roots of unity is cyclic. These roots are given by the formula:
- $\epsilon_k = cos, \frac{2\pi k}{n} + i, sin, \frac{2\pi k}{n} \quad k = 0, 1, 2, n-1$

Note that an element g^k of a cyclic group $G = \langle g \rangle$ is a generator of $\langle g \rangle$ if and only if $(k, n) = 1$.

Let G be a product of cyclic groups, where r_i is the order of the group G_i and a, respectively a_i, are the generating cyclic elements of the (sub)group; there are k such subgroups in total. Then from $\chi(a)^r = e \Rightarrow \chi(a) = e^{\frac{2\pi i k}{r}}$, where $i^2 = -1$ is the imaginary unit, $1, 2 \ldots k \in \mathbb{Z}$ and $m = r_1 r_2 r_3 \ldots r_k$, and $\forall a \in G$ can be uniquely represented as $a = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \ldots a_k^{t_k}$,

If the order of the group $ord(G) = p$, then the group $\langle g \rangle$ contains exactly p elements: $G = \langle g \rangle = \{e, g^2, g^3 \ldots g^{p-1}\}$.

where $0 \leq t_i \leq r_i$. Then for any element $\forall a \in G$ of the group, its character can be represented as a product:

$$\chi(a) = \chi(a_1)^{t_1}\chi(a_2)^{t_2}\chi(a_3)^{t_3}\ldots\chi(a_k)^{t_k} \tag{8.8}$$

This corresponds to the tensor product of matrices of group representations, which is in agreement with the physical principles regarding integrals of motion outlined above 2.24.

In turn, the characters of a finite multiplicative abelian group G also form an abelian group $\hat{G}$. The character group $\hat{G}$ is the dual group.

Pontryagin Dual Group

The Pontryagin dual (or dual) group is a fundamental concept in harmonic analysis and the theory of topological groups.

text

Pontryagin Dual Group

Definition 8.2 (Strict definition) *Let G be a locally compact abelian topological group. Then its Pontryagin dual group (denoted $\widehat{G}$ or $G^\wedge$) is defined as:*

$$\widehat{G} = \{\chi : G \to U(1) \mid \chi \text{ is a continuous homomorphism}\},$$

where:

- $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *is the circle group (the multiplicative group of complex numbers with modulus 1);*
- χ *is a character of the group G (a continuous homomorphism into $U(1)$).*

On $\widehat{G}$ we define:

- the multiplication operation: $(\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x)$;
- the compact-open topology (uniform convergence on compact subsets of G).

The Pontryagin dual (dual) group allows generalizing the

Fourier transform to a broad class of groups.

Pontryagin Dual Group

Corollary 8.2 (Key property: Pontryagin Duality Theorem) *For any locally compact abelian group G, there is a canonical isomorphism:*

$$G \cong \widehat{\widehat{G}}.$$

This means G is self-dual via double dualization. The canonical mapping is given by:

$$x \mapsto \{\chi \mapsto \chi(x)\},$$

that is, an element $x \in G$ is mapped to the evaluation of characters at point x.

Let's consider examples of dual groups.

Pontryagin Dual Group

Example 8.5 (Examples of dual groups)

1. Real numbers $\mathbb{R}$:
$$\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R},$$
where the character $\chi_t(x) = e^{2\pi i t x}$ corresponds to $t \in \mathbb{R}$.
2. Circle $U(1)$:
$$\widehat{U(1)} \cong \mathbb{Z},$$
characters have the form $\chi_n(z) = z^n$ for $n \in \mathbb{Z}$.
3. Integers $\mathbb{Z}$:
$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong U(1),$$
the character $\chi_\theta(n) = e^{2\pi i \theta n}$ corresponds to $\theta \in [0, 1)$.
4. Finite abelian groups:
$$\widehat{G} \cong G \quad \text{(non-canonically)},$$
for example, for $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ the dual group is isomorphic to itself.

Thus, the Pontryagin dual group is a powerful tool unifying analysis, algebra, and topology within a single formalism.

For any natural number $n > 2$, there exists a prime number p in the interval $(n; 2n)$. This postulate was formulated by Joseph Louis François Bertrand in 1845. It was first proven by Pafnuty Lvovich Chebyshev in 1852.

Note that in $\hat{G}$ - the dual group, the principal character χ_1 of the group is the identity element of $\hat{G}$, $\chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1})$, and the groups $G \cong \hat{G}$ are isomorphic. This isomorphism depends on the decomposition $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \ldots G_k$ and on the choice of generating elements of the cyclic groups.

For $\forall a \in G$ we have the relations:

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = m \quad \text{if} \quad \chi = \chi_1 \quad \sum_{a \in G} \chi(a) = 0 \quad \text{if} \quad \chi \neq \chi_1 \tag{8.9}$$

Where the summation is over all elements of the group G, and m is the order of the group. Similarly:

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = m \quad \text{if} \quad a = E \quad \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) = 0 \quad \text{if} \quad a \neq E \tag{8.10}$$

Where the summation is over all characters of the group $\hat{G}$, and m is the order of the group. An interesting connection is found between characters of a finite abelian group and the definition of the Dirichlet character for integers 4.

Figure 8.8: (French: Joseph Louis François Bertrand 1822-1900) — a French mathematician who worked in number theory, differential geometry, probability theory, and thermodynamics.

8.5 Bertrand's Postulate

Bertrand's Postulate, also referred to as the Bertrand–Chebyshev theorem.

Proposition 8.3 *For any natural number $n \geq 2$, there exists a prime number p in the interval $(n; 2n)$.*

Bertrand's Postulate was formulated by the French mathematician Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) in 1845 and first proven by the Russian mathematician Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) in 1852. Ramanujan, in 1919, found a simpler proof and demonstrated that the number of prime numbers in the interval $(n; 2n)$ can be bounded from below by a non-decreasing sequence that tends to infinity, such that equality is attained for Ramanujan primes.

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

An elegant proof, taking into account the contributions of other mathematicians as well, is presented in [Cha74].

8.6 Additivity of Tr. Characters. Decomposition of Representations

Figure 8.9: Ramanujan — given name, Srinivasa — patronymic, Aiyangar — caste (1887–1920) (Tamil name without surname). Without formal mathematical training, he obtained remarkable results in number theory. His most significant work, in collaboration with Godfrey Hardy, concerns the asymptotic formula for the partition function $p(n)$.

In our case, the Hilbert space H decomposes into a direct sum of two invariant subspaces. Let us derive the trace formula for the direct decomposition. For an operator A, corresponding to some observable, we can write:

$$H = G \oplus F, \quad A(G) \subset G, \quad A(F) \subset F.$$

Definition 8.3 (The set of bounded invertible linear operators on a Hilbert space) $\mathrm{GL}(H)$ *is the set of all bounded invertible linear operators on the Hilbert space* H*, closed with respect to:*

- *operator composition (multiplication) operations;*
- *using the reverse operator.*

Formally:

$$\mathrm{GL}(H) = \{T \in \mathscr{B}(H) \mid T invert\ and T^{-1} \in \mathscr{B}(H)\},$$

where $\mathscr{B}(H)$ *is the algebra of bounded linear operators on* H*.*

Taking into account the isotropy of the Hilbert space, the directions of the orthoprojectors $P_\perp$ and $P_\parallel$ are equivalent. Bertrand's postulate can be applied equally well to both parallel and perpendicular projections.

Application to the characters of representations of groups

Let $\pi : G_{\mathrm{grp}} \to \mathrm{GL}(H)$ be a unitary representation of a finite or compact group G_{grp}. By the terms of Goldbach's Conjecture, N is even, therefore composite, which corresponds to the given representation decomposed into the direct sum of at least two irreducible representations (it will be explained below why exactly two can be found):

$$\pi = \pi_G \oplus \pi_F, \quad H = G \oplus F.$$

The character of the representation of π is, by definition, equal to the trace of the representation operator:

$$\chi_\pi(g) = \mathrm{Tr}_H(\pi(g)).$$

Since $\pi(g)$ has a block-diagonal form in the basis consistent with the decomposition of $H = G \oplus F$, the additivity of the trace directly follows from **key property**:

$$\boxed{\chi_\pi(g) = \chi_{\pi_G}(g) + \chi_{\pi_F}(g)}. \tag{8.11}$$

Therefore, the formula 8.11 is a special case of this general expression 8.5.

Linear shell of vectors

Linear shell of vectors

Definition 8.4 *The linear shell of the set of vectors in a linear space* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ L *is the set of all possible linear combinations of these vectors. Formally:*

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \;\middle|\; c_i \in \mathbb{R} \right\},$$

where:

- c_i — *scalar coefficients (real numbers);*
- $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ — *linear combination of vectors.*

Otherwise, it is said that the linear shell is stretched over the vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Key properties

A linear shell is a linear subspace in L. This means that for any two vectors from the shell, their sum and multiplication by a scalar also belong to the shell.

The smallest subspace containing the original vectors

If there is a subspace of $W \subseteq L$ that includes $v_1, \ldots, v_n$, then

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq W.$$

Dimension =rank of the vector system

The dimension of the linear shell is equal to the maximum number of linearly independent vectors among $v_1, \ldots, v_n$.

If the vectors are linearly independent, then

$$\dim(\text{span}) = n.$$

9 Proof of the Goldbach-Euler conjecture

Based on the above assumptions, we can proceed to the proof of the Goldbach-Euler conjecture.

A unitary matrix is a square matrix with complex elements, the result of multiplication by the Hermitian conjugate is equal to the unit $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I$. For every unitary matrix U, there exists a unitary matrix V such that $V^{*}UV$ is diagonal.

Proof. Let there be a linear operator $\hat{A}$ in the Hilbert space L_2 corresponding to the observable A. According to the conditions of the hypothesis, due to the parity of N, the representation of the symmetry group of the system under study $D'$is given and due to the unitary transformation: $D = UD'U^{\dagger}$, it is possible to switch to another orthonormal basis, for example, to the natural basis 6.12, where the proof is particularly vivid 9.10.

We have orthonormal bases $\{e_i^G\}$ in G and $\{e_j^F\}$ in F; together they form the orthonormal basis H. Then the trace of the operator $\hat{A}$ in H is expressed as the sum of the traces of its constraints 8.4 and 8.5.

In the natural basis, $\forall p_m$ can be considered as a vector orthogonal to other $p_m \perp p_q, \quad p \neq q$, see 6.12 and 8.2. Each eigenvalue of energy, even without taking into account degeneracy, is repeated p_m times 8.5, which is embodied in the expression for the character of the group 6.1.

According to Bertrand's slightly reformulated postulate for $\forall$ of an even $N\exists$ prime number $\frac{N}{2} \leq p < N$. Thus:

$$\Psi = P_G\Psi \oplus P_F\Psi = P_{\perp}\Psi \oplus P_{\parallel}\Psi \tag{9.1}$$

This means that by means of unitary transformations, it is possible to place the considered state vector Ψ for the operator $\hat{A}$ in the linear subspace 8.6 generated using two prime numbers $p_{\perp}$ and $p_{\parallel}$.

$$\operatorname{span}\{H\} = \operatorname{span}\{F\} \oplus \operatorname{span}\{G\} \tag{9.2}$$

It is important to remember that due to the isotropy of space, Bertrand's postulate can be applied to any of the two legs of a right triangle. In addition, the natural basis (6.12) is a complete orthonormal system of functions.

Interpretation in the context of the natural basis Let's say in the physical model:

- N is an even number interpreted as the full dimension of the state space or the number of quantum levels: $N = \dim H$.
- The primes p_1 and p_2 correspond to the dimensions of the irreducible representations into which the original one decomposes: $p_1 = \dim G$, $p_2 = \dim F$.

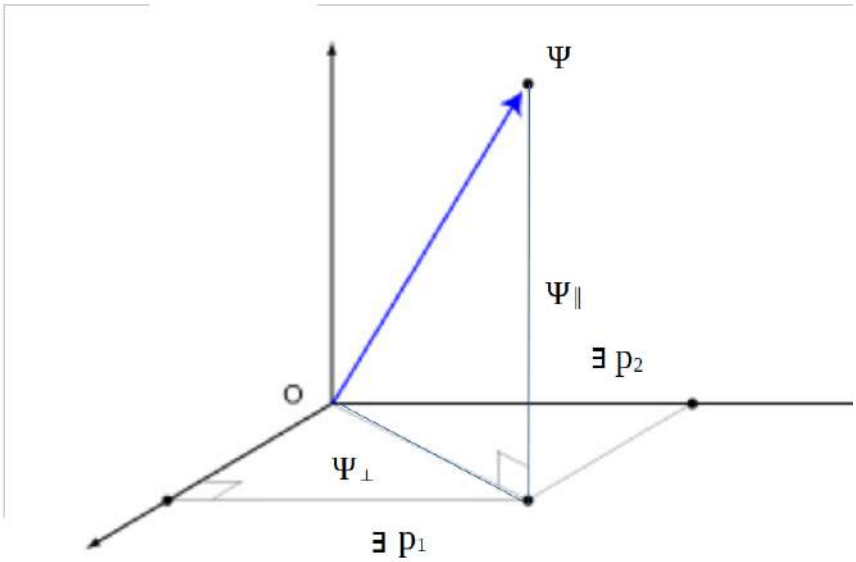


Figure 9.10: Additivity of the trace of an operator when decomposing a space into a direct sum of invariant subspaces. The character of the direct sum of representations is equal to the sum of the characters of the terms: $p_1 + p_2$

Decomposition of $H = G \oplus F$ taking into account the expression for characters 8.11 implies equality:

$$\boxed{\begin{aligned} N = \dim H = \dim G + \dim F \\ \text{If } A = I \text{ then } N = \dim H = p_1 + p_2 \\ = \phi(p_1) + \phi(p_2) + 2 \end{aligned}} \tag{9.3}$$

In Hilbert space, the identity operator corresponds to the identity matrix I.

The last expression uses the property of the Euler formula for the prime number $\phi(p_1) = p - 1$. The presence of the term 2 corresponds precisely to the minimum prime number inherent in the formulation of the Goldbach-Euler hypothesis.

The binary Goldbach-Euler hypothesis has been proved. □

Remark 9.1 (Why is there always a pair of $p_\perp$ and $p_\parallel$?) If a pair of simple primes $p_\perp$ and $p_\parallel$ were not found, then this would contradict the basic principles laid down in the foundations of our universe. The basic properties of Hilbert space, separability, are based on these principles, provided that there exists a countable complete system of elements, a natural basis generated by p numbers.

The proof used the premise that Bertrand's postulate can be

applied to either of the two legs of a right triangle. Why is this possible? - the answer lies in the plane of physics.

Remark 9.2 (Physical isotropy, not mathematical) Hilbert/ Euclidean space has rotational symmetry (invariance with respect to groups $O(n)$), as a mathematical object.

The space-time of the special theory of relativity (Minkowski space) has physical isotropy (invariance with respect to Lorentz groups $SO(1,3)$), which includes the constancy of the speed of light.

Hilbert space does not model physical space-time. It models, for example, the space of quantum states, where the concept of "the speed of light in different directions" simply does not make sense. Fore more detailed see Chapter in Fermat's Last Theorem 19.

Thus, it is a categorical mistake to attribute the property of physical isotropy to a Hilbert space. It is mathematically isotropic in its own sense, which is not identical to the isotropy of the universe.

So, the initial premise of decomposing the system into two independent components with generators p_1 and p_2 leads to a mathematical statement that coincides with the **Goldbach's binary hypothesis** for even N.

Corollary 9.1 (What are the principles of Bertrand's postulate?) *The additivity of the operator trace when decomposing a space into a direct sum of invariant subspaces is a common mathematical fact. In the representation theory of groups, this fact is expressed in the additivity of the characters: the character of the direct sum of the representations is equal to the sum of the characters of the terms. Applying this principle to a model in which the dimensions of irreducible components are identified with prime numbers naturally leads to the relation $N = p_1 + p_2$ for even N.*

This is intuitive: division into parts involves the formation of at least two terms. That is why the minimum number of terms in the decomposition of any composite even number into primes is two.

ABC Conjecture: From Experiment to Theory

8 The ABC conjecture from the Eye of physicist

1 Formulations of ABC conjecture 376
2 The key idea of Prove 376
3 S and a finite-dimensional reduced matrix 380
3.1 $\hat{\rho}$ - the density matrix and S von Neumann 381
4 Linear spaces 390
5 ABC-hypothesis. There are no quantum correlations . . 398
6 Estimation of the defect of a triple . . 400
7 Fluctuations 404
8 Chebyshev's theorem 412
9 ABC@home project and discreteness factor of the phase space 423
10 From the perspective of school thermodynamics 427
11 Analogies from SLDE systems . . . 430

1 Formulations of ABC conjecture

The ABC conjecture was formulated independently in number theory by the mathematicians David Masser in 1985 [1] and Joseph Esterle [2] in 1988. It is stated in terms of three positive whole a, b, c that are co-prime and satisfy $a + b = c$. The conjecture essentially states that the product of the distinct prime factors of ABC is usually not much smaller than C or $max(a, b, c) < K_\epsilon Rad(abc)^{1+\epsilon}$, where K_ϵ depend only on some positive ϵ - real number.

The Rad function is the radical of the numbers A,B and C equal to the product of the primes forming these numbers, but raised to the first power, i.e. $Rad(8) = Rad(2^3) = 2$, $Rad(1000000) = Rad(2^6 * 5^6) = 30$. An equivalent formulation of the ABC conjecture includes the quality $q(a, b, c)$ of the triple which is defined as:

$$q(a, b, c) = \frac{log(c)}{logRad(abc)} = \frac{ln(c)}{lnRad(abc)} \tag{1.1}$$

For every positive real number ϵ, there exist only finitely many triples A, B,C, of co-prime positive integers with A + B = C such that $q(a, b, c) > 1 + \epsilon$. Many hundreds of pages have been spent by eminent mathematicians in the Western world searching for proofs [3], and the process of searching for proofs continues.

2 The key idea of Prove

Let's consider an example of producing a batch of factory products, for instance, sliding wardrobe doors, where the width of each door is respectively: $A + B = C$ centimeters.

Remark 2.1 Note that capital letters here denote random variables.

This is the reference value, but in practice, both systematic and random errors are possible. Let's assume that thanks to product quality management, systematic errors have been eliminated, but inevitable random errors remain due to uncontrolled factors.

Scientific Inquiry

The ABC conjecture in number theory was formulated independently by mathematicians David Masser in 1985 [MC85] and Joseph Oesterlé in 1988.

[MC85]: Masser et al. (1985), «Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory»

Assume that the distribution law for the width of each door—independent random variables—has the same standard deviation σ, and their expected values are respectively $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. From the fundamentals of mathematical statistics ([Hud70]), we know that the measurement error in the last formula is approximately: $\sim \frac{\sqrt{{\sigma_A}^2+{\sigma_B}^2+{\sigma_C}^2}}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{N}}$, where N is the number of product batches used in the experiment—this is the sample size.

[Hud70]: Hudson (1970), *Statistics for Physicists*

From this simple example, we can proceed to the proof of the ABC conjecture. This requires applying the foundations of arithmetic theory, moving to simple integer polynomials and linear mappings, Jordan matrices, and quantum mechanics.

The algebras of all the above are in homomorphism relations. The same prime numbers, taken from the chain $Rad(abc)$, play the role of roots of the integer polynomial, the characteristic polynomial of the linear mapping matrix, root vectors of the linear space, decomposed into a direct sum of invariant subspaces, and eigenvalues for the linear mapping matrix, the Hamiltonian of the quantum system operator.

Figure 2.1: The ABC conjecture in number theory was formulated independently by mathematicians David Masser in 1985 and Joseph Oesterlé in 1988

Let's focus on the eigenvalues or roots and ensure that the average value of the logarithm of the matrices, i.e., the average value of the sum of elements on the main diagonal, or the so-called trace of the matrix, does not change even in the case of multiple roots from the same chain of prime numbers to the first power $lnRad(abc)$, provided an adiabatic process in the system under study. If we divide the last

formula by the number of elements on the main diagonal, we obtain the entropy S of the system under study. During adiabatic processes, the entropy of the system is conserved. This simple statement is the key to the proof and requires practically no mathematical calculations. The ABC conjecture formula implies a statistical description of a certain physical system consisting of subsystems, expressing the additive property of a common resource for energy, entropy, and other thermodynamic quantities. These properties are ensured by decomposing the integers a, b, c into primes.

Since entropy is an additive quantity, just like the number of particles in an isolated vessel, and both quantities are so-called integrals of motion, it is easy to calculate the relative standard deviation of the square $\sim \frac{1}{\sqrt{S}}$, where S is the entropy of the particle of the system under study. It remains to calculate L—the number of quantum levels in the system under study, which will play an important role in our formula 1.1.

To search for a proof of the ABC conjecture using mathematical methods, it is necessary to use the rules of linear algebra, the quantum mechanical representations of the wave function, the operator form of the Hamiltonian [LL04], entropy estimates [Kub+07], Ch. 10, 1.18] using the statistical matrix [LL02] 9, pp. 28-29 in the quantum-mechanical representation. The rapid development of quantum computing and cryptography promotes the popularization of knowledge about quantum mechanics. To broaden the horizons of a 21st-century student, it would be logical to expand the high school curriculum with the basics of quantum mechanics, resorting to analogies with radio waves, signal spectra. For many years, school chemistry lessons have covered the electronic configuration of the atom, the arrangement of electrons in the atom by levels and sublevels based on general ideas of quantum mechanics.

The school curriculum includes the basics of combinatorics and probability theory, pendulum motion, oscillator equations, the fundamentals of thermodynamics, internal energy, heat quantity, the first law of thermodynamics, wave interference, signal spectra [Kha62], resonance phenomena, the concept of wave-particle duality, photons, the photoelectric effect, atomic orbitals and spin, the Heisenberg uncertainty principle [Mes78], the basics of laboratory measurements

[LL04]: Landau et al. (2004), *Theoretical Physics. Volume 1: Mechanics*

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

[Kha62]: Kharkevich (1962), *Spectra and analysis*

[Mes78]: Messiah (1978), *Quantum Mechanics. Volume 1*

and their errors, and so on. This extensive list of concepts allows for drawing analogies between the presented material and the school curriculum.

of a diagonal type, on the main diagonal of which there are prime numbers, just taken from the expression $Rad(abc)$. This method allows us to calculate the entropy of the system under study and its subsystems by simple arithmetic calculations, and in addition to evaluate the so-called the quality of the three $q(a,b,c)$. In fact, a more appropriate term would be defect or fluctuation is a top-bounded function with a normal distribution (we are talking about the entropy of the system under study). Next, you can apply Chebyshev's theorem, as it will be described in more detail below. This is the main idea of the proof.

Figure 2.2: The five-hundred-page proof of the ABC conjecture ABC hypothesis is the work of Japanese mathematician Shinichi Mochizuki, who studies number theory and arithmetic geometry at Kyoto University.

[Moc21]: Mochizuki (2021), «Mochizuki's proof of ABC-conjecture»

Remark 2.2 Meet the work of Shinichi Mochizuki, a mathematician from Kyoto University [Moc21]

500 pages read by 10 people on Earth

The Fermat's Last theorem proof (120-140 pages) by Andrew Wiles' pages is not the limit. The five-hundred-page proof of the ABC conjecture ABC hypothesis is the work of Japanese mathematician Shinichi Mochizuki, who studies number theory and arithmetic geometry at Kyoto University.

Proposition 2.1 ($\{(a,b,c)\}$ countably and POSET) *The statement consists of two parts:*

The set of triples of positive integers a, b, c such that $c = a + b$ is a countable set.

If you order it in ascending order c, you get a partially ordered set - POSET.

The proof. The set of all triples (a,b,c) of positive integers satisfying the condition $c = a + b$ is indeed countable. From the standpoint of the set-theoretic approach, the set of such triples can be represented as the union over all $c \geq 2$ of finite sets of triples with a fixed c. The union of a countable number of finite (or countable) sets is countable.

After sorting the triples in ascending order c, we introduce a relation of the order $\preceq$, where $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2)$if and only if $c_1 \preceq c_2$, then the resulting structure will be a partially ordered set.

Let's check the partial order axioms for this relation:

Reflexivity: For any triple (a, b, c), it is true that $c \preceq c$. Therefore, $(a, b, c) \preceq (a, b, c)$.

Antisymmetry: If $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2)$ and $(a_2, b_2, c_2) \preceq (a_1, b_1, c_1)$, this means that $c_1 \preceq c_2$ and $c_2 \preceq c_1$, from where $c_1 = c_2$. (However, the equality $c_1 = c_2$ does not imply that $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$).

Transitivity: If $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2)$ and $(a_2, b_2, c_2) \preceq (a_3, b_3, c_3)$, then $c_1 \preceq c_1$, then $(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_3, b_3, c_3)$.

Conclusion: The set of triples $\{(a, b, c)\}$ such that $c = a + b$ is countable and when ordered by c it forms a partially ordered set. □

The entropy of the system under study is calculated using the formula as the logarithm of the statistical weight (from the number of available non-equivalent configurations of the system). The entropy calculation is performed in more detail in the next section.

3 S and a finite-dimensional reduced matrix

This section will define entropy from the standpoint of thermodynamics in relation to the model under consideration. The text above analyzed **infinite-dimensional operators** in a natural basis, in particular, the statistical operator (density matrix), defined in terms of probabilities and the reciprocals of prime numbers.

Proposition 3.1 *We can significantly simplify the presentation by relying on normalization in the factor space and applying Fredholm theorems* I, II *6.1, according to which for the specified* ***finite-dimensional reduced matrix*** *8.4 (subgroups of torsion 2.1) there exists an isomorphic system of algebraic equations where the eigenvalues are the primes $p \preceq n$ repeated on the*

diagonal of the matrix, taking into account the multiplicity of degeneracy . This finite-dimensional reduced matrix is $\check{D}(n)$ will be discussed in more detail below.

Entropy is defined as the average (denoted by $\langle\rangle$) value of the logarithm of the statistical weight $\Delta\Gamma$. The formula below is given both for quantum states through the probability distribution over energy $w(E_i)$ and in the quasi-classical approach through the probability density ρ:

$$\begin{aligned} S &= -\langle \ln w(E_i) \rangle = -\sum_i w_i \ln(w_i) \\ S &= -\left\langle \ln\left[(2\pi\hbar)^s \rho\right] \right\rangle = -\int \rho \cdot \ln\left[(2\pi\hbar)^s \rho\right] dp, dq \end{aligned} \tag{3.1}$$

The entropy determined in this way (for the quasi—classical case, the lower formula), like the statistical weight itself, is dimensionless [LL02]. The presence of Planck's constant $\hbar$ in the latter formula is essential for determining entropy in classical statistics. The introduction of $\hbar$ makes entropy in the classical case independent of the choice of units of measurement.

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

Returning to the model described in the Chapter 6 and the natural basis 6.12, as well as its corollary 4.1, neglecting small quantities 8.7, we consider $S = \ln \Delta\Gamma$.

In this model, the statistical operator ρ is a finite diagonal matrix consisting of the prime numbers p_i on the main diagonal, taking into account the multiplicity of their repetition. Let's apply a discrete distribution with normalization over the full group of incompatible events [Gmu23], [Hud70].

[Gmu23]: Gmurman (2023), *Probability Theory and Mathematical Statistics*

[Hud70]: Hudson (1970), *Statistics for Physicists*

3.1 $\hat{\rho}$ - the density matrix and S von Neumann

Definition 3.1 (Finite-dimensional reduced matrix) *Let's return to the diagonal density matrix 3.1, the main diagonal of which consists of a set of prime numbers. (In the natural basis, this matrix corresponds to the previously considered "ideal diffraction grating".)*

Although the order of sequence does not matter from the point of view of measuring what is observed using a static matrix, without changing the generality, we will consider them to be arranged in ascending order. In the natural basis of wave functions, each

prime number p on the specified diagonal is repeated with a multiplicity of p:

$$\breve{D}(n) = \mathrm{diag}\left(\underbrace{2,2}_{2times}, \underbrace{3,3,3}_{3\ texttimes}, \underbrace{5,5,5,5,5}_{5\ texttimes}, \ldots \right) \tag{3.2}$$

where the diagonal elements contain a consecutive series of prime numbers $2 \le p \le n$, each repeated p times. Repetition (lack of repetition) does not affect the calculation of the average value of the observed 2.39 and the algorithm for applying statistical weights. Such a matrix will be defined as finite-dimensional reducedmatrix for a set of prime numbers, no more than n, and denoted using $\breve{D}(n)$ - then simply finite-dimensional matrix .

In this subsection, we will need the following rule for taking the logarithm of a matrix.

The logarithm of the matrix D is calculated according to the rule $\log(D) =:$

$$\begin{pmatrix} \log(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log(d_n) \end{pmatrix}.$$

The matrix logarithm

The logarithm of the matrix D (usually the natural logarithm is meant, but it may be on a different basis) is also a diagonal matrix obtained by applying the logarithm to each diagonal element The rationale for the stated rule follows from the algebra of matrices (see the Appendix, Functions of matrices 11).

The density matrix $\hat{\rho}$ describes both **quantum** (superposition) and **classical** (statistical mixture) uncertainty.

Definition 3.2 *For an ensemble of states $\{|\psi_i\rangle\}$ with probabilities $\{p_i\}$, where $\sum_i p_i = 1$ and $p_i \ge 0$, the statistical operator is defined as:*

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$$

In the matrix representation in the basis of $\{|n\rangle\}$:

$$\rho_{nm} = \langle n| \, \hat{\rho} \, |m\rangle = \sum_i p_i \langle n|\psi_i\rangle \langle\psi_i|m\rangle$$

$\hat{\rho}$ is an operator (matrix), not a vector (wave function).

Corollary 3.2 *Properties of the operator* $\hat{\rho}$*:*

1. ***Normalization (single trace condition)****:*

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1$$

2. ***Hermiticity****:*

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

Consequence: The eigenvalues of $\hat{\rho}$ *are real.*

3. ***Non-negativity****:*

$$\langle\varphi|\,\hat{\rho}\,|\varphi\rangle \geq 0 \quad \forall|\varphi\rangle$$

The eigenvalues of $\hat{\rho}$ *lie in* $[0, 1]$.

4. ***The average value of the observed*** $\hat{A}$*:*

$$\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$$

5. ***Criterion of pure condition****:*

$$\begin{aligned} &\textit{Clean condition:} \quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \\ &\textit{Mixed condition:} \quad \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1 \end{aligned}$$

The value of $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2)$ *is called purity of state.*

Figure 3.3: John von Neumann (1903–1957; born Janos Lajos Neumann) — Hungarian-American mathematician, physicist, and polymath. He made significant contributions to quantum physics, quantum logic, functional analysis, set theory, computer science, economics, and other scientific fields.

(The obtained average value of the observed value coincides with the result according to the formulas: 2.38 and 2.39.)

Definition 3.3 (The von Neumann entropy) *For the described thermodynamic system* D*, consisting of subsystems* A*,* B*,* C*, with a factorized diagonal statistical matrix* ρ*, von Neumann entropy is determined by the expression:*

$$S = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}) \tag{3.3}$$

where:

Tr *is the operation of taking the trace of the density matrix (statistical matrix) 3.2;*
$\ln\hat{\rho}$ *is the matrix natural logarithm.*

The von Neumann entropy is a key quantity in quantum information theory that generalizes the classical Boltzmann-Gibbs

and Shannon entropy to quantum systems. It quantifies the uncertainty of the state of a quantum system or the degree of its 'mixing" (deviations from the pure state).

Von Neumann entropy is a quantum mechanical analogue of classical Boltzmann—Gibbs entropy, generalizing Shannon information entropy to quantum systems.

More consistently, the possibility of applying the Von Neumann entropy definition to the model under consideration is disclosed in Appendix 12.

The generally accepted definition of Von Nieman entropy will be used below.

Physical meaning

The von Neumann entropy quantifies:

- the degree of "mixing" of the quantum state (deviation from the pure state);
- uncertainty of the state of a quantum system for an observer;
- is the amount of information about the system that is unavailable.

As a result, in relation to the model under consideration, it will be similar to that given in the definition above 12.1 is an expression for entropy.

The result can be generalized to an arbitrary case using $S = \ln \Delta\Gamma = \ln \left(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \right)$ by the additivity property of entropy:

$$S = \ln \Delta\Gamma = \sum_{i=1}^{k} g_i \log p_i \tag{3.4}$$

Here p is a prime number, not a probability!

Entropy is found as the average logarithm along the main diagonal of the statistical density matrix ρ in the energy representation. Let's calculate the entropy using the following example.

Example 3.1 (The case with probability $w = \frac{1}{p}$) Consider a statistical matrix on the main diagonal of which there are eigenvalues with equal probability $w_i = \frac{1}{p}$, where p is some prime number. Then the number of elements on the main diagonal of the matrix D 3.5 will also be equal

to p, which corresponds to the maximum mixed state (see below). The normalization condition: $w = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} w_i = 1$ is met. Calculate average value of the trace of the logarithm of the density operator matrix $\hat{\rho}$ using the matrix logarithm rule 11:

$$S = \frac{1}{p} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \log p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log p \end{pmatrix} = \log p \qquad (3.5)$$

With unitary transformations (only unitary transformations that preserve the norms of vectors and the Hermitian properties of operators have a physical meaning), the trace of the density matrix does not change - the von Neumann entropy is invariant with respect to the choice of basis: the density matrix remains unchanged in both the coordinate and impulse representations.

In the natural basis, each quantum state based on p -prime number repeats p times, even without the degeneracy condition, see corollary 8.5. At the same time, in the energy representation, states with different characters (phase factors $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{\nu}{p_n}\right\}\right)$, similar to the multiplier in the diffraction formula 7.3, which determines the intensity distribution on the screen) are not distinguishable, since they are determined by the same energy level. When calculating the average value of the trace of the logarithm of the matrix $\hat{\rho}$ of the density operator 3.5 it is enough to take into account $\log p$ once for a state without taking into account algebraic multiplicity (multiplicity of degeneracy over states with different characters) and g_i times for $p_i^{g_i}$ states taking into account algebraic multiplicity. This would correspond to the generally accepted definition of von Neumann entropy.

Corollary 3.3 (Singleness of p_i on the main diagonal $\log D(n)$) *In the natural basis, see 6.12 each quantum state based on p -prime number repeats p times even without the degeneracy condition, see corollary 8.5. This is a visual interpretation of the appearance of* $\log p$ *in the expression 3.5 p times. Based on orthogonal vectors, a statistical matrix was formed with a multiple of p times $w_i = \frac{1}{p_i}$ due to the fact that wave functions*

based on different characteristic factors $\exp\left(i2\pi\left\{\frac{v}{p_n}\right\}\right)$ *are orthogonal to each other. After taking the matrix logarithm and textcolortealaveraging the cell of the statistical matrix* $p \times p$ *is converted into the block* 1×1 *using the formula 3.5. This result is explained by the factorization 3: one generating element of a group based on a prime number* p *is sufficient to describe the properties of the entire adjacent class. In the energy representation, such a class depends only on the energy* E_p*. Different characteristic factors of the natural basis (different phases) do not play a role in calculating entropy.*

Speaking of the bijection $p_i \mapsto e^{\beta E_i}$, we can also summarize the geometric progression and establish a similar ratio of the bijection $p_i \mapsto \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$

The length of the diagonal ρ and the dimension of the Hilbert space of the system

The length of the diagonal (the number of diagonal elements) of the density matrix is equal to the dimension of the Hilbert space of the system, i.e. the number of basic states in the selected representation. This number is the same as the number of energy levels **only in the absence of degeneracy**. In the general case, it is equal to the sum of the multiplicities of degeneracy of all levels.

Density matrix and its dimension Density matrix (statistical operator) $\hat{\rho}$ describes the state of a system in quantum statistical physics. In the chosen orthonormal basis $\{|\psi_n\rangle\}$, its elements are equal to

$$\rho_{ij} = \langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_j\rangle.$$

If the basis contains N vectors, then $\hat{\rho}$ is represented by the matrix $N \times N$. Therefore, the number of diagonal elements (‘diagonal length") is N.

The number N is the **dimension of the Hilbert space** of the system, i.e. the number of all linearly independent states that are taken into account in the description under consideration.

Number of quantum levels The ‘number of quantum levels" L is usually understood as the number of different eigenvalues of the energy E_k of the Hamiltonian $\hat{H}$, i.e. the number of different energy levels.

Each eigenvalue of E_i can correspond to several linearly independent eigenstates. Their number $g_i \geq 1$ is called

multiplicity of degeneracy of the level E_i.

If we choose the eigenstates of the Hamiltonian (energy basis) as the basis, then the number of basis vectors N will be equal to **the sum of the multiplicities of degeneracy of all levels**:

$$N = \sum_{i=1}^{k} g_i.$$

Thus, the dimension of the Hilbert space (the length of the diagonal of the density matrix) N is related to the number of levels L through degeneracy.

- **If there is no degeneracy** ($g_i = 1$ for all i), then $N = L$.
- **If there is a degeneracy** (for at least one level $g_i > 1$), then $N > L$.

The length of the diagonal ρ and the dimension of the Hilbert space of the system

Example 3.2 (An electron in the ground state of a hydrogen atom) Consider the spin degrees of freedom of an electron in the ground state ($n = 1$).

- Energy level is one ($L = 1$), since the state of $1s$ has a certain energy. However, this level is degenerate in the back: there are two states with projections $s_z = +\hbar/2$ and $-\hbar/2$. Therefore, the multiplicity of the degeneracy is $g = 2$, and the dimension of the Hilbert space for the spin description is $N = 2$. The
- density matrix describing the spin state has a size of 2×2. The length of its diagonal is 2, which is not equal to the number of levels (which is 1).

The physical meaning of the difference The diagonal elements of the density matrix in the energy basis ρ_{nn} give the probabilities of detecting a system in a particular quantum state $|n\rangle$. The off-diagonal elements ρ_{nm} ($n \neq m$) describe coherence (quantum interference) between states.

- If the states $|n\rangle$ and $|m\rangle$ belong to different energy levels, the coherences between them tend to oscillate rapidly and can average to zero.
- If they belong to the same degenerate level ($E_n = E_m$), then coherence can persist for a long time. This

is fundamentally important, for example, in quantum information for storing a qubit in a degenerate subspace.

Quantum physics in arithmetic formulas

Definition 3.4 (Number of subsystems k. The number of quantum levels L. Index i, variables g_i, p_i) *Below, k will be used - the number of subsystems in the system under study, equal to the number of prime numbers; the variables g_i, p_i are taken from the formula 3.6. As will be shown below, $L = \sum_{i=1}^{k} g_i$ is the number of quantum levels of the system under study, equal to the number of primes p_i, taking into account their degree of multiplicity g_i appearance on the main diagonal of the finite-dimensional matrix $\tilde{D}$, the exact definition of which is made a few paragraphs below 3.1.*

From the standpoint of school knowledge, the laws of thermodynamics are of particular interest in finding evidence for the ABC hypothesis. The following common resources are: phase space, statistical weight, entropy, number of particles, energy, volume of the vessel. It is assumed that the system under study is in thermodynamic equilibrium and that the temperature is equal for all the components of the system under study and its subsystems. This condition corresponds to a wide class of physical phenomena without significant limitations.

[AR87]: Aerland et al. (1987), *Classical Introduction to Modern Number Theory*

According to the basic theorem of arithmetic [AR87], each of the three numbers in the expression $a + b = c$ can be decomposed into prime factors, degrees above one are allowed, but under the conditions of the ABC hypothesis, repeated multipliers in this decomposition are excluded due to the lack of common divisors:

$$a + b = c$$

equivalent to:

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k} * 1^{n-t} + b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \cdots b_l^{\beta_l} * 1^{n-u} = c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \cdots c_m^{\gamma_m} * 1^{n-v}$$

$$\prod_{i \in A} p_i^{g_i} + \prod_{i \in B} p_i^{g_i} = \prod_{i \in C} p_i^{g_i}$$

$$\text{where} \quad A = \{a_1, a_2 \ldots a_x\}$$

$$B = \{b_1, b_2 \ldots b_y\}$$

$$C = \{c_1, c_2 \ldots c_z\}$$

$$\forall p_i^{g_i} \in \mathbb{P} \quad \text{if} \quad p_i^{g_i} | (abc), \text{then } p_i \in A \cup B \cup C \tag{3.6}$$

Here the | sign means division, $\mathbb{P}$ is a set of prime numbers. The index i is a counter running through a series of prime numbers in the top row of the formula. At the same time, the following (sub)domains (areas of index definition) are distinguished: $i \in A$, $i \in B$, $i \in C$ and $i \in ABC$, respectively, which allows you to write the expression in a unified form in the second line of the formula using end-to-end variables p_i and exponents of g_i.

All subscript multipliers are prime numbers, $\alpha_1 + \cdots \alpha_k = t, \beta_1 + \cdots \beta_l = u, \gamma_1 + \cdots \gamma_m = v$ and $n = max(t, u, v)$

To comply with the rules of the dimension of elements in the space of integers, defined as n-fold Cartesian product The axes of integers are $Z^n = Z * Z * \ldots * Z$, each term in the formula above is also multiplied by a multiplier in the form of 1^{n-t} elementary unit cube in order for each term to have a dimension equal to the dimension of the Euclidean space n, in which the studied manifolds of different dimensions are embedded. (From the analogy with the Lego constructor, you can try to move on to the axioms of topology ([MW73], [ST01] and the postulates of Euclid.) In the Chapter on Fermat's Great Theorem, an engineering approach based on symmetry will be fully demonstrated.

[MW73]: Milnor et al. (1973), *Differential Topology*

[ST01]: Seifert et al. (2001), *Topology*

What physical phenomenon can the formula 3.6 correspond to? It models an isolated thermodynamic system consisting of subsystems with no connections between them, but a common resource is divided in a certain way, as shown in Fig. 3.4 in the margins.

Figure 3.4: The studied (thermodynamic) system is a part of the universe allocated for observation, consisting of subsystems with a given number of particles, energy and temperature.

Definition 3.5 *Define the diagonal (under)the matrix D whose main diagonal consists of only some primes taken from the finite matrix* $\breve{D}(n)$ *included in the expression* $Rad(abc)$*. The*

important condition is that each prime number in the submatrix D occurs only once 3.3.

Now let's imagine an adiabatic compression of the system under study, in which the phase volume is preserved, but energy levels are excited, which leads to the appearance of multiples of the energy eigenvalues, i.e., multiple roots. We will denote such a matrix as .

The matrix $\tilde{D}$ makes it easy to calculate the von Neumann entropy S, and the structure of its diagonal is consistent with the formula 3.6.

The adiabatic process will be discussed in more detail below.

Numbers A B C and quantum mechanics

It is possible to map a quantum mechanical system to linear maps $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$. Let's move from Euclidean space to Hilbert space. Hilbert space, studied in the first decade of the 20th century by David Hilbert, Erhard Schmidt and Fridges Rees in the framework of the theories of partial differential equations and quantum mechanics, can be explained to schoolchildren from the standpoint of the basics of radiophysics, equations describing the propagation of an electromagnetic wave, the phenomenon of interference.

4 Linear spaces

In adiabatic processes, the entropy of the system is conserved. This simple statement is the key to the proof and requires almost no mathematical calculations. Formula (3.6) implies a statistical description of a certain physical system consisting of subsystems, expressing the additive property of a common resource for energy, entropy, and other thermodynamic quantities. These properties are provided by decomposing the integers a, b, c into primes. It is known from the introductory course in algebraic number theory that the rules of arithmetic in the ring of integers $\mathbb{Z}$ have structural analogues in the ring of polynomials $k[x]$ over the field k (in particular, over the field of complex numbers $\mathbb{C}$).

Polynomials with integer coefficients or coefficients in a field have properties similar to those of integers: the existence of a

division algorithm with a remainder, the concept of the greatest common divisor, and the uniqueness of decomposition into irreducible factors (in the case of factorial rings).

There is a canonical ring homomorphism between the ring of integers $\mathbb{Z}$ and the ring of polynomials $\mathbb{Z}[x]$, which naturally extends to the homomorphism between the corresponding algebras with respect to the operations of addition and multiplication.

Algebra of integers and algebra of polynomials

Previously, the connection of the residue group Z_n^+ with the thermodynamic system was found in the Chapter 6. Below, the terms simple and irreducible, as applied to polynomials, will be used as synonyms. Let $f \to k[x]$, then there is a one-to-one decomposition:

$$f = c \prod_p p^{m(p)}, \tag{4.1}$$

where c is a constant and the product is taken over irreducible polynomials of the form $(\lambda - a_i)^{g_i}$. The degrees and the constant are uniquely determined.

$$\begin{gathered}(\lambda - a_1)^{\alpha_1}(\lambda - a_2)^{\alpha_2} \cdots (\lambda - a_k)^{\alpha_k} q_1(\lambda) \\ + (\lambda - b_1)^{\beta_1}(\lambda - b_2)^{\beta_2} \cdots (\lambda - b_l)^{\beta_l} q_2(\lambda) \\ + (\lambda - c_1)^{\gamma_1}(\lambda - c_2)^{\gamma_2} \cdots (\lambda - c_m)^{\gamma_m} q_3(\lambda) = 1 \\ \forall a_i, b_i, c_i \text{ correspond to letters in } (3.6) \\ \text{and can be designated as } p_i \end{gathered} \tag{4.2}$$

The formula above contains integer polynomials based on irreducibles, they are also mutually simple [MP22], which is briefly expressed in the formula above: there are polynomials q_1, q_2, q_3, the total sum of the formula corresponds to $gcd = 1$ (3.6). The Euclidean[**a**]lgorithm is used to work with integer polynomialsKurosh2013, [AR87], as well as for the case of numbers [Wei72].

Each of the above polynomials can be uniquely associated with the linear map $\mathcal{A}$ (respectively $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$) with the characteristic polynomial 4.2, whose roots are taken from the formula 3.6 - these will be just the prime numbers included

[MP22]: Manin et al. (2022), *Introduction to Modern Number Theory*

a

[AR87]: Aerland et al. (1987), *Classical Introduction to Modern Number Theory*

[Wei72]: Weil (1972), *Foundations of Number Theory*

in $Rad(abc)$. If a linear transformation of dimension n has n independent eigenvectors, then taking these vectors as the basis, we can transform the square matrix of the linear transformation to a diagonal form, while the eigenvectors corresponding to different eigenvalues will be linearly independent and orthogonal. For the case of multiple roots, we have:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathscr{A})^{\alpha} \mathbf{x} = 0 \tag{4.3}$$

by elementary transformations, the linear mapping matrix can generally be reduced to a Jordan shape of size $\alpha \times \alpha$ corresponding to the multiplicity α (height) of the root vector [Mys72], [SM02].

[Mys72]: Myshkis (1972), *Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics*

[SM02]: Szidarovszky et al. (2002), *Introduction to Matrix Theory: With Applications to Business and Economics*

Proposition 4.1 *For symmetric matrices, such as statistical 3.2, the spectral theorem for Hermitian matrices is true 3. Such matrices are reduced by means of a unitary transformation to a diagonal form. Moreover, there is an orthonormal basis of their eigenvectors. Eigenvalues are real numbers.*

Let's return to the extended matrix $\breve{D}(n)$3.1 and the diagonal submatrix D defined on its basis.

The matrix $\tilde{D}$ can be mapped to a linear map to itself in $\mathbb{R}^n$ in some basis of eigenvectors, while the characteristic polynomial of such a mapping will be the product of the characteristic polynomials of linear maps from the formula 3.6. The matrix $\tilde{D}$ corresponding to this combined linear mapping will have the diagonal form:

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

The eigenvalues of the matrix $\tilde{D}$ are the result of combining the eigenvalues of the matrices $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$. As a result, an unambiguous decomposition of the space R into a direct sum of invariant subspaces is achieved (the order of their sequence does not matter):

$$R = R_1 \bigoplus R_2 \bigoplus R_3 \bigoplus R_4 \bigoplus R_5 \cdots \bigoplus R_k \tag{4.5}$$

The set of all root vectors corresponding to the eigenvalue of p_i forms an invariant subspace of R_i. On the main diagonal of $\widetilde{D}$, there are eigenvalues that are prime numbers of p_i. Each one is repeated on the diagonal, taking into account the algebraic multiplicity of the root g_i.

We zero the determinants of the matrix $det\widetilde{D}$ (the tilde indicates the presence of multiple roots in the characteristic polynomial) to search for eigenvalues and vectors:

$$Det\ \widetilde{D} = \prod_{i=1}^{k} \left(\lambda - p_i\right)^{g_i} = 0 \tag{4.6}$$

where:

- k is the number of subsystems in the system under study, equal to the number of prime numbers in the formula $Rad(abc)$;
- Index i is a counter running along the main diagonal of the matrix $\tilde{D}$;
- p_i is the native/root value of the linear mapping $\widetilde{\mathfrak{D}}$ and, accordingly, the matrices $\widetilde{D}$;
- $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots p_k$ denote the eigenvalues of the matrix equal to the roots of the polynomial (4.2) and representing a set of prime numbers from (3.6). All these eigenvalues of are different and not equal to zero under the conditions of the ABC hypothesis.
- g_i is the algebraic multiplicity of the corresponding root p_i

Now it is important to apply the logarithm function and average over the main diagonal of the matrix.

From the algebraic theory of matrices [Kur13], [Mal56] it is known that elementary transformations can be performed on λ matrices, thereby creating similar matrices, but at the same time the trace of the matrix remains constant, i.e. the sum of its elements located on the main diagonal and the determinant of det - both quantities do not depend on the basis and they are invariant.

[Kur13]: Kurosh (2013), *Course of Higher Algebra*

[Mal56]: Maltsev (1956), *Fundamentals of Linear Algebra*

Definition 4.1 *It is known that the determinant of a matrix is equal to the product of its eigenvalues, which is not difficult to verify by calculating the determinant of a diagonal matrix directly "head-on".*

In our case, from the point of view of thermodynamics, $detD$ corresponds to the statistical weight in the unexcited state of the thermodynamic system $\Gamma_D = Rad(abc) = detD$ with unexcited energy levels.

Since we are considering square matrices and by virtue of the propertyIn some cases, including the one under study, it is possible to raise a λ matrix to a power, perform algebraic operations on it, and calculate polynomials from matrices.

Compare this approach to the statistical sums $\tilde{Z}$ described in Chapter 26.1.

According to the general rule of homomorphism, one can choose the simplest algebra to understand. (Homomorphism in the category of algebraic systems is a mapping of an algebraic system A to B that preserves basic operations and basic relations.)

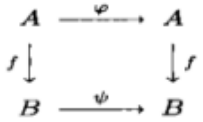


Figure 4.5: The general rule of homomorphism over algebras. $A =< A, \phi > B =< B, \psi >, f : A \to B)$

As a result, it is easy to calculate the entropy of $S = \ln \Delta\Gamma$ by averaging over all microcanonical states. It is important to take into account the normalization condition - the sum of all the probabilities of the states of the system under study forms a complete group of events. Here, the probability is expressed by the value on the diagonal of the statistical matrix 3.2, which is uniquely related to the energy of the microstate, is summed over all possible microstates and non-zero values are located on the main diagonal of the matrix $\widetilde{D}$.

Recall that the total number of quantum states of the system under study is defined as $L = \sum_{i \in ABC} g_i$12.1 and is equal to the length of the main diagonal of the matrix D.

The initial value of entropy is $S_D = \ln Rad(abc)$ and is equal to the average value from the trace of the matrix D. Let the degeneracy of energy levels turn on at time t_1, which in the language of matrix algebra means the appearance of multiple eigenvalues — root vectors (4.3). This can be realized by "including" powers greater than one in the characteristic polynomial by multiplying by a diagonal matrix with an element of the form $x_{i,i}$ on the diagonal ($1 \leq i \leq L$) equal to the following expression:

$$x_{i,i} = (\lambda - p_i)^{1+\sigma(t-t_1)(g_i-1)} \tag{4.7}$$

Next, it remains to take the logarithm from the resulting matrix. Let's explain the meaning of the variables:

- p_i — all prime numbers are multipliers of a series of numbers $Rad(abc)$, they are also eigenvalues of a linear mapping/matrix;
- Index i is a counter running along the main diagonal of the matrix $\tilde{D}$;

- g_i is the exponent from the formula (4.2) multiplied by p_i due to the property of the natural basis 8.5, which results in the multiplicity of the root and determines the size of the corresponding segment on the main diagonal $\tilde{D}$;
- σ — sigmoid activation function or just sigmoid $\sigma(t)$ it can be approximated by the formula $\frac{1}{1+e^{-\nu(t-t_1)}}$, where the parameter ν is set externally and regulates the smoothness of the change, the higher the value of ν, the steeper the "step" at time t_1. This function is defined here on the real axis $\mathbb{R}$

Above, after the formula (4.5) it was concluded that it is possible to decompose a linear space into a direct sum of subspaces, which means reducing the matrix to a Jordan form, in the considered model to a diagonal form. Each cell (segment of the main diagonal) has its own unique root p_i. Within each Jordan cell (segment of the main diagonal), the multiplier $e^{-\beta p_i}$ remains the same - a block-by-block comparison of matrix functions is implemented. This makes it much easier to find the parameter β in the conditions of an adiabatic process, through the ratio of fractions of determinants corresponding to the linear maps $\tilde{D}$ and D divided by the number of quantum states at the end and beginning of the adiabatic process (this is easy to understand from 4.7). It follows that during the adiabatic process, the temperature increases ($\beta = \frac{1}{T}$) leads to the appearance of multiple roots in the characteristic polynomial 4.6, which is in agreement with the principles of thermodynamics.

Remark 4.1 From the perspective of school physics, you can see that when studying the ideal Carnot machine is calculated based on the value of $\frac{\delta Q}{T}$, which is the entropy differential. Therefore, the formula (4.7), taking into account the definition of entropy (3.1) operates with probabilistic quantities, which in turn is a purely mathematical concept, and excludes such an "unconventional" quantity for matrix algebra as temperature (the latter can be determined for the system under study from the canonical Gibbs definition by taking the partial derivative of entropy in energy).

With adiabatic compression/expansion, the volume of the phase space of the system and the average matrix logarithm of it — entropy remain constant. The situation was considered

above when not all the motion of the system is quasi-classical, but only the motion corresponding to a part of the degrees of freedom, while for the remaining degrees of freedom the motion is quantum. Since entropy is preserved during the adiabatic process, it is possible to return the subsystem to its original state.

From the perspective of a school course

A cumbersome formula (4.7) based on knowledge of statistical physics, can be replaced by the adiabatic equation from the school course (10.1), limiting itself to a general description of degenerate energy levels and, accordingly, the appearance of multiple roots of more than one, which greatly simplifies understanding the essence of the proof.

Adiabatic compression

In the process of adiabatic compression of the D system, which causes the appearance of degenerate energy levels, the ratio between the entropy of the system and its subsystems changes significantly compared to the initial factorized state. Let's look at the main effects.

1. Initial state (before compression) The system is factored:

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C$$

The entropy is additive (the von Neumann entropy for the product of states is equal to the sum of the entropies):

$$S_D = S_A + S_B + S_C$$

The subsystems are statistically independent: multi-pair mutual information

$$I(A : B : C) = 0$$

2. Consequences of adiabatic compression Adiabaticity means that there is no heat exchange $\delta Q = 0$ with the thermostat, and a change in the thermodynamic state of the system under study occurs due to the work of external forces.

In a reversible adiabatic process, the entropy of the system is conserved $\Delta S_D = 0$. However, the appearance of degenerate energy levels makes fundamental adjustments.:

1. Changing the structure of the density matrix The degeneracy in the Hamiltonian leads to the fact that the ground state of the system is not the only one. The system may end up in a superposition or a mixture of degenerate states, which generates quantum correlations (entanglement).
   The factorization

   $$\rho_A = \mathrm{Tr}_{BC}(\rho), \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_{AC}(\rho), \quad \rho_C = \mathrm{Tr}_{AB}(\rho)$$

   is violated Subsystems become "entangled" or quantum correlated. Reduced density matrix $\rho_A = \mathrm{tr}_{BC}(\rho)$ stops describing the pure state, even if the initial state of ρ was pure;
2. The entropy of subsystems S_A, S_B, S_C is now calculated using reduced density matrices:

   $$\rho_A = \mathrm{Tr}_{BC}(\rho), \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_{AC}(\rho), \quad \rho_C = \mathrm{Tr}_{AB}(\rho) \quad (4.8)$$

   Correlations cause subadditivity:

   $$S_A + S_B + S_C > S_D$$

   (Strict inequality: the sum of the entropies of subsystems exceeds the entropy of the whole system)
3. A non-zero multipartite mutual information occurs:

   $$I(A:B:C) = S_A + S_B + S_C - S_D > 0$$

   It quantifies the complete correlations (quantum and classical) between subsystems that have arisen due to degeneracy.

3. Important relations for entropy Entropy of the S_D system In a reversible adiabatic process: S_D = const. Its size does not change, but its structure does.: now $S_{\tilde{D}}$ can generally take correlations into account. The entropies of subsystems S_A, S_B, S_C increase because the reduced density matrices describe mixed states due to entanglement with the rest of the system.

Correlations:

The difference $(S_A + S_B + S_C) - S_D = I(A:B:C)$ is equal to the mutual information, which reflects both quantum entanglement and classical correlations between subsystems.

4. Physical interpretation The degeneration of levels during compression creates "alternative paths" of transition between states, which increases the uncertainty in the description of individual subsystems (increasing S_A, S_B, S_C) and keeps the total entropy at the level of $S_{\tilde{D}}$ due to the appearance of correlations.

The system can move from a state of independent subsystems to an "entangled" one.” state (with non-zero mutual information).

Corollary 4.2 (Conclusion:) *With adiabatic compression with level degeneracy: $S_{\tilde{D}}$ remains constant (reversible process); $(S_A + S_B + S_C)$ increases; the difference between them gives a measure of the correlations in the system.*

5 ABC-hypothesis. There are no quantum correlations

Let’s ask ourselves, are there systems without quantum and classical correlations, for example, a mixture of ideal gases? In this case, what will the ratio for the entropy S of subsystems A, B, C and the system $S_{\tilde{D}}$ combining them look like? - Yes, there are systems without correlations, for example, a mixture of various ideal gases. In such systems, the subsystems do not interact with each other, and their states are completely independent. For such a system, the ratio of the entropies of the subsystems and the combined system is as follows:

$$S_{\tilde{D}} = S_A + S_B + S_C$$

where $S_{\tilde{D}}$ is the entropy of the entire system, and $S_A + S_B + S_C$ are the entropies of subsystems A, B, C, respectively. This ratio reflects the additivity of entropy for independent subsystems.

The explanation for this phenomenon lies in the absence of interactions and correlations in the system under study. An example of such a system would be a mixture of ideal gases, particles that do not interact with each other. There is no dependence of particle states on the position of other

particles - absence of classical correlations Quantum correlations (entanglement) they also do not arise, since the system is described by classical statistics in other words, it is a incoherent mixture.

The entropy of an ideal gas: The entropy of an ideal gas is expressed in terms of its macroparameters (temperature, volume, amount of matter). For example, for one mole of gas:

$$S = C_V \ln T + R \ln V + S_0 \tag{5.1}$$

C_V is the molar heat capacity at constant volume, R is the universal gas constant, T is temperature, V is volume, S_0 is the initial entropy. For a mixture of different ideal gases, the entropy of the system is equal to the sum of the entropies of the individual gases (Gibbs theorem).

Additivity: Since the subsystems do not influence each other, their entropies simply add up. This follows from the statistical definition of entropy as the logarithm of the number of microstates corresponding to a macrostate. For independent subsystems, the total number of microstates $\Delta\Gamma$ is equal to the product of the numbers of microstates of each subsystem (Chapter 1 2.36), and the logarithm of the product is equal to the sum of the logarithms.

If system D consists of three different ideal gases, then the entropy of each gas is calculated by the formula for an ideal gas.

The total entropy of the system

$$S_{\tilde{D}} = S_A + S_B + S_C \tag{5.2}$$

is equal to the sum of the entropies of the three ideal gases.

Thus, the absence of correlations guarantees that the entropy of the system is simply the sum of the entropies of its parts.

Remark 5.1 (Important remark) This relation is valid for different ideal gases. For the same ideal gas divided into parts, the entropy will not be strictly additive due to the indistinguishability of particles (Gibbs effect). In real systems, there are always some interactions or correlations that can violate the additivity of entropy.

According to the conditions of the ABC conjecture, $A+B=C$, moreover, $S_D = S_{\tilde{D}}$ due to the adiabatic process.

Simple model of the system

The ABC conjecture contains a simple model (in the sense of uncomplicated) of the system and its subsystems, where there are no quantum correlations (entanglement). According to the Theorem on the quantum nature of prime numbers 8, this is equivalent to the absence of common divisors. The number of quantum levels L is countable. See definition 3.4.

The third law of thermodynamics (Nernst theorem) states that the change in entropy ΔS in any reversible isothermal reaction tends to zero as the temperature approaches absolute zero: $\lim_{T\to 0} \Delta S = 0$.

Returning to the formulation of the conjecture, which states: "for every positive real number ϵ there exist only finitely many triples a, b, c of coprime positive integers satisfying $a + b = c$, such that $q(a, b, c) > 1 + \epsilon$", we note that from the perspective of the considered model based on statistical physics, the inequality is proved simply.

Proof of the inequality. Entropy is a positive definite function (the minimum value of entropy is 0 and is achieved when the absolute temperature is zero), hence $S_D = S_{\tilde{D}} = S_A + S_B + S_C$ and $S_D > S_A, , S_D > S_B, , S_D > S_C$. As a result, the required relation 1.1 is proved by verification, by appealing to a whole class of physical phenomena. □

6 Estimation of the defect of a triple

From thermodynamics and the definition of entropy, it is known that entropy is an additive function. Due to adiabatic compression, which preserves entropy $S_D = S_{\tilde{D}}$, and the conditions of the experiment, we obtain:

$$\breve{q}(a,b,c) = \frac{\ln(c)}{\ln Rad(a) + \ln Rad(c-a) + \ln Rad(c)}$$

$$\approx \frac{S_C \cdot \sum\limits_{i\in C} g_i p_i}{(S_A + S_B + S_C)\cdot L} = \frac{S_C \cdot \sum\limits_{i\in C} g_i p_i}{S_D \cdot \sum\limits_{i\in ABC} g_i p_i} < 1 \quad (6.1)$$

where

The index i is a counter that runs along the main diagonal of the matrix $\tilde{D}$. The following (sub)domains (domains of definition of the index) are distinguished: $i \in A, , i \in B, , i \in C$ and also $i \in ABC$, i.e., along the entire diagonal of the matrix $\tilde{D}$ 3.1)

In this formula, the function $\breve{q}(a, b, c)$ is computed, defined on the domain of positive real numbers greater than or equal to two $\mathbb{R} \geq 2$, coinciding with the original value $q(a, b, c)$ on $\mathbb{Z}$.

Natural continuation

When we have a polynomial function originally defined on integers $\mathbb{Z}$ or rationals $\mathbb{Q}$, we can "automatically" and uniquely apply it to all real numbers $\mathbb{R}$ or even complex numbers $\mathbb{C}$. This is a natural and the only possible process. A polynomial function is defined by its algebraic expression, which uses only the operations of addition, subtraction, and multiplication (including raising to a natural power). These operations are defined and work perfectly not only on integers or rationals, but also on real and complex numbers.

Natural continuation.

The process is so straightforward that it does not require:

- Additional assumptions.
- Changing the formula.
- Any "limiting transition" (unlike analytic continuation).

Formally, if we have two polynomials $P(x)$ and $Q(x)$ that coincide on all integers or rational numbers, then they are identically equal and coincide on the entire real line $\mathbb{R}$. This property is due to the density of rational numbers in the reals and the uniqueness of the polynomial.

After the equal sign in formula 6.1, there is a transition to random (thermodynamic-statistical) variables. The numerator and denominator give the value of the entropy of the system under study, taking into account the factors from formula 3.6, which account for the number of quantum states of the system $L = \sum_{i \in ABC} g_i$ and the entropy of the subsystems A, B, C within the overarching system $D = A \cup B \cup C$ under adiabatic conditions.

Recall that the total number of quantum states of the system is given by $L = \sum_{i \in ABC} g_i p_i$ 12.1 and is equal to the length of the main diagonal of the matrix $\tilde{D}$, where each prime number is repeated according to its multiplicity.

In Chapter 4, Fermat's Last Theorem will be proved, from which it follows that $dim(A) \leq 2$. We will consider the variable a as independent and first examine the special case of constant c, varying only the factors p_1, p_2. Here it is implied that $a = p_1 \cdot p_2$ or $a = p^2$. Then we can replace the expression in the denominator $\ln(Rad(a)) + \ln(Rad(c-a))$ by $\ln(p) + \ln(c-p)$ or respectively by $\ln(p) + \ln(c-p^2)$ (all constant factors are taken out as a separate constant and do not play a role when taking the derivative to find the extremum).

The problem of finding the extremum of the function $\breve{q}(a,b,c)$ for a given c reduces to finding the maximum and minimum of the denominator, where the variable part is the number p, with $c = Const.$ => the minimum of $\breve{q}(a,b,c)$ is achieved at $p = \frac{c}{2}$, for the case $a = p_1 \cdot p_2$ the desired minimum will be $p = \sqrt{\frac{c}{3}}$, which is easy to see from the symmetric entry of the variable part under the logarithm in the denominator, by analyzing functions of the form $y = x(c-x)$ or respectively $y = x(c-x^2)$.

Let us move from the special case to the general one. It is easy to establish that $\breve{q}(a,b,c)$ on the extended domain is continuous and differentiable.

Working with a topological-algebraic field

If in some algebraic field M there is a topology, i.e., there is convergence, in other words, it is known what the relation $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ means, and the operations present in the field M are continuous with respect to this topology, then such a field is called a topological-algebraic field.

Therefore, we can compute the derivative and apply the well-known formula from school mathematics, the Newton-Leibniz formula, for upper and lower bounds of the values of a continuous differentiable function on a given interval.

Linear differential for the case of many variables

The problem of finding the extremum of a function of many variables reduces to finding the gradient of the scalar function $\breve{q} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, defined on the topological-algebraic field $M = \{\mathbb{R}^L \mid L \geq 2\}$ in L-dimensional space grad $\breve{q}$ - by the number of prime numbers in formula 3.6

In the aforementioned natural basis for the wave function 6.12, each energy value, even without taking degeneracy into account, occurs p times, where p is a prime number. The generating statistical sum element $\frac{1}{p}$ for every p can be considered as a random variable or a vector orthogonal to others. 8.5

- each prime number is considered as an independent random variable (see 8.5).

The partial derivative with respect to the variable p_j will be as follows:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \check{q}}{\partial p_i} &= \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial p_i}\frac{1}{\ln \mathrm{Rad}(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln \mathrm{Rad}(abc))^2}\frac{\partial \ln p_i}{\partial p_i} \\ &= \frac{g_i p_i}{p_i \ln \mathrm{Rad}(abc)} - \frac{\ln c}{(\ln \mathrm{Rad}(abc))^2}\frac{1}{p_i} \\ \frac{\partial \check{q}}{\partial p_i} &= \begin{cases} \frac{g_i - \check{q}}{p_i \ln \mathrm{Rad}(abc)} & \text{if} \quad i \in C \\ \frac{-\check{q}}{p_i \ln \mathrm{Rad}(abc)} & \text{if} \quad i \notin C \end{cases}\end{aligned} \tag{6.2}$$

where the index i is a counter running along the main diagonal of the matrix $\tilde{D}$. The following (sub)domains (index definition domains) are distinguished: $i \in A$, $i \in B$, $i \in C$, as well as $i \in ABC$, respectively denote the index running along the entire diagonal of the matrix $\tilde{D}$ 8.5).

To compute the partial derivatives, note that:

$$\ln c = \sum_{i \in C} g_i \ln p_i \text{ and } \ln \mathrm{Rad}(abc) = \sum_{i \in ABC} g_i \ln p_i.$$

$\mathrm{Rad}(x)$ is typically defined for integers. When generalizing to real numbers, it is assumed that $\mathrm{Rad}(x)$ is computed as the product of prime divisors of the numerator x in its rational representation (if x is rational) or via an analog for real numbers (e.g., through factorization, see Appendix 13). This preserves the meaning of the radical in the continuous case.

By analogy, it is easy to verify the existence of the derivative with respect to the exponents g_i. Thus, the function $\check{q}(p_1, p_2 \dots p_k, g_1, g_2 \dots g_k)$ is continuous and bounded on its domain. As with polynomials, a natural continuation of the function to the domain of real numbers is assumed here, where g_i, p_i are considered continuous variables. This allows computing the gradient:

$$\nabla \check{q} = \left(\frac{\partial \check{q}}{\partial g_1}, \dots, \frac{\partial \check{q}}{\partial g_k}, \frac{\partial \check{q}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \check{q}}{\partial p_k} \right) \tag{6.3}$$

Consequently, the Newton-Leibniz formula is generalized to the multivariate case, taking into account the scalar product $(\nabla \check{q}, \Delta x)$ in the L-dimensional space - this is the

number of elements on the main diagonal of the matrix $\tilde{D}$ of the system under study, accounting for multiplicity 3.4. Here, each prime number is considered an independent random variable, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots)$.

Model limitations: The condition $c, =, a, +, b$ is not accounted for. However, any conditional extremum is also an unconditional extremum of the Lagrange function. Integrality: In the original problem, a, b, c are integers, which is not considered in the continuous model. This may lead to non-physical extrema. But these limitations do not affect the consequence.

Corollary 6.1 (Corollary: gradient of the function $\Delta\breve{q}$ and ΔS) *From the analysis of expressions 6.1 and 6.2 Corollary: the gradient of the function $grad(\breve{q})$ exists on the entire domain $\exists$, does not become infinite, and the increment $\Delta\breve{q}$ can be bounded from above and below by some functions "convenient" for work. Precisely for this reason, for estimating the maximum deviation, an upper bounding function (majorant) in the form of entropy S was chosen. As will be shown below, entropy is an additive function, and its fluctuation ΔS has a normal distribution.*

From mathematical statistics, the rule of adding variances of independent random variables is known. Therefore, the final derivation of the inequality $\breve{q}(a, b, c) < 1$ in the given expression relies equally on statistical physics and mathematical statistics. The obtained inequality is strict based on the form of the fraction. The approximation sign in formula (6.1) is more accurate the larger the value of entropy.

Remark 6.1 The appeal to random variables A, B, C, D and statistical physics / mathematical statistics helped in obtaining an upper estimate of $\breve{q}(a, b, c)$ and, accordingly, $q(a, b, c)$ - it, as a rule, should not exceed one.

[ABC23]: ABChome (2023), *Volunteer network called ABC-home dedicated to distributed computing project*

Nevertheless, during numerical experiments [ABC23], a number of maximum values of $q(a, b, c)$ exceeding one have been found. How to explain this paradox? - The author is convinced that this phenomenon is due to fluctuations, as explained below, in the section (see section 7) specifically dedicated to this phenomenon.

7 Fluctuations

For $\forall$ formula (3.6) there exists an entire class of physical subsystems: ideal gases, solutions, crystal lattice vibrations with quasiparticles - phonons, and so on, where the approaches

outlined above are realized, and the ABC-conjecture is trivially proven from the perspective of an observer from the micro-world.

What does the quality measure q of a triple or the deviation from the stated principles correspond to? To answer this question, let us turn to the complete system, including the studied subsystem and fluctuations.

Considering the reasoning above and the formula, it is necessary to find a suitable interpretation for the quality measure of the triple $q(a,b,c)$, bounded by a continuously differentiable function $\breve{q}$ computed using thermodynamic equations 6.1, and the more accurate, the larger the observation statistics.

Entropy is subject to fluctuations; any micro-object fluctuates according to a formula determined by the Gaussian normal distribution. A prime number is related to energy (a material object) by the relation $p \mapsto e^{\beta E_p}$ 5.1. Therefore, the grand canonical Gibbs distribution, which allows fluctuations in both energy and the number of particles in the allocated volume, is applicable to the model under consideration.

Since the set of prime numbers is countable, instead of natural numbers, one can use the infinite sequence of prime numbers $p \mapsto e^{\beta E_p}$, numbering the energy levels - eigenvalues and their corresponding wave functions by prime numbers and ψ_p.

This means that the generating element p (its reciprocal) can arbitrarily appear/disappear on the main diagonal of the finite-dimensional matrix $\breve{D}(n)$ and its submatrix $\tilde{D}$. Each prime number p_i is a generating element for one of the cyclic components in the free part of the group 2.2, isomorphic to the infinite-dimensional statistical matrix. The entropy 3.4 is also subject to fluctuations, as a result of which the quality measure q of the triple exceeds one.

(In thermodynamics, one operates with the number of molecules, on the order of Avogadro's number/constant - the number of particles contained in one mole of any substance $6.022\dot{1}0^{23}$). Most known examples of finding triples of numbers using supercomputers and distributed computing networks, the so-called "good triples" [ABC23] with $q > 1$ exceeding one ($q(a,b,c) \sim 1.4$), but these are more sporting than scientific records, constitute about one ten-thousandth of Avogadro's number.

[ABC23]: ABChome (2023), *Volunteer network called ABC-home dedicated to distributed computing project*

In appendix 7.3 a formula for computing the average $\overline{f}$ using a complete set of mutually orthogonal normalized functions is given. A mixed state is a statistical ensemble of different pure states, each of which occurs with a certain probability. Such a state cannot be described by a single state vector. Instead, it

is described by a density matrix, which is a weighted sum of the density matrices of the pure states of the ensemble $\Delta\Gamma = n = (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k})$.

It is more appropriate to replace the word "quality" for $q(a,b,c)$ and the corresponding function $\breve{q}$ we defined with the generally accepted term in error theory, "defect," according to the formula of fluctuation from the mean value of the studied system, which unites the subsystems A, B, C. According to 6.1, the defect measure of the studied system satisfies the inequality $q_{ABC}\ \breve{q} < q_{ABC} = \frac{\Delta S}{S}$. Entropy, as an upper-bounding function, has a normal distribution. This follows from the law of large numbers, as well as the property of additivity of entropy.

The Law of Large Numbers states that the arithmetic mean of the results of a large number of trials tends to the theoretical mean (mathematical expectation).

For an isolated subsystem, the very question of fluctuations in energy, entropy, temperature, number of particles, and other thermodynamic parameters is not appropriate - one can speak of fluctuations only by considering the system as a whole. Let the equilibrium entropy of a body $S(E,V)$ be defined as a function of its (average) energy and volume. We will understand the fluctuation of entropy as the change in the function $S(E,V)$, considered formally as a function of the exact (fluctuating) values of energy and volume.

It is important to remember that statistical averaging is completely equivalent to time averaging:

$$\bar{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t), dt \tag{7.1}$$

The obtained value is equivalent to the definition of the mean value of the operator A, which coincides with the mean value of the observable A - see Chapter ζ-function 2.39, 2.38, as well as the properties of the operator $\hat{\rho}$ 3.2.

First, let us find the mean square of the fluctuation of the number of particles in an ordinary ideal gas located in a relatively small volume within the gas. Starting from the uniform distribution of gas molecules throughout the entire volume V_0 and the conditions that the subsystem under study is small compared to the entire system, $\frac{V}{V_0} \ll 1$, the square of the fluctuation of the number of particles in the subsystem (points in the manifold of phase space 1^n) is determined by the formulas [LL02] formula 113.1:

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

$$\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = N; \ldots \frac{(\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle)^{1/2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{7.2}$$

The relative fluctuation of the number of particles is equal to the inverse square root of the mean number of particles. - Compare with the formulas of probability theory and mathematical statistics [GZ05], [Hud70].

[GZ05]: Grigoriev et al. (2005), *Mathematics for students of secondary vocational education institutions*

[Hud70]: Hudson (1970), *Statistics for Physicists*

Based on the mean square of the number of particles in a given volume of gas, the Gaussian probability distribution of the fluctuation of the number of particles is found:

$$w(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} \exp\left(-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\bar{N}}\right) dN \tag{7.3}$$

For small values of N, it is convenient to use the Poisson formula, known from mathematical statistics.

$$w_n = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \tag{7.4}$$

In the case of interest to us (a selected volume) $V \ll V_0$ (original volume), the number of particles in the selected volume, although it may differ significantly from its mean value, is assumed to be small compared to the total number of particles in the gas. Taking into account Stirling's formula $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, formula (7.3) transforms into formula (7.4) for small deviations. It is known that the probability of a fluctuation in a system is proportional to the exponential of the entropy deviation:

$$w = e^{\Delta S} \tag{7.5}$$

Here, the entropy of the system as a whole is meant, see Appendix 8.

N and S are united by the property of additivity. Let us divide the original large volume into N small equivalent ones, provided that N is a sufficiently large number, but certainly much smaller than Avogadro's number and the number of molecules in the system. Then, instead of the mean number of particles in the formulas for estimating fluctuations, one can substitute the value of entropy S.

From the fundamental principles of thermodynamics

Let S_{Total} be the total entropy of the body together with the environment. If the body is in equilibrium with the environment, then S_{Total} is a function of their total energy E_{Total}. In the absence of equilibrium with the environment, the total entropy differs from the value $S_{\text{Total}}(E_{\text{Total}})$. The minimum work R_{min} from an external source is required to bring the body from a state of equilibrium with the environment to a new state of equilibrium with the en-

vironment. The deviation of entropy can be expressed as a smooth increasing function of the minimum work with a minus sign. From the basic equations of thermodynamics, it is known that the derivative $\frac{dS_{\text{Total}}}{dE_{\text{Total}}} = \frac{1}{T_0}$ is the equilibrium temperature of the system. As a result, we have:

$$\Delta S_{total} = -\frac{R_{min}}{T_0} = -\frac{\Delta E - T_0 \Delta S + P_0 \Delta V}{T_0} \tag{7.6}$$

Omitting intermediate calculations with thermodynamic variables, we finally arrive at the expression for the probability of transition from one state to another due to a fluctuation

$$w = \text{Const} \cdot \exp\left[\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P^2 - \frac{1}{2C_p}(\Delta S)^2\right] \tag{7.7}$$

From which follows the statistical independence of pressure P and entropy S fluctuations. The quantity of interest to us, the entropy fluctuation, is determined by the formula:

$$\left\langle (\Delta S)^2 \right\rangle)^{1/2} = C_P N \tag{7.8}$$

where C_P is the heat capacity of the gas (mixture) at constant pressure, N is the number of particles. This quantity is constant for an ideal gas/mixture and is proportional to the number of particles in the subsystem under study.

In statistical physics, entropy is often considered as a deterministic quantity defined through the probability distribution of microstates. However, with a more rigorous approach, one can and should speak of the mathematical expectation and variance of entropy as a random variable. Previous discussions focused on the physical meaning of fluctuations and their connection to thermodynamic potentials, which sometimes led to neglecting the formal apparatus.

Let us correct this omission and consider the issue systematically. Variance Var and σ - in focus?

Remark 7.1 Remember the connection between the definitions of variance and standard deviation $Var[X] = \sigma[X]$.

1. **The emphasis is on the relative fluctuations of extensive quantities.** In the thermodynamics of large systems ($N \gg 1$), the key result is that the relative

fluctuations of extensive quantities (energy, number of particles) decrease as $\sim 1/\sqrt{N}$. For a macroscopic system ($N \sim 10^{23}$ is the Avogadro number), they are negligibly small. Therefore, the main interest is shifting to the averages (mathematical expectations) that determine thermodynamics. Entropy in this context is a logarithmic measure (Gibbs-Shannon entropy), not a random variable.

2. **Entropy as a distribution functional.** Most often, when talking about the entropy of a system in a state of equilibrium, they mean a definition from statistical physics 3.1 or von Neumann entropy 12. In the latter case $w_i = \dfrac{1}{p_i}$ these are fixed probabilities from the Gibbs distribution, not a random variable, but a deterministic characteristic of the entire ensemble.

Objectivity of entropy fluctuations

As soon as we consider only one specific microstate i, we can define random value of microstate entropy (or 'information content"):

$$s_i = -\ln w_i.$$

Its mathematical expectation is precisely the Gibbs-Shannon entropy:

$$\langle s \rangle = -\sum_i w_i \ln w_i = S.$$

Now let's make a strict calculation.

Calculation of mathematical expectation, Var and σ for s_i

From the Gibbs distribution:

$$w_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i},$$

(where $\beta = 1/T$ in energy units), define a random variable:

$$\xi = s_i = -\ln w_i = \beta E_i + \ln Z.$$

1. Mathematical expectation by virtue of the definition of 3.1:

$$\langle \xi \rangle = \langle -\ln w_i \rangle = -\sum_i w_i \ln w_i = S$$

Using an expression in terms of energy:

$$\langle \xi \rangle = \beta \langle E \rangle + \ln Z$$

This is a well-known thermodynamic identity from 8.2, because $\ln Z = -\beta F$, where F is free energy, and $S = \beta(\langle E \rangle - F)$.

2. Variance

$$Var[\xi] = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2.$$

Since $\xi = \beta E_i + \ln Z$, and $\ln Z$ is a constant, then

$$\xi - \langle \xi \rangle = \beta(E_i - \langle E \rangle).$$

Therefore, the energy dispersion $Var[E]$ is:

$$Var[\xi] = \langle [\beta(E_i - \langle E \rangle)]^2 \rangle = \beta^2 \langle (E_i - \langle E \rangle)^2 \rangle = \beta^2 \, \sigma^2[E],$$

3. Standard deviation (RMS)

$$\sigma_\xi = \sqrt{\sigma^2[\xi]} = \beta \, \sigma_E,$$

where $\sigma_E = \sqrt{\sigma^2[E]}$ is the energy ratio.

The key physical interpretation

This is the main result that gives meaning to the calculations.:

- The variance of random entropy s_i is directly proportional to the energy dispersion.
- Proportionality coefficient — $\beta^2 = 1/T^2$.

In physics $Var[E]$ is related to the heat capacity at constant volume C_V:

$$Var[E] = T^2 \, C_V \quad (\text{in units} k_B = 1).$$

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

But based on thermodynamic relations and statistical independence of fluctuations [LL02] $\langle \Delta S \Delta P \rangle$ we have:

$$Var[\xi] = \beta^2 (T^2 C_V) = C_P,$$

Where C_P is the specific heat at constant pressure. Therefore:

$$\sigma_\xi = \sqrt{C_P}. \tag{7.9}$$

Conclusion: Fluctuations in the value $s_i = -\ln w_i$ are directly determined by the heat capacity of the system C_V, which is a measure of the stability of the system in relation to external influences.

Why is this result not always emphasized?

1. s_i — not the entropy that is usually measured. In experiment and in phenomenological thermodynamics, one deals with the *average* entropy S, which behaves like a deterministic thermodynamic function. The fluctuations of s_i are 'hidden" at the micro level.
2. **Semantic emphasis.** In the context of fluctuation theorems (for example, Yarzinsky's theorem), it is the difference of the total changed entropy in an irreversible process that is important, and more complex constructions than simple variance appear there.

Jarzynski's equality theorem This is the result of nonequilibrium statistical mechanics, linking the work performed on a system in a nonequilibrium process with the free energy F. Even if the system is quickly (nonadiabatically) out of equilibrium, the average exponent of the work performed is equal to the exponent of the change in free energy.

Corollary 7.1 (The mathematical expectation is equal to the thermodynamic S) *For a random variable $s_i = -\ln w_i$, the mathematical expectation (equal to the thermodynamic entropy of S), variance, and COEX can and should be considered.*

Short conclusion:

$$\sigma_{(-\ln w)} = \sqrt{C_P}$$

Thus, fluctuations in the information content of the state $(-\ln w_i)$ are a measure of the 'rigidity" of the system, characterized by its heat capacity.

For an ideal gas, the relative fluctuation of entropy can be expressed in terms of entropy itself. From the overall result 7.9 for an ideal gas $\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle} \sim \sqrt{N}$ and $S \sim N$. Thus, the relative fluctuation of entropy is inversely proportional to the square root of the entropy itself.:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} \sim \frac{1}{\sqrt{S}}. \tag{7.10}$$

Physical interpretation

This result has a deep physical meaning.:

1. Magnitude of quantities: Since both the entropy S and the square of its fluctuation $\langle(\Delta S)^2\rangle$ are extensive quantities (proportional to the size of the system), their ratio behaves like:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} \sim \frac{\sqrt{V}}{V} = V^{-1/2} \sim S^{-1/2}.$$

2. Versatility: This behavior is typical for all additive thermodynamic quantities — their relative fluctuations decrease as $\frac{1}{\sqrt{S}}$ with increasing system size.

3. Statistical basis: This result follows from the central limit theorem — when summing a large number of statistically independent contributions, the relative fluctuation of the sum decreases as $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Mathematical value From the standpoint of pure mathematics, this means that:

- Entropy becomes a ‘more defined" value as the sample size increases;
- Relative error (fluctuation) decreases as $\frac{1}{\sqrt{S}}$;
- In the limit $\lim_{S\to\infty} \frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} = 0$ fluctuations become negligible.

This is a fundamental property of statistical systems that confirms the consistency of microscopic and macroscopic descriptions.

Lemma 7.2 (Chebyshev’s inequality) *The probability that the deviation of a random variable X from its mathematical expectation in absolute value is less than the positive number ε is not less than $1 - D(X)/\varepsilon^2$:*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

[Gmu23]: Gmurman (2023), *Probability Theory and Mathematical Statistics*

The proof is given in [Gmu23], Chapter 9.3).

8 Chebyshev’s theorem

From this lemma, which often gives a rough trivial estimate, follows a very important theorem for the presentation of the material. We present the formulation and proof from the same source with a few comments.

Theorem 8.1 (Chebyshev's theorem) *If $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ are pairwise independent random variables, and their variances are uniformly limited (do not exceed a constant number C), then no matter how small the positive number ε is, the probability of inequality*

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \quad (8.1)$$

it will be as close to unity as you like if the number of random variables is large enough.

In other words, under the conditions of the theorem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (8.2)$$

Proof of Chebyshev's theorem. Let's introduce a new random variable into consideration — the arithmetic mean of random variables

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

A random variable in physics is understood as the observed 7.1, which here may mean the relative fluctuations of $\frac{\Delta\breve{q}}{\breve{q}}$ or the entropy of $\frac{\Delta S}{S}$, their dispersions, indeed, they are limited. As observations are made, statistics of the random variable X are accumulated.

Let's find the mathematical expectation $\bar{X}$. Using the properties of mathematical expectation (the constant multiplier can be taken as the sign of mathematical expectation, the mathematical expectation of the sum is equal to the sum of the mathematical expectations of the terms), we obtain

$$M\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n}. \quad (1)$$

Applying Chebyshev's inequality to the value $\bar{X}$, we have

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-M\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right|<\varepsilon\right) \geq 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}, \quad (8.3)$$

or, considering the ratio (1),

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1. \quad (8.4)$$

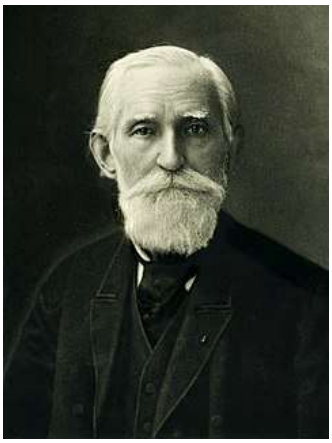


Figure 8.6: Paphnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894) was a Russian mathematician and mechanic, the founder of the St. Petersburg Mathematical School, an academician of the St. Petersburg Academy of Sciences and 24 other academies of the world. Chebyshev obtained fundamental results in number theory

Using the properties of variance (the constant factor can be taken as the sign of variance by squaring it; the variance of the sum of independent random variables is equal to the sum of the variances of the terms), we obtain

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2}.$$

By the condition, the variances of all random variables are limited to a constant number C, i.e., there are inequalities: $D(X_1) \leq C; D(X_2) \leq C; \ldots; D(X_n) \leq C$, so

$$\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2} \leq \frac{C+C+\cdots+C}{n^2} = \frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}. \quad (8.5)$$

Consequently,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) \leq \frac{C}{n}.$$

.

Substituting the right side of the last inequality into inequality (2) (which is why the latter can only be strengthened), we

have

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \cdots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \quad (8.6)$$

From here, moving to the limit at $n \to \infty$, we get

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1. \quad (8.7)$$

Finally, given that the probability cannot exceed one, we can finally write

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (8.8)$$

The theorem has been proved. □

Chebyshev's theorem, like all mathematical statistics, is based on statistical physics and principles of symmetry. The theory has been confirmed by numerous experiments in various fields of science, i.e. it has been verified.

The considered model of the triple of numbers must obey the same physical laws. Only those models that can be verified are of scientific value, in this case through experience and observation procedures.

Corollary 8.2 *The set of integer triples (a, b, c) is countable and partially ordered by c set 2.1, we denote its nth element $(a, b, c)_n$ For $\forall(a, b, c)_n \exists$ functions of the quality index (defect) of the triple q_n and the relative fluctuation of entropy $\frac{\Delta S_n}{S} = q_{ABCn}$. Due to the evaluation of 6 of the triple defect $q < q_{ABCn}$. Applying Chebyshev's theorem to a random variable $X_n = q_{ABCn} \to q_{ABCn}$, we obtain the limit 8.2.*

Chebyshev derived the following generalization of the theorem he proved: "in the presence of a sufficiently large number of independent random variables with limited variances, an event can be considered practically reliable, which means that

the deviation of the arithmetic mean of random variables from the arithmetic mean of their mathematical expectations will be arbitrarily small in the absolute value of the condition".

Does this mean 100% confidence in the absence of triples for which $q > 1$? The answer is no. The rationale can be derived from the Student's distribution, a key statistical tool for working with small samples and unknown variance, providing correct conclusions in conditions of increased uncertainty.

Proposition 8.3 (Student's distribution and deviation limits Δq) *The Student's distribution allows you to determine the value of the measured observed value and the confidence interval. Does this mean that with a sufficiently large sample outside the range, there are no random deviations of values?*

The Student's distribution was proposed by the English statistician William Gosset in 1908, who published relevant works under the pseudonym Student

The Student's distribution (t distribution) is a statistical probability distribution used in the analysis of small samples with unknown variance of the general population. The student's distribution and the construction of the confidence interval do not mean that there are no random deviations of values outside the interval, even with a large sample. The confidence interval provides a range of values in which, with a given probability (for example, 95% or 99%), the true value of a parameter of the general population (for example, a mathematical expectation) can be found. However, this does not exclude the possibility that individual observations or measurements may fall outside this range due to the random variability of the data.

The nature of the confidence interval: A confidence interval is an interval estimate of a parameter that is based on a random sampling error. It indicates the range of values where the true value of the parameter is found with a certain probability (confidence probability). In particular, a 95

The Student's distribution is used to build confidence intervals, especially for small samples (usually $n < 30$) and unknown variance of the general population. As the sample size increases, the Student's distribution approaches the normal distribution. However, even with large samples ($n > 30$), the confidence interval does not completely exclude the possibility of deviations beyond its limits.

Random deviations:

Random deviations are natural variations of data that are always present in measurements. Even with a very large sample, individual observations may accidentally fall outside the confidence interval due to natural variability. The confidence interval controls the probability that the parameter itself (for example, the average value) is in this range, and not that all observations will be in it.

Interpretation of the trust level:

The confidence level (for example, 99%) indicates the probability that the interval covers the true value of the parameter. He does not say that 99%of observations will fall within this range. So, for a normal distribution, about 5% of observations may be outside the interval corresponding to the 95% confidence probability. For comparison, we present the definition of the Cauchy limit.

Chebyshev's theorem and the Cauchy limit describe different aspects of mathematical analysis and statistics. Chebyshev's theorem limits the probability of random deviations, and the Cauchy limit characterizes the asymptotic behavior of functions or sequences. Both concepts do not exclude the presence of deviations, but in different contexts and with different interpretations.

Definition 8.1 (Definition of the Cauchy limit) *According to the definition of the Cauchy limit*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$
$$\forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon. \quad (8.9)$$

In other words, starting from a certain number $N(\varepsilon)$, all members of the sequence $x_n \in (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$.

Central limit theorem

It is known that normally distributed random variables are widespread in practice. What is the reason for this? The answer to this question was given by the outstanding Russian mathematician A.M. Lyapunov (the central limit theorem): if a random variable X is the sum of a very large number of mutually independent random variables, the influence of each of which on the entire sum is negligible, then X has a distribution close to normal. [Gmu23]

[Gmu23]: Gmurman (2023), *Probability Theory and Mathematical Statistics*

By virtue of Chebyshev's theorem, Lyapunov's central limit theorem and the additivity property of entropy, it is possible to apply a Gaussian probability distribution (7.2 -7.4) for entropy fluctuations and the maximum value of the function q_{ABC} denoted as $\Delta q_{ABC_{max}}$.

[Pra76]: Prahar (1976), *Distribution of Prime Numbers*

The question of the density of the distribution of prime numbers remains open in science [Pra76]. At the same time, it is possible to introduce a random function q_{ABC} (majorant), obeying the law of normal distribution, which will limit the previously defined 6 is a continuous and differentiable function $\breve{q}(a,b,c)$ from above for sufficiently large entropy values. Let's make estimates of the standard deviation of q_{ABC} for the system as a whole, combining subsystems. It was said above 6.2, that $\exists$ the gradient of a continuous and differentiable function $grad(\breve{q})$ on the entire definition area of $\breve{q} : M \longrightarrow R$. This gradient does not go to infinity, and the increment $\Delta\breve{q}$ can be limited from above by a normally distributed random function q_{ABC} - see 6.1.

[A.M. Lyapunov]Alexander Mikhailovich Lyapunov (1957-1918) was a Russian mathematician and mechanic. The founder of the theory of stability of equilibrium and motion of mechanical systems with a finite number of parameters.

To estimate the upper bound of the maximum deviation $\Delta q_{ABC_{max}}$, we can take into account the discrete nature of the phase space and the principle of equal probability of microstates.

Remark 8.1 The maximum deviation of $\Delta q_{ABC_{max}}$ corresponds to the smallest value of the probability distribution function ω_{min} of the normal curve.

In turn, the probability of such a microstate is defined as the inverse of L, the number of quantum states of the system under study. From the normal Gaussian distribution we have:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{\Delta q_{ABC}{}^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8.10}$$

Solving the equation (8.10) and assuming that the expression under the root sign is positive, we find:

$$\Delta q_{ABC_{max}} = \sigma\sqrt{2\ln\frac{L}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \tag{8.11}$$

The result of algebraic transformations is ultimately cumbersome, but it is possible to make an estimate sufficient to prove the ABC hypothesis. A few paragraphs below, a numerical Monte Carlo integrator experiment will be performed and a histogram of the normal distribution is shown.

[Gmu23]: Gmurman (2023), *Probability Theory and Mathematical Statistics*

In general, for a normal distribution, the probability distribution density is determined by the formula [Gmu23]:

$$\left|\Delta q_{ABC_{max}} < \epsilon\right| \leq 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \ldots \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{8.12}$$

Based on the number of quantum levels equal to L and the value of σ7.9, let's find the relation starting from which the phase space discreteness factor appears:

$$1 \geq \frac{L\sqrt{\text{Rad}(abc)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta q^2_{ABC_{\max}}}{2\sigma^2}\right) \tag{8.13}$$

This inequality determines the conditions under which the discreteness factor appears (see equation 8.10). A rapidly decreasing function $\exp\left(-\frac{\Delta q^2_{ABC}}{2\sigma^2}\right)$ easily makes the result of the product of the multipliers $L\sqrt{\text{Rad}(abc)}$ is less than one. However, the number of microstates should be an integer, not a fraction. You can imagine it in another way $w_{min} = \frac{1}{L}$, and the entropy of S reaches a maximum, corresponding to the maximum uncertainty of the system. For a system of dimension L, the maximum is $S = \ln(L)$. This is achieved when the system is completely random, and its density matrix: $\hat{\rho} = \frac{1}{L}E$ is proportional to the identity matrix, see the example in Appendix. 12. The value $\frac{1}{L}$ will be located on the main diagonal of the density matrix. This gives rise to a critical value, the one on the left in the 8.13 inequality, in which ∄ triples (a, b, c).

The number of microstates should be an integer, not a fraction

The effect of the discreteness of quantum states on entropy fluctuations

The discreteness of quantum states and the finiteness of the phase space lead to important consequences for entropy fluctuations. Let's consider these consequences systematically.

1. Key physical prerequisites

1. **The final volume and energy.** In a finite system with a given maximum energy, $E_{\max}$ is the number of available quantum states **finite**. Let's denote it by L. This follows from the discreteness of the spectrum and the limited phase volume of the cell $(2\pi\hbar)^l$, where l is the number of degrees of freedom.
2. **Canonical distribution.** The probabilities of states are given by the Gibbs distribution:

$$w_i = Z^{-1}e^{-\beta E_i}, \quad i = 1, \ldots, L,$$

where $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ is the statistical sum, $\beta = 1/T$. All $w_i > 0$, since the exponent does not vanish.

2. Random variable discreteness $s_i = -\ln p_i$

Since the number of states L is finite, the random variable s_i accepts **a finite number of values** (possibly with degeneracies). Therefore, its distribution has **final carrier**:

- Minimum value: $s_{\min} = -\ln(w_{\max})$, where $w_{\max} = \max_i w_i$
- Maximum value: $s_{\max} = -\ln(w_{\min})$, where $w_{\min} = \min_i w_i$

The relative deviation $\Delta S/S = (s_i - S)/S$ also takes a finite number of values in the range:

$$\left[\frac{s_{\min} - S}{S}, \frac{s_{\max} - S}{S}\right].$$

3. Turning probability to zero

For deviations outside the specified range, the probability of w_i is exactly zero.

Moreover, within the interval, the probability may be zero for some values of $\Delta S/S$ if no state gives exactly such a deviation. However, this is a discrete set of zero measure. Thus, in In a finite system, the probability distribution for $\Delta S/S$ is discrete with a finite support, and there is a **threshold deviation** beyond which the probability is strictly zero.

4. Thermodynamic limit and its features In the limit of $N \to \infty$ at a fixed density:

1. The number of states L grows exponentially with N: $L \sim e^{aL}$.
2. Minimum probability $w_{\min} \sim e^{-bN}$ (in typical cases, $b \sim \beta\varepsilon_{\max}$, where $\varepsilon_{\max}$ is the specific maximum energy).
3. Then $s_{\max} \sim bn$, and $S \sim N$, therefore:

$$\frac{\Delta S_{\max}}{S} \sim \text{const}.$$

That is, **the maximum relative deviation tends to a constant**, and not to infinity.

However, the distribution becomes **dense** in the range $[-1, \text{const}]$ (relative downward deviations are limited to -1, since $s_{\min} \geq 0$, so $(s_{\min} - S)/S \geq -1$).

Remark 8.2 (Is the spectrum limited?) In systems with an unlimited spectrum (for example, an ideal gas in an infinite volume), formally L is infinite even for a finite N. For any finite N and finite volume, the spectrum is discrete and unlimited; the number of states with energy below any finite limit is finite, but the total number of states (taking into account arbitrarily high energies) is countably infinite.

In the canonical distribution, w_i decreases exponentially with E_i, but all $w_i > 0$. Then $s_{\max}$ is not formally limited, since $\inf w_i = 0$, but there is no 'most unlikely" state — for any $\epsilon > 0$ there is a state with $w_i < \epsilon$. Therefore, the maximum deviation is not formally limited, although the probability of such large deviations is exponentially small. This is a significant difference between finite systems with limited spectrum and systems with unlimited spectrum.

5. The microcanonical ensemble is a special case

For an isolated system with a fixed energy E (microcanonical ensemble), all available states are equally probable: $p_i = 1/\Delta\Gamma(E)$, where $\Delta\Gamma(E)$ is the number of states with energy E. Then:

- $s_i = -\ln(1/\Delta\Gamma(E)) = \ln \Delta\Gamma(E) = S$ for all i
- There are no fluctuations: $Pr(\Delta S/S = 0) = 1$, short for $(Pr)obability$ - probability.

In this case, the distribution is degenerate to a point, and the probability of any non-zero deviations is strictly zero.

Corollary 8.4 1. ***For finite systems with a limited spectrum*** *(finite number of states M):*

- *The distribution $\Delta S/S$ is discrete and has a finite carrier.*
- *There is a threshold value $|\Delta S/S|_{max}$, 8.13 beyond which the probability of* ***is exactly zero****.*

2. ***For systems with unlimited spectrum*** *(even in finite volume):*

- *Theoretically, arbitrarily large deviations of $\Delta S/S$*

are possible, but with exponentially decreasing probability. In practice, relative fluctuations of the order of 1 have a vanishingly low probability for macroscopic systems.

3. ***In the thermodynamic limit*** *($N \to \infty$) for systems with limited specific energy:*
   - *Relative fluctuations $\Delta S/S$ tend to zero according to the law $1/\sqrt{N}$.*
   - *The maximum relative deviation may tend to be constant, but the probability of such deviations is exponentially small $\sim e^{-N}$.*

Remark 8.3 The discreteness of quantum states means that for finite systems, the entropy distribution has a finite carrier, and fluctuations are impossible beyond certain boundaries. This is an important difference from the classical approach, where the phase space is continuous and arbitrarily large deviations are formally possible (although with vanishing probability).

The system as a whole was considered

It is important to remember that in the above estimates: a) entropy fluctuations were "considered" for the system as a whole, in a state corresponding to probability w_i, and not for a single particle; b) the formula $\frac{\Delta S}{S} = 0$ is an abbreviated version of the expression $\frac{\sqrt{\langle(\Delta S)^2\rangle}}{S} = 0$.

Explanation:

- Value $\xi = s_i = -\ln w_i$ — this is exactly s_{system} for the microstate i of the entire system.
- Energy E_i — the total energy of the system, not the energy of a single particle.
- Variance $Var[\xi] = \beta^2 Var[E]$ already includes the contribution of all N particles, since $Var[E] \sim N$.

Thus, additional multiplication by N is not required — the factor N is already contained in $Var[E]$ and, accordingly, in the heat capacity C_P.

As statistical data accumulates, as the standard deviation estimate shows 7.9 and Chebyshev's theorem 8.1, the frequency of occurrence of the desired triples decreases to zero

stepwise 9.8.

Corollary 8.5 (A finite number of defective triples) *It follows from the above that for a* $\forall$ *pre-defined* ϵ*, there are only a finite number of triples of numbers for which* $q(a,b,c) = \breve{q} < q_{ABC_{max}} + \epsilon$*. This phenomenon is explained by the discreteness of the phase space.* $\nexists\, q(a,b,c) = \breve{q} > q_{ABC_{max}}$.

The arbitrary parameter ϵ should not be confused with the energy of a single molecule, denoted by the same letter above!

9 ABC@home project and discreteness factor of the phase space

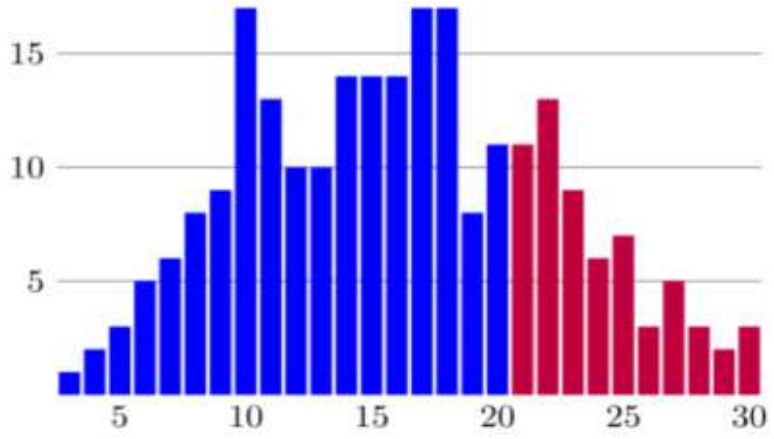


Figure 9.7: The ABC@home project finds all triples of ABC numbers for a given upper bound of the "quality" of $q(a,b,c)$ and the number of decimal digits.

You can compare these simple estimates with the ABC@home project. Below is a histogram of the quality of q triples from the number of decimal digits in ABC numbers.

The ABC@home project says: The list of so-called good triples, consisting of 20 digits, has already been completed. For example, the graph shows that there are 11 good triples in which c contains 20 digits. When new good threes are discovered, only the red part on the graph above will increase. (already 20 decimal places).

ABC@home Volunteer Network

A volunteer network called ABC@home is dedicated to a distributed computing project to find the so-called "good" triples (unbitten triples). In 2011, the ABC@home project achieved the goal of compiling a complete list of all ABC triples consisting of integers consisting of a maximum of

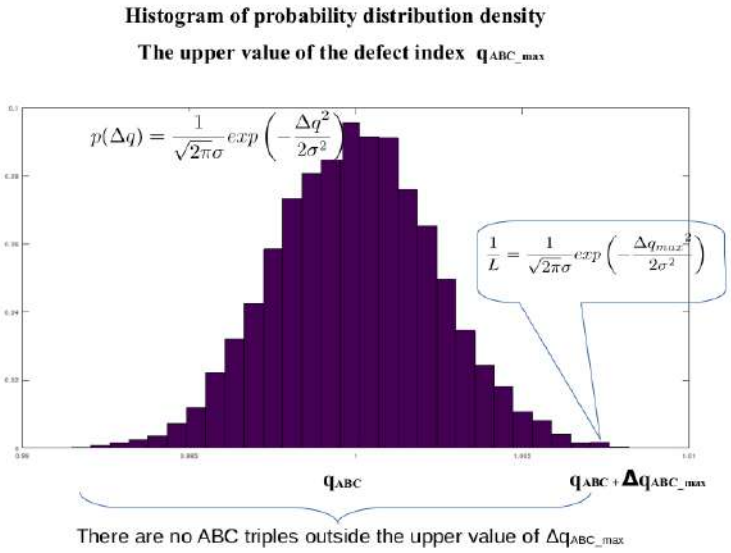


Figure 9.8: This histogram illustrates the discrete nature of the phase space for the three numbers ABC under study. In the case of $q(a,b,c) > q_{ABC_{max}}$, there is not a single triple satisfying the ABC hypothesis.

18 digits. The list includes 14,482,065 triples. See 241 ABC triples of "quality" q not lower than 1.4, which are often called "good" ABC triples. https://www.math.leidenuniv.nl/desmit/abc/index.php according to comp. as of 05/11/2024

[ABC23]: ABChome (2023), *Volunteer network called ABC-home dedicated to distributed computing project*

In fact, the [ABC23] Project applies a logarithmic scale to the normal distribution $q_{ABC_{max}} = 1 + \Delta q_{ABC_{max}}$ and then a quantitative method for grouping a set of ranked data into equal subgroups, in this case deciles), but the characteristic form of the normal distribution (see the chapter The Riemann hypothesis, the Maxwell distribution (2.25) and Fig. 9.8 has not changed from this.

Monte Carlo integrator and normal distribution histogram

```
###### historgam.m ######
# Here 100,000 is the size of a random
sample. This parameter is passed
# in the function. mcintgrv (Monte-Carlo
#Integral Vector)

for i=1:10000
s(i) = 0.5 * mcintgrv("sin", 0, pi, 100000);
endfor
# A histogram is being constructed, with 30
#intervals.
```

```
hist(s, 30, 1)

## End of file historgam.m

###### mcintgrv.m ######
#
# function I = mcintgrv(fun, a, b, mcloops)
#
function I = mcintgrv(fun, a, b, mcloops)

# The following information can be passed to
# this function any other function by
# reference. The main thing is that it should
# be continuous. Assumed positive values
# in the interval [a,b]

# Find the maximum value
of x = linspace(a,b);
f = feval(fun,x);
maxf = max(f);

# Generating random arrays of "raindrops"
r1 = rand(mcloops,1);
r2 = rand(mcloops,1);

# We get an array of random values of x and y
# for raindrops (x,y) falling
# per rectangle [a,b] x maxf
l = b - a;
x = a + l.*r1;
y = maxf.*r2;
fx = feval(fun, x);

# Counting the number of points lying
under the graph, counter fx = fever(fun, x)
# We find the integral
I = counter/mcloops*maxf*l;
endfunction

### End of the mcintgrv.m
```

The code above is [Han11] for the vectorized "mcintgrv" (Monte Carlo Integral Vector) function, which is called with arguments.

[Han11]: Hansen (2011), *GNU Octave Beginner's Guide*

This code is based on GnuOctave (equivalent to MathCad) under the GNU GPL license. It consists of two files historgam.m and mcintgrv.m The first code allows you to build a histogram of the probability density distribution for a randomly generated sample from a dataset of 100,000 integral values.

The *mcintgrv* file calculates the integral using the Monte Carlo method. It works for an arbitrary function that is positive over a given range of values and consists in calculating the proportion of evenly falling "raindrops" (or spray-sprayed paint) that settle under the curve, in comparison with the total number of drops (paint) per rectangle constructed on the range of values of the function along the abscissa axis and from zero to the maximum of the function along the ordinate axis $[a, b] \times maxf$. Based on the uniform distribution of random points (x, y), the fraction found in this way it will be equal to the ratio of the area under the curve — the desired integral to the elementary calculated area of the rectangle. The Monte Carlo method is particularly effective for numerical integration in n-dimensional space.

The code is easy to understand. Special attention should be paid to performing a comparison between the value of the function and the value of the ordinate y of a random point. The result of this comparison operation is a logical array that returns the indexes of all true elements in the array. By extracting the number of indexes, it is simple to count the number of randomly generated pairs of values (x, y) that are located under the graph of the function.

Try running this code in GnuOctave or its analogues, change the sample size from 100,000 to 10,000, 1000, 100, and vary the number of intervals in the hypogram. These numerical experiments will allow us to directly test how the standard deviation of σ of a random variable relative to its mathematical expectation depends on the sample size.

Remark 9.1 (Stepwise break) The histogram obtained by modeling illustrates the discreteness factor of the phase space: instead of a smooth decrease in the tails of the histogram on the left and right, we have a stepwise break.

On the author's laptop, the vectorized version of the Monte Carlo integrator performs about 300 times faster than the conventional numerical integration method. Using vectorized programming, you can also avoid a lot of loops that perform trivial tasks and clutter the code. Vectorized code is much easier to understand and debug.

It is easy to show that this conclusion is equivalent to another representation of the defect $q(a, b, c) < K(\varepsilon)rad(A, B, C)^{1+\varepsilon}$ where $K(\epsilon)$ is a certain constant that depends only on ϵ.

Instead of using supercomputers and distributed computing resources, it is easy to create a sample of a normal distribution of one hundred to one hundred thousand units and get a more meaningful result in half a second or thirty seconds using the GnuOctave cross-platform application (an analog of MathLab under the GnuGPL license), even if not on a new desktop computer. - There is a saving of intellectual and energy resources.

10 From the perspective of school thermodynamics

For simplicity, let's consider a closed system as a whole. (i.e. isolated from other systems, for example, placed in a thermostat), where $\Delta\Gamma_1$, $\Delta\Gamma_2$, $\Delta\Gamma_3 \ldots$ are defined — the statistical weights of its various subsystems. If each of the subsystems can be in one of the $\Delta\Gamma_\alpha$ states, then the differentials of the statistical weights of the subsystems are multiplied, and the entropies of the subsystems add up, as illustrated by the expressions 2.36. Formula (3.1) is suitable for expressing the law of conservation of entropy of a subsystem during separation of variables and adiabatic processes that are rather slow compared to the relaxation time / establishment of local equilibrium. In practice, this time in laboratory conditions proceeds quickly and is comparable to the propagation time of a sound wave in a vessel with gas (330 meters per second at normal atmospheric pressure and a temperature of 20 degrees Celsius for air - hundreds of meters per second, depending on the parameters of the gas or mixture).

Speaking about the exponent in the Gibbs distribution formulas (8), we note that the well-known formulas for the distribution of the probability density of finding particles are expressed in terms of an exponent: as, for example, in the [LAL69] studied in physics and mathematics schools Boltzmann distribution $n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$, so-called barometric formula - and Maxwell distribution [Kar76] 2.25. Both formulas give an idea of statistical ensemble, which should be considered in more detail. See appendix 14 for the canonical Gibbs distribution 8 For a mixture of ideal gases, the formulas given in this distribution remain valid, only instead of N, the number of

In most formulas here, the temperature T is set in energy units and the Boltzmann constant k_B) is lowered, as is customary in the traditions of theoretical physics $k_B T \to T$1 electron volt = 11606 degrees. Similarly, the Boltzmann constant is omitted in formulas for expressing entropy S

[LAL69]: Landau et al. (1969), *Course of General Physics. Mechanics and Molecular Physics*

[Kar76]: Kartsev (1976), *Maxwell*

molecules of the corresponding gas is substituted. The following thermodynamic variables have additive properties for a mixture of gases: the number of molecules, energy, entropy, partial pressure of each gas, thermodynamic potential, and a number of others. In this case, the volume and temperature according to the rules of thermodynamics are the same for all molecules of each gas in the mixture. Note that due to the lack of interaction between the molecules, the entropy values are summed up and, accordingly, the statistical weights of the corresponding gases are multiplied.

It is easy to trace the analogy of the formula (3.6) with the logarithm of the canonical and grand canonical Gibbs distribution formulas for a mixture of ideal gases 9.6, an understandable language for students of 2-3 courses of physics and mathematics or technical universities. It is recommended that high school students familiarize themselves with the help of a teacher. It is possible to summarize over all states of energy levels, rather than molecules. This technique is used above in the Maxwell distribution 2.25. The state of the energy levels is determined by the quantum atomic parameters of the molecule, studied in chemistry lessons at school.

This confidence is supported by a formula modeling statistical weight and entropy (3.1). Pairs of works in (9.6) $\mu_i N_i$ are entered symmetrically under the sum sign. In this formula, it is possible to summarize over all states of energy levels, rather than molecules. The state of the energy levels is determined by the quantum atomic parameters of the molecule, studied in chemistry lessons at school.

The ABC hypothesis uses the concept of "the quality of a triple of numbers" based on the natural logarithm. (Let's assume a transition to the natural logarithm by simultaneously dividing the numerator and denominator ln10).

The natural logarithm of $ln(x)$ is implied in the basic formulas of number theory and is written simply as $log(x)$.

The radical of the product of the numbers $Rad(abc)$ In particular, we can compare a mixture of ideal gases with non-degenerate energy levels, which is achieved at a sufficiently low temperature when only translational degrees of freedom and rotational degrees of freedom are activated for polyatomic molecules. Taking into account the above, this will mean the first power of the primes of the formula (3.6).

Due to Clapeyron equations $PV = RT$ it is possible to control temperature, gas pressure by adjusting the initial tempera-

ture, the number of molecules of the mixture (concentration) and the volume of the subsystem.

Figure 10.9: Ludwig Boltzmann 1844- 1906 was an outstanding theoretical physicist, co-founder of statistical mechanics. Explained the second beginning of thermodynamics, made a significant contribution to the kinetic theory of gases.

Thermodynamic relations are used to easily calculate the energy of gas molecules and entropy, and hence the volume of the phase space $\Delta\Gamma_i = exp(S(E_i))$. Next, you can select $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \Delta\Gamma_3 \ldots$ — the statistical weights of gases 1, 2, 3 in the mixture are respectively equal to the prime numbers of the formula (3.6) to the first degree, to the radical $Rad(abc)$. We denote this value of the volume of the phase space by $\Delta\Gamma_0$, and the corresponding entropy by 3.1 where, in the denominator of this fraction, it is necessary, by definition of entropy, to average the values of the logarithms of the values along the diagonal of the statistical matrix, and the length of this diagonal or the total number of elements (the number of energy levels, taking into account the multiple repetition of eigenvalues on the main diagonal) L is calculated from the formula 3.6 and is equal to the total number of prime factors in the ABC hypothesis. If each of the subsystems can be in one of the Γ_α quantum states, then the phase volumes of the subsystems are multiplied, and the entropies of the subsystems add up.

During adiabatic compression, the basic equation of thermodynamics will take the form the internal energy of the gas decreases (increases) just by the amount of work done by the gas (on the gas). According to the formula of the first law of thermodynamics, $dQ = dE + PdV$, where dQ is the amount of heat, P is the gas pressure, and dV is a small increment in volume, the multiplier of PdV is equal to the work performed. With the adiabatic process $dQ = 0$, there is no heat exchange, there are no dissipative processes, and therefore all subsystem changes remain reversible and $dE = -PdV$.

It is known from the school course of thermodynamics that in an adiabatic process, the ratio between pressure and volume / temperature and volume, respectively, takes the form

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= const \\ TV^{\gamma-1} &= const \end{aligned} \tag{10.1}$$

where $\gamma > 1$ is the quotient of dividing the heat capacity at constant pressure by the heat capacity at constant gas volume $\frac{C_P}{C_V}$. During adiabatic compression, the entropy of

the system remains constant, but degenerate energy levels ϵ_k (specific energy per gas molecule) are "turned on" due to an increase in temperature.

This is accompanied by the appearance of powers over one in the formula (3.6). Let's denote this statistical state of the system with the letter $\tilde{D}$, symbolizing the appearance of degenerate energy levels, and the entropy, respectively, is $S_{\tilde{D}}$.

11 Analogies from SLDE systems

It is interesting to make some analogies of the quantum mechanical approach described in Appendix 7 with Systems of linear differential equations (SLDE). Let's assume the Hamiltonian (recall that this is an analog of the kinetic energy theorem studied in school, but in generalized coordinates) The H of the system under study is clearly independent of time, then in the Heisenberg representation, the equation is used to describe this simple case:

$$i\hbar\dot{\psi} = \widehat{H}\psi \tag{11.1}$$

[Zel02]: Zelevinsky (2002), *Quantum Physics Lectures*

[Fer00]: Fermi (2000), *Lectures on Quantum Mechanics*

The unitary finite time shift operator is defined by the formula [Zel02], [Fer00]:

$$\widehat{U}(t) = e^{i\widehat{H}/\hbar} \tag{11.2}$$

The $\widehat{U}(t)$ transformation translates the vector $\psi(0)$ to $\psi(t)$ as follows:

$$\psi(t) = \widehat{U}(t)\psi(t_0)$$
$$\psi(t_0) = \widehat{U}^{-1}(t)\psi(t)\ldots\psi(t_0) = \widehat{U}^{+}(t)\psi(t) \tag{11.3}$$

Consider a system of linear differential equations expressed in matrix form:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\mathbf{y} \tag{11.4}$$

where $\widetilde{\mathfrak{D}}$ is a block diagonal linear mapping matrix, generally time-dependent t. By the conditions of the ABC hypothesis, all eigenvalues are non-zero => the matrix is non-degenerate, and all its eigenvalues are different $detD = \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_i$, the initial volume of the phase space $\Gamma_0 = Rad(abc)$. On the diagonals of the block diagonal matrix $\widetilde{\mathfrak{D}}$ there are elements, where k is the size of the Jordan cell, on the diagonals of the

matrix there is an analytical function (4.7) with a parameter that takes into account adiabatic changes in the system $\widetilde{\mathfrak{D}}$.

Consider fundamental matrix of the system of linear differential equations Y and Vronsky determinant $W = detY(t)$. According to Liouville-Ostrogradsky theorem[Mys72] [15, paragraph VIII (18)]:

[Mys72]: Myshkis (1972), *Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics*

$$W(t) = W(t_0)\, exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, D(\tau)d\tau$$
$$\cdots \prod_{1}^{n} \lambda_i = exp \int_{0}^{T} \mathrm{Tr}\, D(\tau)d\tau \quad (11.5)$$

At time t_1, the multiplicity of the roots increases, which physically corresponds to the degenerate energy levels of the system, but the trace of the matrix under the integral remains constant. A formula similar in meaning has been found for the determinant of the Polish philosopher and mathematician Vronsky, which is convenient for finding the derivative of a vector function in a system of linear differential equations of the form (11.4)).

The above mathematical formulas reveal the physical meaning of the phase space and the trace of the matrix in the theory of ordinary differential equations. The adiabatic process and the constancy of entropy play an important role. From this point of view, the formulas for finding the volume of the phase space and the entropy of the system have analogues in the theory of systems of linear differential equations, briefly expressed in matrix form.

We continue with a number of examples. Consider the fundamental matrix (i.e., consisting of linearly independent vectors of solutions (11.4 of a system for which a simple relation applies:

$$\begin{aligned} Y(t,0) &= \mathbf{I} \\ Y(t_1,t_2) &= Y(t_2,t_1)^{-1} \end{aligned} \quad (11.6)$$

Floquet proved in a famous theorem that for periodic systems with a period of T (in the sense of time, not temperature):

$$\mathbf{Y}(t,0) = \mathbf{\Phi}(t)\, exp(t\mathbf{M}) \quad (11.7)$$

The eigenvalues are called multipliers of the T-periodic system. Based on the above, in our case, all these multipliers modulo no more than one, see the second part of the formula

11.5). The last two formulas correspond to the unitary finite time shift operator (11.3). where $\mathbf{\Phi}(t)$ is a periodic function with a period of T.

There are other analogies of the phase space $W \rightarrow \Gamma$ and entropy $\mathrm{Tr}(D(\tau)) \rightarrow S$. Note that the matrices are infinite and reduced to Jordan form, the sigmoidal activation function in question turns on/off the multiplicity of the roots and provides a transformation of the matrix just mentioned.

The question arises, why not write down the above equations from the standpoint of analytical mechanics in the study of phase space and entropy or their analogues? In fact, it is almost impossible for a real physical object to strictly withstand the conditions of adiabatic isolation. An arbitrarily small violation of this condition means the occurrence of small random effects, with respect to which mechanical trajectories are unstable both in ordinary and in phase space. The consequence of instability in the physical system will be dynamic chaos, which leads to the phenomena of mixing and forgetting the initial conditions and actually means the transition to a statistical description. The complex issues of the ergodic hypothesis go far beyond the scope of the stated research.

Fermat's Last Theorem on the School Globe

Fermat's Last Theorem on the school Globe

9

1 Introduction

For nearly four centuries, the mathematical community has been engaged in the pursuit of a solution to Fermat's Last Theorem. A proof of more than a hundred pages has been developed by experts in number theory, but it is not feasible to provide a comprehensive summary here. Let us attempt to examine Fermat's theorem from the vantage point of physics and geometry. From these vantage points, Pierre de Fermat was able to identify a solution, the core tenets of which could be schematically represented in a relatively expansive margin of the book, as illustrated in multiple diagrams. However, the paradigms that have prevailed in mathematics for centuries have proved to be a significant impediment in finding a solution that is effective in the modern context. Those with a sceptical outlook continue to believe that Pierre de Fermat was most likely mistaken. However, the consistent application of the basic principles of physics, geometry and thought experiment encourages a different way of thinking. The story of the discovery of Fermat's theorem should be included in school and university training programmes. Indeed, the essence of the proof can be expressed in a single formula and a single drawing.

2 Discussed questions

Why are a ball and a cube homeomorphic? And what is homeomorphism? What role do isotropy, symmetry, homogeneity of space play in the search for mathematical proof? Why is there a fatal conflict between form and content in Fermat's Last Theorem? After discussing these questions, we will make generalisations and conclusions about the fundamental properties of our universe. Fermat's Last Theorem (FLT) was formulated by Pierre de Fermat in 1637, it states that the Diophantine equation is true:

$$a^n + b^n = c^n \tag{2.1}$$

1 Introduction 435
2 Discussed questions 435
3 Human mind vs Artificial Intelligence? . 437
4 Mental experiments 437
5 Objections 439
6 Symmetry. Isotropy and homogeneity of space. 439
7 Why do Pythagorean triples only ∃ on the 2D? 442
8 Continuity. Homeomorphism. Equivalence classes 446
9 An understanding of Set Theory. 446
10 Cardinality of Set and Equivalence function 447
11 Metric topology . . 448
12 Pairwise disjoint equivalence classes 450
13 Chain of n-cubes . . 451
14 Euclid's Axioms in XXI 456
15 A paradox 458
16 Proof in a single formula and drawing 461
17 The Leonard Euler hypothesis 465
18 Summing up 468
19 Conclusuion 469

has no solutions in whole numbers $\mathbb{Z}$, except for zero values, for $n > 2$. The case degree of two is known in the school course under the name Theorem Pythagoras. Euler in 1770 proved FLT for n=3, Dirichlet and Legendre in 1825 - for n = 5, Lame - for n = 7. In 1994 Prof. Princeton University Andrew Wiles [Wil95], [BG94] proved, for all n, but this proof, contains over one hundred and forty pages, understandable only to high qualified specialists in the field of number theory.

[Wil95]: Wiles (1995), «Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem»

[BG94]: Boston et al. (1994), «The World's Most Famous Math Problem (The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries) By Marilyn vos Savant»

[Hil00]: Hilbert (1900), «Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900»

The field of Diophantine equations encompasses both Fermat's Last Theorem and Pythagoras' theorem. At the II International Congress of Mathematicians in Paris in 1900, the German mathematician David Hilbert presented a list of 23 mathematical problems [Hil00], including the Tenth Problem, which can be expressed in a few words as follows: Let us define a Diophantine equation with arbitrary unknowns and integer rational numerical coefficients. We must then specify a method by which, after a finite number of operations, it is possible to determine whether this equation is solvable in integers or rational numbers.

170 years later, the Soviet mathematician Yuri Vladimirovich Matiyasevich proved that there is no general algorithm see also a popular publication in the magazine "Quantum", for some cases, can understand whether the Diophantine equation is solvable without resorting to calculations, relying on the methods of geometric algebra, symmetry, analogy and fundamental properties of multidimensional space, see [Avd22].

[Avd22]: Avdyev (2022), «The Diophantine Equation From the Eye Of Physicist»

FLT is formulated by Pierre de Fermat in the margins of the book Arithmetic of Diophantus of Alexandria (III NE). Pierre de Fermat wrote in the narrow margins of the book that he had found a truly wonderful proof, but the narrow margins did not allow him to present the proof in full. Subsequently, descendants slandered the French mathematician, and considered that he made a light judgment, in other words, bragged and lied. The basis for this statement was the canonized proof of Andrew Wiles, for more than a hundred pages, for which he was awarded the prestigious Abel Prize in 2016. Subsequently, Andrew Wiles became dean of the Mathematics department at Princeton University, part of the Ivy League. But the scientific search cannot be stopped even after the most prestigious awards have been handed out, and the disharmony between the short wording and the complex

proof of FLT only encourages audacious research. - Why not prove it easier? Truth is a process, not a finale.

3 Human mind vs Artificial Intelligence?

Are there short and simple ways to prove the Fermat's Last Theorem? To understand this is it necessary to waste one hundred or more pages and help of Artificial Intelligence? We refer to five hundred page work of Shinichi Mochizuki Japanese mathematician working in number theory and arithmetic geometry from Kyoto University, dealing with the ABC conjecture in Number theory [Har17]. But there is another approach. Minhyong Kim, a mathematician at the University of Oxford said: It should be possible to use ideas from physicists to solve problems in number theory, but we haven' t thought carefully enough about how to set up such a framework And one more his quotation: We are at a point where our understanding of physics is mature enough, and there are enough number theorists interested in it, to make a push).

[Har17]: Hartnett (2017), «Mathematicians Explore Mirror Link between Two Geometric Worlds»

The answer to the question whether there is a quick and easy way to prove Fermat's Last Theorem is yes! And this method involves a series of mental experiments. Consider a construction of three concentric nested n-cubes or balls, with centres at the origin, with edges or radii just equal to natural numbers a, b, c. It should be noted without change generality that the natural numbers in formula (2.1) are related as$a < b < c$, and the situation of equality of edges a = b is excluded due to the irrationality of $\sqrt[n]{2}$. The case of negative numbers can be considered by moving term into another part of the equation and substitution of variables - it is enough prove the theorem for the case of $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ and generalize the result to whole numbers $\mathbb{Z}$.

4 Mental experiments

Mental experiments are hypothetical situations used to explain a situation or a phenomenon, through which would be the results, if the experiment actually occurred. In other

words, a mental experiment is a resource of the imagination (it consists of narrating a fictitious situation), which has enough logic to make it possible to imagine coherent results, so that these results allow us to explain something.

If you take the three nested n-cubes here symbolically depicted on the planea-Small cube, you layer around it a certain number of unit cubes, create theb-Middle n-cube, layer another certain number of layers, create c-Large n-cube, where volume of a-Small n-cube is equals to volume of difference of c-Large and b-Middle n-cubes. Note: the edges of n-cubes are whole numbers a,b,c. The same approach is sutable for concentric balls with radii a < b < c natural numbers, where volume of B_a^n = volume of B_c^n - volume of B_b^n. Note for n > 3 instead of volume should be measure defined below.

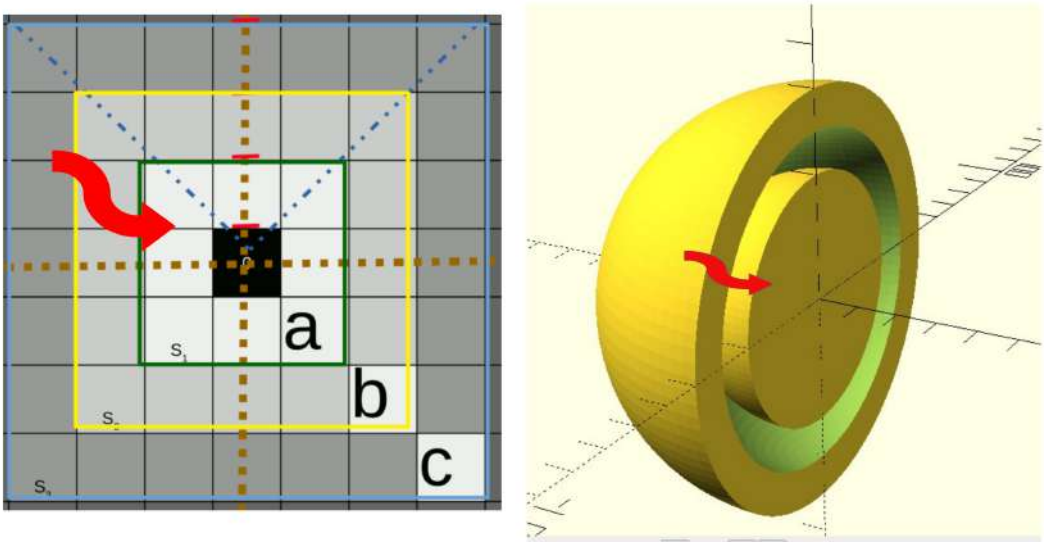


Figure 4.1: Concentric n-Cubes and balls with natural numbers edges / radii a, b, c

You have got a construction that doesn't really exist in nature for the case n greater than two, it's amazing! You will never be able to put each point / unit cube from a small ball B_a^n in correspondence with another point / unit cube of this subset of layers between the middle and the large one or $B_c^n \setminus B_b^n$. in such a way that you do not destroy the symmetry of the construction and do not allow voids.

In general, these subsets are not equivalent. This is the main idea of the proof. The reason is that this figure has the property of central symmetry and does not contain any inhomogeneities. As a result, each layer in this figure is not comparable to any other layer. So each layer in this figure is not reducible to another layer. Additivity conditions

and axiom of measure do not work here. In other words, it is impossible to speak of an addition of volumes. The mathematicians of ancient Greece introduced the concept of incommensurability of linear segments. We will make sure that arithmetic operations of comparison or reduction of layers are prohibited.

5 Objections

Why did Andrew Wiles need more than a hundred pages to prove it, when half a page is enough, or six faces of a wooden cube for a child? Rospatent found the author guilty of plagiarism with Andrew Wiles' prove, for which he received an Abel prize in 2016. Rospatent refused to register the author's patent No. 2021501435/49 of 20 March 2021 for an industrial design in the form of a wooden cube with a proof of Fermat's Last Theorem on it under the pretext of violation of public morality. Rostpatent's claim of plagiarism of the proof does not stand up to any criticism because the proof you see is original and new and it really brakes the stereotypes formed in science about the absence of a short proof of this theorem.

6 Symmetry. Isotropy and homogeneity of space.

We distinguish between a ball and a sphere that surrounds the ball. The sphere is the so-called layer for the ball or n-cube underneath. A sphere has one unit less dimension than a ball. This is clear from physics and maths lessons. Remember the formulas for the length of a circle $2\pi R$ and the area of a circle πR^2 , the area of a sphere $\frac{4}{3}\pi R^3$ and the volume of a ball. It is interesting to imagine that in the one-dimensional world we would have such an open ball in the form of a segment, excluding its endpoints or zero-dimensional balls located at a distance r from the origin. Below is a sphere of dimension n - 1. This is also a sphere, but of smaller dimension. It is no coincidence that there is a sign of homeomorphism $\cong$ of figures here.

Let's imagine that we dissect our n-dimensional ball by hyperplanes, starting with the simple case of four-dimensional space. What do we see? This three-dimensional ball centred on the origin is the result of the intersection of the 4-dimensional sphere with the 3-dimensional subspace $\mathbb{R}^3$. You can see the equator on the sphere. Here we see the northern and southern hemispheres, the equator is excluded. The equator becomes a meridian when you rotate it ninety degrees.

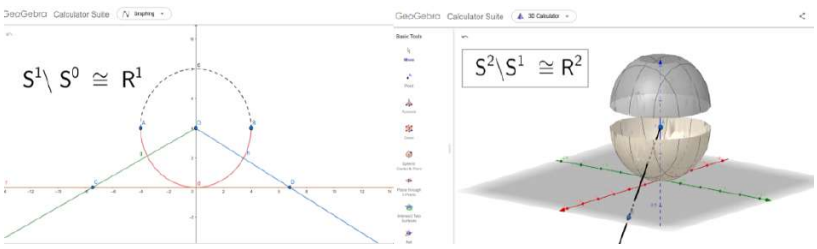


Figure 6.2: Dimensions of hemispheres and planes

Now, for the case of the 2-dimensional plane, the open ball becomes the familiar circle, excluding the 1-dimensional sphere already considered. Finally, for the 3-dimensional case, we have the usual ball resembling a football, closed by a 2-dimensional sphere. Again, we exclude any meridian from the sphere. As a result, we know the sequence of geometric elements on the sphere from dimension 1 to n-1. These are the so-called hyper-meridians, which will be useful to us in the future.

Imagine a cascade of spheres and an enclosing meridian for the largest sphere. If $\exists$ is a triple of natural numbers a, b, c (see the existence quantor $\exists$ for a short notation), then in this case we can map every point of space in this interval between the middle sphere and the big sphere into a small sphere $k\int_b^c r^{n-1}dr = k\int_o^a r^{n-1}dr$, where k - some coefficient depends on the dimension of space n. And since this whole construction is symmetric, this means that any surrounding of these spheres can be mapped into a set of spheres. Note, that $S^m \backslash S^{m-1} \cong \mathbb{R}^m, dim(S^m) = m$, where $\mathbb{R}^m$ is the space dimension of m, see Figure 2 above.

$$\{S_j\} \mapsto \{....S_i\} \tag{6.1}$$

which means that the set containing only the element layer S_j is mapped to the set of the layer containing the element S_j by equivalence function, i.e. point to point is mapped in $\mathbb{N}_1$ unit to unit $1^n \mapsto 1^n$. In other words, there is a certain

equivalence function $F(X) \longrightarrow Y$ mapping the open set X to the set Y. Each image has a preimage. When explaining the integral, teachers often operate with the notions of splitting a figure, a ball B_r^n into separate pieces or differentials S_r^{n-1}, like cutting a lemon, which are later reassembled into a whole. It is more usual for high school students to talk about integration, but the application of higher math will be unnecessary here. Enough to write the equation above. In our construction of a set of continuously following spheres forming open spheres, regardless of size, always a large sphere contains a smaller sphere, in its turn a smaller sphere, and so on. In primary school we study the texture of a cut tree, the layered structure of the Earth's crust in a section, the traces of layers on a probe taken from a super-deep well - all are examples of induced topology. Fermat's Last Theorem excludes the existence of such a symmetric construction, given the conditions of equivalence and continuity. Why not? To understand this phenomenon, we need to analyse equation (6.1) by elements:

Table 6.1: Any spheres from preimage can be mapped into image by each element separately.

Sphere	$Element^m$-*	...	$Element^2$ -sphere	$Element^1$ -circumference	Radius
S_j^m	$S_j^m \backslash S_j^{m-1}$	...	$S_j^2 \backslash S_j^1$	$S_j^1 \backslash S_j^0$	j
$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	...
S_i^m	$S_i^m \backslash S_i^{m-1}$	...	$S_i^2 \backslash S_i^1$	$S_i^1 \backslash S_i^0$	i
S_{i-1}^m	$S_{i-1}^m \backslash S_{i-1}^{m-1}$	...	$S_{i-1}^2 \backslash S_{i-1}^1$	$S_{i-1}^1 \backslash S_{i-1}^0$	i-1
...	...	...	...	...	...

Each layer contains elements of dimension 1 to m = n-1. The observation structure has been layered from the periphery j. . . i, (i-1) towards the centre therefore, the indexes are listed in descending order. The equivalence function maps each element of the layer S_j separately to the set of elements of the corresponding dimension.

To ensure the simultaneous matching of the elements of the layer more than to one dimension is impossible due to the unsolvability for n > 2 of the stipulated below system of n-1 equations), where i and j means natural radii of concentric spheres:

$$\begin{cases} j^{n-1} = i^{n-1} + (i-1)^{n-1} + \dots \\ \dots \\ j^2 = i^2 + (i-1)^2 + \dots \\ j = i + (i-1) + \dots \end{cases} \tag{6.2}$$

Each equation has at least two or more terms. This series of equations continues from n-1 to the power of 1. Any element of arbitrary dimension can only be mapped by the equivalence function into an element of the same dimension. In other words, there is a construction similar to what we have done: a set of successive spheres around the origin form a ball. The structure of the layers is determined only by the dimensionality of space and does not depend on the geometric size of the layer. The condition of equivalence or equality of volumes (more precisely cardinality for a set of points for any n-dimensional space) of the mapped layers means that any arbitrary layer of a large sphere can be mapped into a natural number of layers of a set of successive small spheres.

The number of layers in the image on the right side of each equation is ≥ 2, since 2 is the natural number after 1. This leads to a system of equations that is unsolvable even in real numbers. You can check this with the triangle inequality $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for metric space, where the sum of the lengths of the legs of the triangle is greater than the length of the hypotenuse, except for the zero case, which is excluded by the conditions of Fermat's Last Theorem. If the number of terms in the system of equations (6.2) is more than two, you can concentrate on the last pair of equations, where x^2 is the square of the length of the vector and x is the projection of that vector onto any fixed axis, and then, using the associative law for terms of the same dimension, reduce the problem to the triangle inequality.

7 Why do Pythagorean triples only ∃ on the 2D?

Pythagorean triples were known to mankind thousands of years before Pythagoras himself was born, since the time of the Sumerians, who used them to solve trigonometric problems easily. What are the special features of a 2D plane

compared to an n-dimensional space, n ≥ 3? To find the simplest answer, we can use the good old reel-to-reel tape recorder, where the tape is wound from the left reel to the right reel or vice versa. In this case, the sum of the areas of the left and right tape circles remains constant and is equal to the thickness of the tape multiplied by its length. Let's assume that we have captured the moment when the left side of the spool has a radius j greater than the right side of radius i. When we talk about the need to maintain the symmetry of the figure when displaying or moving a layer continuously, this means that one turn of the tape on the left should fit into the whole number of turns of the spool on the right: two, three, four, etc., but not fractions, otherwise the condition of maintaining symmetry when moving or displaying layers will be violated. In fact, the partially filled layer has a symmetry defect, it is asymmetric. If we can make a ribbon of any thickness, then for any given ratio of the radii of the coil circles we can easily achieve symmetry in this model, namely: one layer or coil on a large coil is equivalent to a set of complete coils or layers on a small coil.

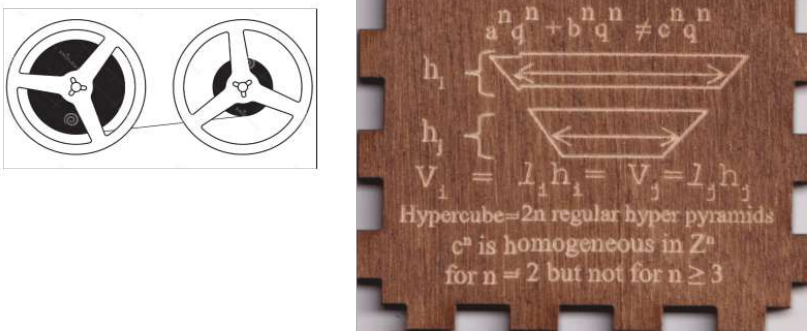


Figure 7.3: Equivalece of layers on the 2D plane for circles and squares. Photo of author's 3D-cube

Actually, this is not a single layer, but an ordered set of layers $\{S_j...\} \mapsto \{...S_i\}$. In the prototype, S_j is the first element, and in the image, S_i is the last element. This implies that the integer radii of the layers are $j > i$ at least $j = i + 1$ otherwise one can simply rewind the tape or change the coils. For the number of terms in system of equation (6.2) greater than two, one can focus on the last pair of equations, where x^2 is the square of the vector length and x is the projection of that vector onto any fixed axis, and then apply the law for terms to reduce the task to the triangle inequality.

Note that the picture is similar in the case of an n-cube

Each layer of the hypercube contains elements with dimensions $n-1, n-2, \ldots 1$, which are (hyper)faces, and the (hyper)edges of such elements are described by the formula $i^k 1^{n-k}$—let's denote such a parallelepiped by the shorter synonym orthotope or hyperrectangle.

(defined below) of dimension 2 or, more simply, a square on a plane. Because of the symmetry, it is convenient to concentrate on studying a single segment formed by rays emanating from two adjacent vertices and apply the formula for the area of a trapezium by the product of the length of the median line by its height on the right). As a result, the volume is stored measure as a subset of layers mapped into a set of successive and continuous layers closer to the centre, and the symmetrical shape of the structure under study.

It is not necessary to be able to integrate

It is not necessary to be able to integrate in order to calculate the volume of a (hyper)pyramid - it is enough to learn how to dissect a (hyper) cube into identical hyperpyramides by number (hyper)faces. And don't just limit yourself to correct (hyper) pyramids. To do this, you can mentally fill the pyramid with liquid, placing it in a homogeneous gravitational field, you can apply Pascal's law and notice that the pressure on the base of the pyramid depends on the weight, mass, volume of the pyramid, but ultimately, it is uniquely determined by the height and area of the base, regardless of the shape of the pyramid. Apply the resulting formula $\frac{H}{n}S$ to 2D, 3D, 4D . . . and make sure that it corresponds to the area of the triangle and the volume of the pyramid known from the school curriculum. Remember that the area of S corresponds to the measure of the face of dimension n-1. Creative imagination simplifies calculations and makes integration unnecessary in some cases!

The figure 7.4 resembles a square-section stranded cable, where only axial symmetry is observed, but not central symmetry.

What prevents us, in the case of three or more dimensional space, from "unwinding" layer by layer (sphere by sphere) from a large sphere into a small one, like unravelling a knitted thing from a woollen thread? Let's try to consider this question from the perspective of "pure mathematics", for which it is necessary to briefly consider some concepts of set theory, continuity of functions, metric topology, homeomorphism, pairwise non-overlapping equivalence classes.

At school and university, in physics, geometry, drawing,

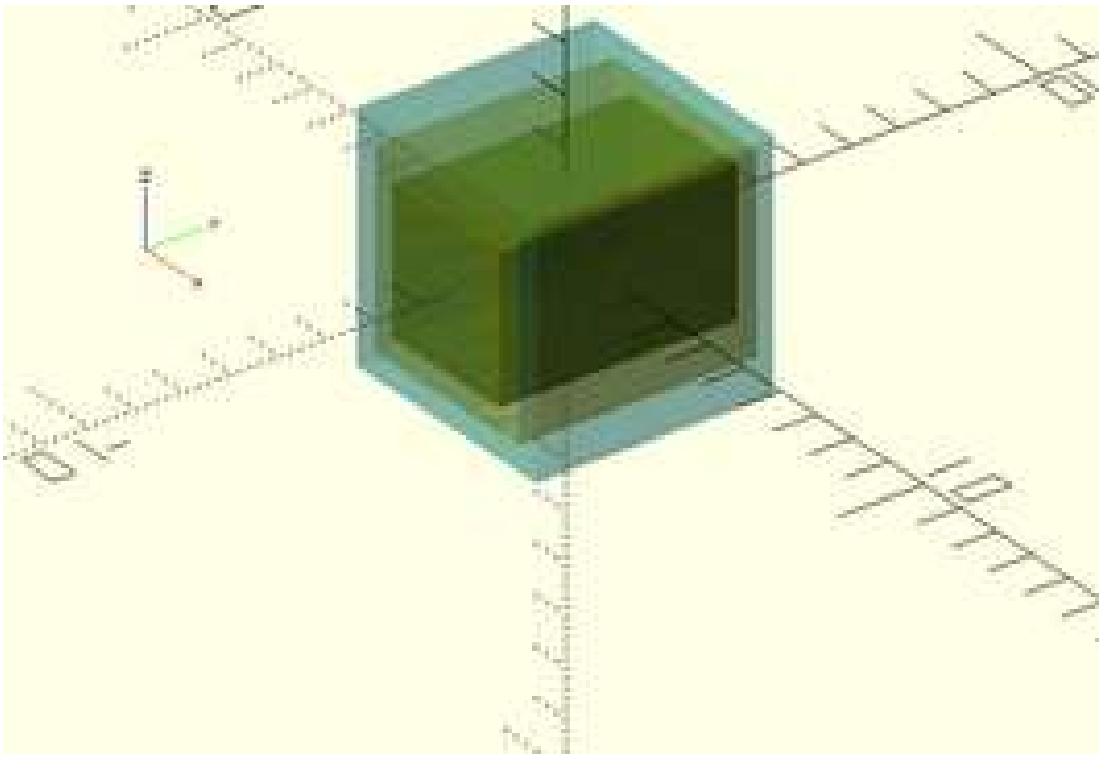


Figure 7.4: An example of a Pythagorean triple in 3D. Only the axial symmetry is observed. A figure corresponding from the standpoint of set theory to an arithmetic expression $(5^2 \backslash 4^2 = 3^2) \times 5^1$

engineering graphics or 3D modeling classes, students are used to working with axial symmetry, symmetry relative to a plane built on certain axes, as well as with central symmetry. It is easy to generalize the above table to the n-dimensional case.

What prevents us from carrying out a similar experiment in the case of three and more dimensional space? To answer this question, it is necessary to briefly consider the concept of set theory, continuity functions, metric topology, homeomorphism, pairwise disjoint equivalence classes.

The FLT proof boils down to solving the problem of an irreconcilable conflict between a centrally symmetric shape and content in a construction of three concentric spheres $B_c^n \backslash B_b^n \ncong B_a^n$ with integer radii $a, b, c \in \mathbb{Q}$ for the case of the dimension of the space $n > 2$, since symmetry and the condition of preserving the measure (volume) under equivalence relations would also have to be fulfilled for an arbitrary "large" plane mapped into a set of "small" planes, but $\nexists \{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$. It is the conflict that is formulated on the title page of the monograph.

Table 7.2: Symmetry in four-dimensional space n = 4.

Symmetry with respect to:	Symmetry with respect to the subspace $\perp$ by dimension	Symmetry along the subspace $\parallel$ by Dimension (degree of symmetry)	Where the point will be displayed with coordinates (x_1, x_2, x_3, x_4)
I	II	III = n - II	IV
Cubes along the axes X_1, X_2, X_3	3	1	$(x_1, x_2, x_3, -x_4)$
Planes $(X_1 \times X_2)$,	2	2	$(x_1, x_2, -x_3, -x_4)$
Axes X1	1	3	$(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$
Points at the origin and center of all hypercubes	0	4	$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$

8 Continuity. Homeomorphism. Equivalence classes

Russian figure skater Kamila Valieva, she is plastic, she performs a beautiful smooth dance. You can see Kamila Vialieva doing different figures and these images are reversible. You can play the film backwards. Similarly, imagine a certain function $f(X) \longrightarrow Y$ mapping the open set X to the set Y. Each image has a preimage. And for And for mutually reversible functions $f^{-1}(Y) \longrightarrow X$. In this image, a point can have an open neighbourhood, for instance in the form of ball. Suppose that point A is completely mapped onto this neighbourhood of point B. This is the definition of continuity. Speaking of homeomorphism, we note the interesting transformation of a **mug** into a **torus** and vice versa. In terms of topological theory, equivalence functions help to prove Fermat's Last Theorem from the other side by the impossibility of constructing three concentric balls defined above with the centre at the origin and with integer radii such as $B_c^n \backslash B_b^n \mapsto B_a^n$ in homogeneity and continuity space.

9 An understanding of Set Theory.

The following information is essential for an understanding of set theory. 3D modelling offers great opportunities to demonstrate the operations of intersection, union and subtraction of sets. And this is the notation of an empty set $\emptyset$.

Here is the notation of a universal set U. In the Euler-Wien Diagram, the universal set corresponds to the whole rectangle. Basic knowledge of the complement of a set wood be useful [6]. Chessboard - well known illustration of the Cartesian product denoted as $\times$. But why only numbers? The most common metal hammer on a wooden handle can be seen as the result of operations of difference of sets, such operation as union $\cup$, intersection $\cap$, subtraction $\setminus$. The author urges the reader to turn to mathematical forums, online courses and a reference book for initial information in the listed areas of knowledge.

When working with 3D figures, you can see the advantages of knowing the basics of set theory and, in addition, check the effect of distributive rules when expressions can be rewritten in two ways. For example, it is easy to get a cascade of spheres, see formula (6.1) above and table 6.1.

10 Cardinality of Set and Equivalence function

The cardinality of a set is nothing more than the number of elements in it. This concept is easy to understand using examples. Consider the set $\mathbb{A} = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle\}$ of triangles and the set $\mathbb{B} = \{\bigstar, \bigstar, \bigstar, \}$ of stars. These sets are called equal-power sets because they have the same number of elements, denoted by these symbols A is equal to B or $|A| \sim |B|$. It is easy to see that the set of natural numbers N is equivalent to the set of integers $\mathbb{Z}$, because each pair: $1 \mapsto \pm 1$, $2 \mapsto \pm 2$, $3 \mapsto \pm 3$ and so on is numbered with one number. Such a set is called a countable set. The set of natural numbers $\mathbb{N}$ is countable. And the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ is also countable. The mathematician Georg Kantor proposed an original way to approach each number as a fractional division p of q. Imagine a large cinema with rows p and columns q. You walk around this cinema like a checker to find a stowaway, but you follow the diagonals obliquely, going for example to the upper left corner, and now you start moving along the zigzag line and gradually examine each seat in this infinite cinema, you will find a stowaway.

So the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ is countable. In the case of the real numbers $\mathbb{R}$, which include irrational numbers that

cannot be represented as fractions, this is not true.

It is important to remember that when we talk about relations of continuous and mutually reversible functions, we can only compare spaces of the same dimensions. Let's take a pencil, for example. You can imagine a point source of light illuminating it from above, and this vertically oriented pencil is mapped to a point, but you can't do the inverse transformation from a point back to a pencil, because the principle of mutual unambiguity is violated. The antipode of mutual unambiguity is, for example, the axiom-defined operation of measure $f : R^n \mapsto R$ over sets or the volume of a figure for the 3D case. Measure has the property of additivity.

11 Metric topology

Author is forced to resort to set theory, binary functions and the basics of topology [5]. A collection of sets in the form of open n-cubes e^n with the centre at the origin, i.e. the Cartesian product of the open segment $e^n = (-\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})^n$ defines the base of the topology Ω in the metric space R^n [clause 3.1. in 4] The equivalent topology is set by a set of sets in the form of open balls - only their metrics differ: $max(x_j) < r$, for the first and $\sum_1^n x_j^2 < r^2$ for the second [clause 4.3. 5]. Below, under the words hypercube and layer, an open sphere of dimension n, radius r B_r^n and its closure - a sphere S_r^{n-1} of dimension n-1 and radius r will also be used.

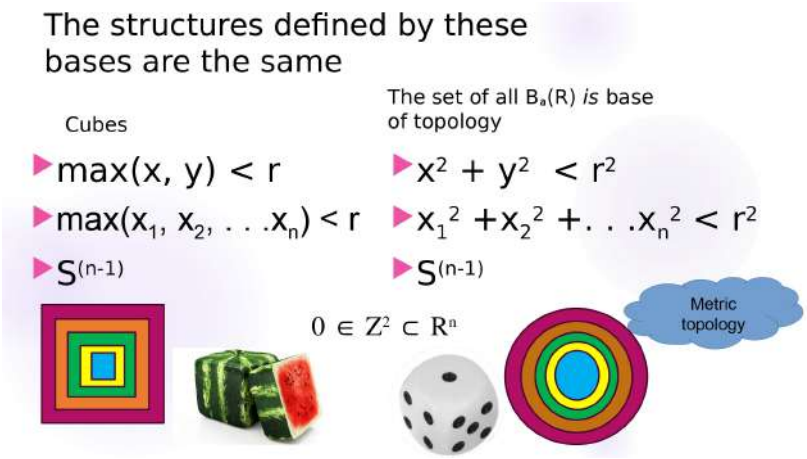


Figure 11.5: Nested n-Cubs and Balls

The structures defined by these bases coincide. You say that metric topology is defined here, and we have a metric

space. So a sphere and a cube are the same, just slightly deformed in topology. Compare this cubic watermelon and the rounded cube. Let's imagine nested open balls. Because the spheres themselves that enclose the ball do not belong to this set. For the n-dimensional case everything works the same way, but here instead of two coordinates there are n coordinates. The sum of their squares is still less than the radius R squared. What about cubes? - The picture is not fundamentally changed, just used a slightly different metric, where instead of the square is substituted function maximum value of X or Y less than the radius R for the case of n-dimensional space we will have n variables listed here.

A similar pattern of nested layers to the Russian Matryoshka doll can be seen on the two-dimensional plane piercing the n-cube. We would like to emphasise piercing and not dissection, because from the basics of linear algebra it is easy to understand that a cube is dissected by such a plane into two disconnected spaces, and for a higher dimensional space. Starting from the tesseract, a 2D plane can be enclosed by a continuous contour transverse to it. The picture resembles a baked apple on a skewer. In fact, from the linear algebra course, if $\mathbf{AX = 0}$ then rank($\mathbf{X}$) = n - rank($\mathbf{A}$) = n-2, so starting from 4D, the plane can be threaded like a thread through the eye of a needle. Unfortunately, this revealing fact is not understood by some scientists when they encounter a chain of n-cubes nested inside each other!

For the balls situation is self-evident. But we have seen that in topology a ball and a cube are homeomorphic to each other and are easily transformed into each other as a result of deformation without breaking the space. It turns out that on a perfectly smooth homogeneous surface of an n-dimensional ball there are geometric elements of all dimensions from 1 to n-1 hyper-meridians. For the case of a n-cube of dimension two or, more simply, a square in the plane, the picture is similar. What prevents us from making a similar experiment for the case of three and more dimensional space? To answer this question, it is necessary to familiarize ourselves with the concept of pairwise disjoint equivalence classes.

12 Pairwise disjoint equivalence classes

Look at a photo of the Taj Mahal, a monument of Indian architecture. It has symmetry with respect to the vertical axis passing through its centre. We can say that the mirror just plays the role of an equivalence relation. Symmetry is one of the types of equivalence functions.

There are other examples, such as homeomorphic figures already familiar to us, such as displacements, rotations, and so on. Note that the Taj Mahal is made up of different elements, columns are mapped into columns, domes into domes and there is no mixing. Another example is chess. While the game is played on parity, pawns are exchanged for pawns, light pieces: Bishop, Knight - for light pieces, heavy pieces Rook are exchanged for Rook or Queen for Queen. These are pairwise disjoint equivalence classes. The equivalence function deals with each class separately, it is easy to prove strictly mathematically. There is no mixing going on.

$$S\setminus \sim = \{S_{n-1}\setminus S_{n-2}, \dots S_2\setminus S_1, S_1\setminus S_0\} \tag{12.1}$$

(in particular, for n = 3 these are two hemispheres excluding a circle in the plane (0,x,y), a circle excluding two endpoints $[0,0,-r/2]$, $[0,0,r/2]$. The expression $S|\sim$ denote factorization of layer useful for analysis of its elements. Each of the listed classes has the dimension of the subspace to which it belongs

$$S_m\setminus S_{m-1} \cong \mathbb{R}^m, dim(S) = m. \tag{12.2}$$

Applied to our construction of three concentric spheres or n-cubes. Any element of any dimension can only be mapped to an element of the same dimension by the equivalence function. Let's focus on the formula layer $\{S_j\} \mapsto \{...S_i\}$ in a collection of layers. Such a formula is called a restriction of equivalence relations to a layer, as if the set had been placed there with a stencil. Because of the central symmetry, the image of a layer should also be symmetrical - the set of continued layers.

13 Chain of n-cubes

As mentioned above the a-Small n-cube a^n is the set of layers indexed from 1 to k, theb-Medium b^n is the set of layers from k+1 to k + l and the c-Large c^n is the set of layers from k+l+1 to k + l + m. The layer is defined as the subset difference $S_i = e_i \backslash e_{i-1}$, i > 1, where e_i denote n-cube with edge i. Here below is a totally ordered set of layers (also named as simply ordered set, linearly ordered set. Sign $\prec$):

$$Q_0 \subset Q_1 \subset Q_1 \cdots \subset Q_{k+l+m} \subseteq U \tag{13.1}$$

or

$$e_0 \prec S_1 \prec S_2 \cdots \prec S_{k+l+m} \in U \tag{13.2}$$

The first hypercube e_0 denote 1^n or 2^n, in parity, but given the enclosures below, this detail is not leads to qualitative differences. A set partition one can see above. A chain of sets (6) define a topology in $\mathbb{Z}^n$. On the other hand, this formula describes a one-dimensional probe penetrating three nested hypercubes through a common centre. The result of the Cartesian Product of two orthogonal probes can be seen in 4.1 above, so the researcher can obtain a two-dimensional plane regardless of the space dimension.

Definition 13.1 *The layer is defined as the difference of subsets $S_i = e_i \backslash e_{i-1}$, i> 1, where e_i denotes an n-cube with edge i.*

The topology of n-cube is induced on this subset because $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{Z}^n \in \mathbb{R}^n$. There is no parallax effect.

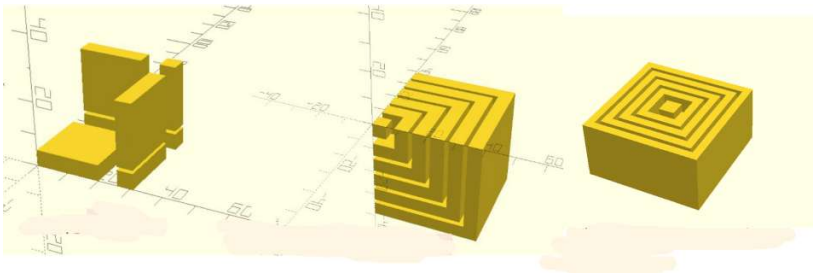


Figure 13.6: The construction of one layer (left) and set of layers in the octant (+, +, -)

Let's try to create a construction in OpenSCAD

```
//*****************************************
// Listing 1 Layer.scad
// This program creates a 3D corner from
// elements of different dimensions (2-D
```

```
// siding)
// a pair of corners 1-D and the vertex of
// the cube 1^n - 0-D
// The vertex of the corner is at the begin
// ning of the coord.
// (center=false, not center=true)
//*****************************************
q = 5; // Sets The Scale.
// Do not forget the sign ";"
edge = 5*q; // Edge dimension n-cube
step = 1.5; // Step or gap step >= 1
cube([edge,edge,1],center=false);
// Lower face of the cube, orth. Y, edge size
translate([edge + step,0,step])
// Moving the course to a point (x,y,z)
cube([1,edge,edge],center=false);
// The face of the cube, orthogonal
// to the X axis
translate([edge + step,0,0])
// The translate operator without ; is
// followed by a figure
cube([1,edge,1],center=false);
//The edge of the cube loc. across the X-axis
translate([0,edge + step,0])
cube([edge,1,1],center=false);
// The edge of the cube located across theY
// axis
translate([0,edge + step,step])
cube([edge,1,edge],center=false);
// Cube face, orthogonal Y axis
translate([edge + step,edge + step,step])
cube([1,1,edge],center=false);
// The edge of the cube,locat/ parallel.Z
axes ranslate([edge + step,edge + step,0])
cube([1,1,1],center=false);
// Vertex of the cube.
```

As a result, you will get a layer, and together with the program cycle:

```
for (j = [ i : -1 : 1])
//Slightly modified listing 1}
```

to build layers from the periphery to the center, the counter $j = i, i-1, i-2 \ldots 1$ is used - a set of layers or, more simply,

a corner is formed, as in the figure 13.6

The dimension of the n-cube layer can be seen from the well-known Newton's binomial. See also [Gal15] To understand what elements an arbitrary layer S_i consists of, use Pascal's triangle, in which the coefficients $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, the number of combinations are written in rows, and each coefficient, with the exception of the extreme ones, is obtained by summing two adjacent ones located a row above, here are its first lines: 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1, etc. as in the table 13.3 in the margins of the book.

[Gal15]: Galperin (2015), *Multidimensional Cube*

Table 13.3: Pascal's Triangle

n	Binomial. coefficient.
1	1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
...	...

As a result, the senior member of the polynomial below disappears, and the degree of the polynomial decreases to n-1. The sign of the sum $\sum$ can be replaced by the union sign $\cup$. The dimension of the n-cube layer can be seen from the decomposition of Newton's binomial. To simplify its appearance to one layer, use Pascal's triangle, where the binomial coefficient is written in rows. As a result, the higher term of this polynomial disappears and we are left with the highest degree, n minus one. You can replace the sum sign $\sum$ with the union sign $\cup$. Here, understanding the structure of the layer gives the following formula

$$S_i = (i+1)^n - i^n = Q_{i+1} \backslash Q_i = \bigcup_{k=1}^{k=n-1} C_n^k i^k 1^{n-k} \qquad (13.3)$$

Look at this corner (13.6 left). And this is a cascade of corners (13.6 centre) that together form a cube (13.6 right). The Cartesian product of a linear segment per square forms a cube. This shows that the principle of dimension is respected. The above formulae are derived from the Newtonian binomial and describe the plane as the difference of successive hypercubes with a common vertex coinciding with the origin.

Another way of representing the construction under study, "the origin of the coordinates located at the centres of the hypercubes", is obtained by iterating n reflections of hyperplanes, i.e. multiplying by 2^n, which does not fundamentally change the nature of the formula. Both geometric constructions are transformed into each other by reflections from hyperplanes perpendicular to each of the n coordinate axes, or by cutting and scaling the figure.

Each layer of the hypercube has elements of dimension $n-1, n-2, \ldots 1$ (hyper)the faces, and the (hyper)edges of such elements are described by the formula $i^k 1^{n-k}$ - let's denote such a parallelepiped by the shorter synonym orthotope or hyper-rectangle.

If we neglect the binomial coefficients, then the resulting formula coincides with the one previously obtained to describe the structure of the sphere (12.1)

Hypercube and inclusion-exclusion decomposition

Consider the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with the Lebesgue measure λ. For $a > 0$, we define a hypercube:

$$Q_a = [0, a]^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le a \ \forall j\}.$$

For $0 < b < a$, consider the layer between the cubes:

$$S_{a,b} = Q_a \setminus Q_b.$$

Its volume is known:

$$V_{a,b} = \lambda(S_{a,b}) = a^n - b^n.$$

Decomposition by inclusions and exclusions

For a nonempty subset of $J \subset \{1, \ldots, n\}$, we define the set:

$$F_J = \{x \in Q_a \mid x_j > b \text{ for all } j \in J\}.$$

There are no restrictions other than $0 \le x_j \le a$ on coordinates that are not included in J.

The volume of F_J is:

$$\lambda(F_J) = (a-b)^{|J|} a^{n-|J|}.$$

Applying the inclusion-exclusion principle to the events $A_j = \{x \in Q_a : x_j > b\}$, we obtain the equality of the indicator functions:

$$\mathbf{1}_{S_{a,b}}(x) = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|-1} \mathbf{1}_{F_J}(x).$$

Integration gives an alternating formula for volume:

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (a-b)^k a^{n-k}. \qquad (1)$$

For more information about hypercube symmetry and its relation to the Mobius function, see 5

In the case of a square (n = 2) n in the plane, see above Figure 7.3 on the left the formula for the area of a trapezoid by the product of the length of the median line by its height. As a result, both the volume, the power of subsets, in the form of a plane mapped into a set of successive and continuous planes, and the symmetrical shape of the structure are preserved.

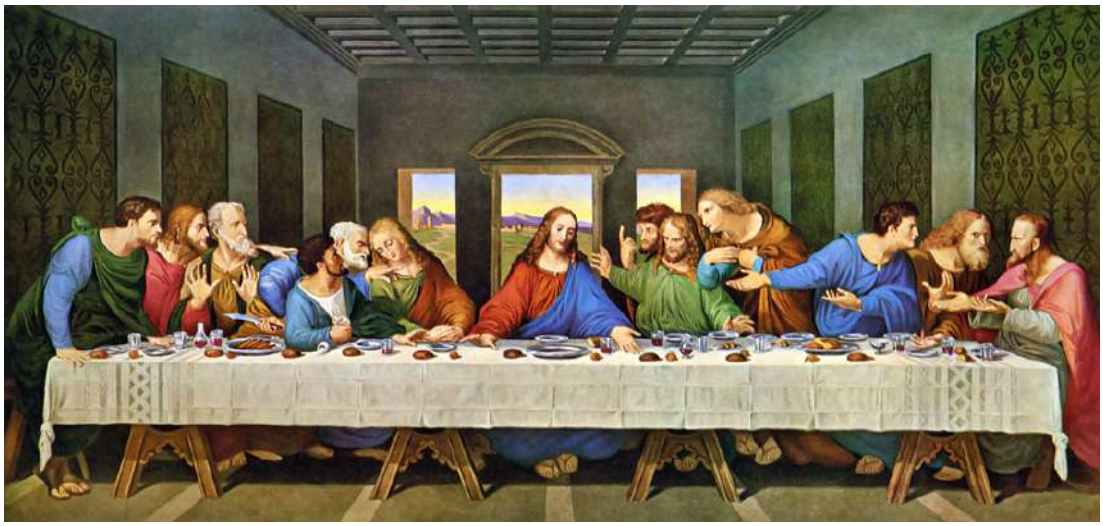


Figure 13.7: L'ultima Cena The painting The Last Supper by Leonardo da Vinci demonstrates the parallax effect. All the lines: the continuation of the corners of the walls, ceiling, and floor converge at the vanishing point - on the forehead of Jesus Christ. This creates a sense of spaciousness

It is important to remember that when we talk about relations of continuous and mutually reversible functions, we can only compare spaces of the same dimensions. Summarising the above, we can conclude that a point cannot be equivalent to a linear segment, a segment to a linear square or a circle in the plane, and these last figures to a three-dimensional cube. It is only possible to establish a continuous, mutually unambiguous correspondence between figures of the same dimensions. The same principle applies to a discrete space made up of elementary cubes. This is a clear demonstration of the correspondence principle in science. The term "correspondence principle" is used in a more general sense to mean the reduction of a new scientific theory to an earlier scientific theory in appropriate circumstances, for example, Einstein's

special theory of relativity reduces to classical mechanics at speeds small compared to the speed of light.

14 Euclid's Axioms in XXI

Euclidean Geometry is also known as plane geometry. It deals with the properties and relationships between all things. It is possible to supplement Euclid's Postulates with elements derived from elementary unit cubes lined up in a row, a rectangle, a three-dimensional cube and so on. Note, that we work in n-dimensional space!

Table 14.4: The postulates of Euclid in discrete space

Figure in Euclidean space R^n	Analogue in Z^n	Dimension
A dot	1^n	0 or n^*
A linear segment	A set of 1^n lined up in a row $i^1 * 1^{n-1}$	1
A plane	A set of 1^n ordered in a square $i^2 * 1^{n-2}$	2

* depending on the situation.

In the digital age, we can supplement Euclid's postulates with the following elements derived from elementary unit cubes lined up in a **row**, a **rectangle**, a **3D-cube**, and so on. The dimensions will be as if we were dealing with points. For example, $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ corresponds to formula (8). In addition to the axioms of Euclid, it is useful to analyse the constructions we have studied from the point of view of the axioms of topology, which are well described in a number of textbooks, e.g. We have already discussed the concept of metric and topological space (see figure 4). From the axioms of topology, the correspondence between a point in the space R^n and an elementary n-cube 1^n in the topological space Ω is even clearer. The elements 1^n in a topological space can be created by combining operations, differences, Cartesian product of sets of elements with dimensions from 1 to n-1. Note that the clause 0 or n, depending on the situation in the first row last column of Table 2, means that in the formula (8) above $i^k 1^{n-k}$ of the orthotope the multiplier 1^{n-k} has no dimension. On the other hand, by partitioning the space $1^n \mapsto e^n$, i.e. an n-cube. Spaces of different dimensions $\Omega^n \cong \Omega^k$ are homeomorphic if and only if $n = k$.

In fact, if Fermat's Last Theorem holds for triples of whole numbers, then the units do not matter, be they metres, centimetres, millimetres, micrometres, nanometres, etc. This means not only equality, but also the identity of the equation of Fermat's Last Theorem, or in other words, the independence of the result from the division of the space. A unit cube can be made as small as you like, but the essence of the phenomenon does not change. This is important for understanding for this student and for students who aren't familiar with mathematical analysis.

Separating a figure, let's say the sphere $S^2 \backslash S^1$, from its element - the equatorial circle. This is a legal technique known from Euclid's Elements from the third century BC and from school geometry courses on the plane, stereometry and drawing. Let us continue this thought. The sides of a triangle or other polygon are mapped onto the elements of another figure by parallel transfer/homothety/reflection from the axis/plane, rotation and other means. Note that if such a mapping is reversible, mutually unambiguous, then a point remains a point, a segment remains a segment (here dimensionality is preserved). The figure shows how two equivalent correct 3D pyramids are mapped, e.g. when looking at a hologram. The principle of equivalence means that a small pyramid as a whole is mapped to a large 3D pyramid, an arbitrarily chosen face is mapped to a 2D face, a one-dimensional edge is mapped to a one-dimensional edge. Drawing and architecture are based on this principle, which has stood the test of time for at least six millennia. Why, in this situation, can we not select hypermeridians on the sphere and expect each of these elements to be mapped to the set of elements of the corresponding dimension?

Tested for millennia

Is it legitimate to isolate from the sphere $S^2 \backslash S^1$, its arbitrary $\forall$ element - the equatorial circle? - This is a legitimate technique known from the "Elements" of Euclid, formulated in the III century BC, and from school geometry courses on planes, stereometry and drawing. induced topology. It has been verified by architectural monuments for thousands of years.

When we work with a decorative material, such as siding for a house, it is common to measure it in square metres. Moulded

products, such as railings or skirting boards, are measured in metres. But in reality, all of the above materials have certain dimensions in length, height and width. However, smaller dimensions are usually neglected. From the definition of topological space and Euclid's postulates, it follows that a unit cube or unit of degree n corresponds to a point in a space of dimension n. All the figures just listed are made of such unit cubes.

They have the dimensions we are used to from the axioms and the definition of topology. What is an axiom in mathematics? - It's the result of careful observation or a well-conducted experiment. Euclid's and topology axioms are based on the principles of physics: homogeneity, isotropy, continuity of space, symmetry.

15 A paradox

From the algebraic decomposition it follows that figures in the form of a cube with a defect in the form of a missing point, corresponding to the expression $i^n - 1^n$ a set of layers or $2^n - 1^n$ a layer (in $\mathbb{Z}^n$ provided central symmetry), indifferent to elementary transformations, have a dimensionality one unit less than the space in which these figures are created. Given the above, such expressions and figures correspond to $B_r^n \backslash point$ or S_r^{n-1}. However, only in the plane is it possible to simultaneously fulfil the conditions of symmetry preservation and volume equality inherent in the Pythagorean Theorem.

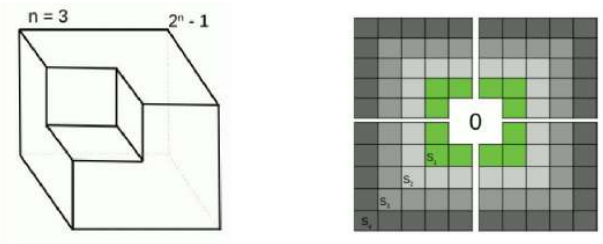


Figure 15.8: Dimension of defect cube $2^n - 1$ is n-1 in central symmetry space of $\mathbb{Z}^n$

Note that $2^2 - 1$ is also a 1D figure in the central symmetry space of $\mathbb{Z}^n$, which is mapped to the 1D perimeter of the square 1^2 layer by layer. This situation is normal, because of the condition of one class equivalence for n = 2.

Dimension is not a trivial question in mathematics. There is a great visualisation of Malderbrot's fractal set, which is defined by a recurrence formula, and such fractal sets differ from our usual sets in that as you increase the scale of the set, the same features are repeated infinitely. Imagine you're looking at a map from a bird's eye view, then you go down, you get closer to this object, you see more and more details, so these details show a more complex structure, it repeats all the time. There are no arcs, no smooth curves or straight lines. So the dimensionality of this fractal set is fractional. It's amazingly beautiful!

Journey to the vertex of the n-cube

Some respected scientists object that piercing the n-dimensional cube with a two-dimensional plane is too simple and distorts the complex structure of this cube. This misunderstanding is caused by a poor representation of what the n-dimensional cube actually is. To understand the structure of n-cube let us apply the method of setting up an experiment in virtual reality.

Astronaut Fyodor went into multidimensional space to make a trip from the origin of coordinates and simultaneously the centre of the 10-dimentional cube, whose faces are orthogonal to the coordinate axes, to an arbitrary vertex of the hypercube. The movements made by the astronaut imposed restrictions: allowed movements only in the direction or against the direction of any of the n coordinate axes. Fyodor made n jumps: the first one from the origin of coordinates to the centre of the face of the highest dimensionality n-1, and all the rest - across the first jump. At each step or jump, Fyodor changed the direction of motion, turning at right angles.

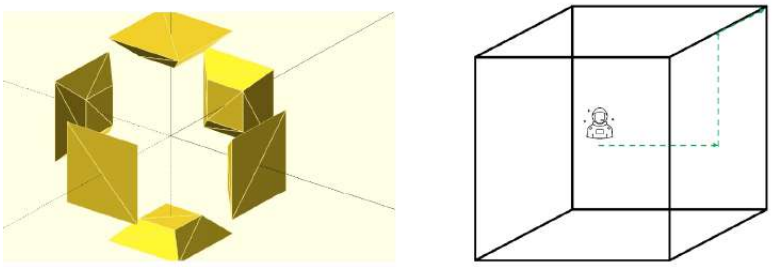


Figure 15.9: Fyodor made n jumps: the 1-st one from the origin of coordinates to the centre of the face

The astronaut's logbook after the experiment looks like this:

- Starts from the Deceract in the direction of the axis.
- I'm moving into the Enneract in the direction of the axis.
- Moving in an Octeract against the direction of the axis.
- Moving into the Hepteract in the direction of the axis..
- I'm moving into a Hexeract against the direction of the axis..
- Moving in a Pentact against the direction of the axis.
- Moving into the Tesseract against the direction of the axis.
- Moving into the Cube in the direction of the axis.
- Moving to the Square in the direction of the axis..
- Moving into the Segment in the direction of the axis..
- Moving towards the Vertex against the direction of the axis.
- Finish!

(It is easy to guess that with the existing restrictions on movement along/against the axis direction, Fedor will be able to freely visit $\forall$ of $2^{10} = 1024$ vertices of the hypercube.)

In the last three steps we, as three-dimensional beings, could see the sudden appearance of Fyodor in the centre of a three-dimensional cube from the invisible to us four-dimensional space, followed by a jump to the centre of the wall, ceiling or floor - at the discretion of Fyodor, after which from a 2-dimensional square - a jump to the centre of the edge and finally, the last step - arrival at the top.

Analyzing the two-dimensional and three-dimensional cases and generalising the result to the n-dimensional case, it is easy to calculate the length by formula $\frac{i}{2}\sqrt{n}$ of the distance from origin of coordinate to vertex. The edge of an n-dimensional cube lies in the hyperplane perpendicular to the height just constructed and passing through the base of this height - the point of intersection of the straight line with this edge.

Note, that from Fyodor's point of view, all faces of the n-dimensional cube are perceived not as n-dimensional, but as flat figures.

Without changing the generality, we can arrange the indexes of the coordinate axis in ascending / descending order and get the following result in the form of the ship's Log of

cosmonaut Fyodor. At the end of the flight, we turn to the data of the autonavigator, where Fyodor's observations and directions of movement along each axis were recorded. From the basics of combinatorics, it is easy to see that the number of elements - the power of the set, consisting only of binary elements zero and one, is 2^n - exactly the same number of vertices in the n - dimensional cube. In this experiment, Fyodor started from the centre of the ten-dimensional cube moved only in the direction (denotes as one) or against the direction (denoted as zero) successively explored all of its faces of dimension from nine to one.

It is important to remember that Fyodor on his way observed multidimensional cubes with the effect of parallax. There are a number of examples from astronomy, everyday life, and works of visual art to explain this effect. Images of an n-dimensional cube are mesmerizing in their beauty. Let's imagine a projection of an n-dimensional cube onto a two-dimensional plane, for example, passing through the X, Y axes, without the parallax effect. What figure will it be? The answer is shown on Figure 1.. So, when we talked about piercing an n-dimensional cube with a probe, the Cartesian product of two probes perpendicular to different faces, we worked with induced topology.

In fact, Fyodor investigated nested topological subspaces $\emptyset \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \Omega^3 \cdots \subset \Omega$ in the original n-dimensional space Ω, they all pass through the origin, the index from above means the dimension of the subspace. For example, in 4D Ω: $\emptyset \subset (x,0,0,0) \subset (x,y,0,0) \subset (x,y,z,0) \subset \Omega$.

A relative topology is induced in each of the subspaces: concentric balls with a common centre at the origin with radii based on natural numbers (Figure 4). The dimension of the balls, m-cubes corresponds to the dimension of the subspace. For simplicity, we can imagine the last three subsets in this chain: in 3D - 2D- 1D subspaces, respectively: ball B^3 - circle B^2 -a linear segment B^1.

16 Proof in a single formula and drawing

In the tradition of Indian mathematical treatises, the proof is reduced to a single drawing and signature: Look! For a

physicist, it is usually enough to look at a 3D cube with its faces or a globe with its equator to understand the proof of Fermat's Theorem.

Let's imagine a construction corresponding to the expression $a^n = c^n - b^n$ in n-dimensional space. On the left is a symmetric figure of dimension n. On the right is a set of layers with one dimension less. This set will be asymmetric (e.g. a sphere with an irrational radius is asymmetric), or have an irreparable symmetry defect or a violation of the continuity of the layers for dimension n > 2 (see Fig. 7.3 above). When talking about an irreparable symmetry defect, it is important to apply the rules of dimensionality, compare the volumes (capacities) for each element of the layer separately, and then take advantage of the triangle inequality. Therefore, an object whose fundamental properties are described in a contradictory way $\exists a, b, c \in \mathbb{Q}$, such that $B_a^n \cong B_c^n \backslash B_b^n$ does not exist in nature! - This proof is given very briefly on the cover of the book. The central symmetry allows you to move to a layered comparison, but $\nexists \{S_j\} \mapsto \{\dots S_i\}$. This is the conflict formulated on the title page of the monograph.

When constructing equivalence relations, hemispheres are mapped to hemispheres and an arbitrary meridian is mapped to a meridian. In order to satisfy these conditions simultaneously, it is necessary to ensure that the sum of the cathets is equal to the length of the hypotenuse of a right triangle - one of the cathets must be zero, which is forbidden by the FLT condition. This proves Fermat's Last Theorem to be false.

It is sufficient to utilise basic educational instruments.

The study was conducted using a limited set of basic school tools, including a wooden cube for children's creativity, a globe, a chess set, a tape recorder on reels, a stencil, a right triangle, and a mirror. In the context of inclusive education, it is possible to initiate discussions on topics such as symmetry, equivalence, and uniformity of space, as well as the preservation of the dimensions of the elements being compared, by simply touching the surface of a school globe or an orange with a thread stretched along the equator. To further illustrate this concept, one can peel an orange and observe the layers within.

In contrast to the American version of the FLT proof, which is

over a hundred pages in length, these straightforward tools collectively imply a conclusion regarding the asymmetry of our universe. To achieve this, the reader is directed to undertake the final experiment described in this chapter. Observe the face of an aesthetically pleasing female and note that a human being, a creature of the universe, must exhibit slight asymmetry in order to be considered beautiful. In light of the billions of years of evolution that have occurred on Earth, it is pertinent to question whether this phenomenon is merely an accidental occurrence or whether it can be seen as an embodiment of the more general principles that govern the evolution of the universe. For further insight, one might consult an intriguing volume on superstring theory and the part played by geometry and symmetry in the genesis of the universe.

The above proof is presented with a focus on school knowledge. For a deeper acquaintance with the theory of prime numbers, readers can refer to the scientific works [Apo13], [BS85].

[Apo13]: Apostol (2013), *Introduction to Analytic Number Theory*

[BS85]: Borevich et al. (1985), *Number Theory*

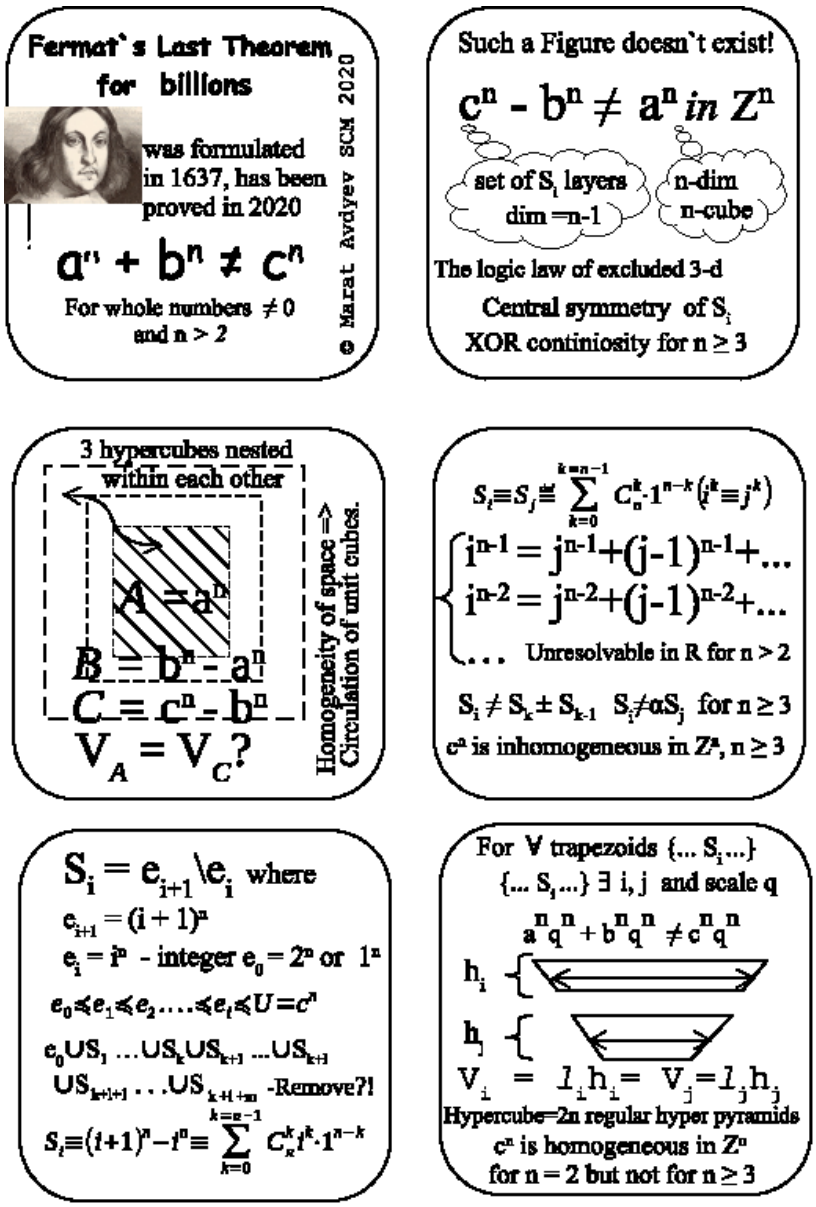


Figure 16.10: Six faces of a wooden cube are enough to prove FLT.

17 The Leonard Euler hypothesis

In 1769, Leonard Euler suggested that by increasing the number of terms in an equation similar to Fermat's theorem to four, five, etc., when the degree of n exceeds the total number of compared hypercubes on the left and right in the Diophantine equation, the researcher will necessarily come to the conclusion that it is unsolvable. A number of mathematicians and amateurs have refuted this hypothesis for the case of 4-, 5-, 7-, 8-dimensional hypercubes. (The method of decomposing one hexeract into five other hexeracts is still waiting for its finest hour.) Another generalization of Fermat's theorem to the case of four hypercubes leads to the Diophantine equation in the form: $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. Using set theory and the Euler-Venn diagram, assuming $d > c > b > a$, one can represent an expression from the sum of four hypercubes as:

$$d^4 \backslash c^4 = b^4 \cup a^4 \tag{17.1}$$

here on the left is the set of hypersurfaces of dimension $n = 3$, on the right is the union of two hypercubes of dimension $n = 4$. The fourth hypercube a^4 is obtained by operations on layers of b^4, but performed with deviations from the principles of symmetry of degree three in terms of the above table 7.2.

According to Fermat's theorem proved above, there is no equivalence between subsets of $(d^4 \backslash c^4) \backslash b^4 \not\equiv a^4$. Therefore, there are chances to create a new shape from the defects of the layers (partial removal of the layer), perhaps a^4. Let's make sure that it is possible in principle to build such a structure.

The manifold becomes disconnected

If this new construction is placed in the area of positive axis values, then when reflecting from hyperplanes and scaling, the number of hypercubes a^4 increases by 2n, that is, by 16 times, while the figure becomes disconnected. This makes the new model radically different from the previously considered combination of three nested cubes with a degree of symmetry n - the condition of uniformity of space is violated.

And what can we say about probing a two-dimensional plane? Let's arrange the four tesseracts in such a way as to preserve the maximum possible symmetry of the degree two structure. To do this, consider the planes on the axes X_1, X_2 (remember that both axes X_3, X_4 are perpendicular to this plane.)

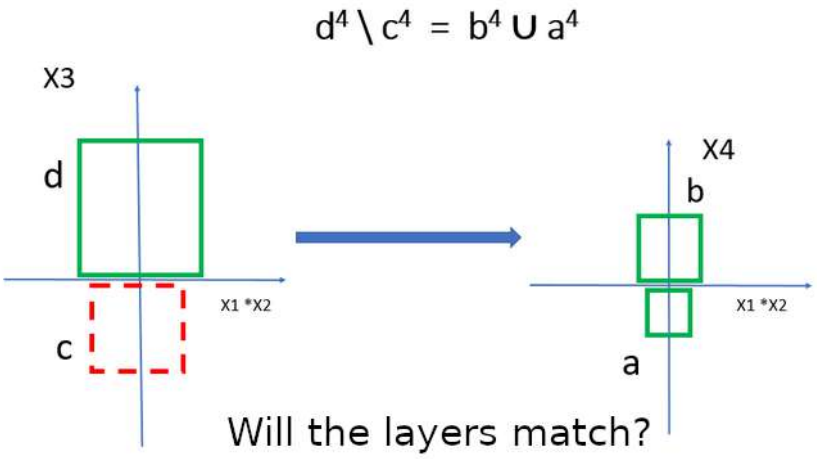


Figure 17.11: Is the Diophantine equation $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$solvable?

Since on the 2D plane $\forall$ the layer S_k is commensurate with another S_j, we build a plane stretched on the axis X_1, X_2 (for shortening, we denote it as $X_1 \times X_2$,- the Cartesian product of the axes. For ease of presentation, we choose two-dimensional projections $d^4 \backslash c4$ on a plane drawn through the X_3 axis and orthogonal $X_1 \times X_2$, and the projection of hypercubes $b^4 \cup a^4$ on a plane drawn through the X_4 axis, also orthogonal$X_1 \times X_2$. (The volume/measure of c^4, subtracted from d^4, is highlighted in a distinctive color and shading.) Note that the two-dimensional projections of all subsets of b on $X_1 \times X_2$ are symmetric with respect to subspaces 1D$\perp X_3$ and, respectively, $\perp X_4$ and symmetry along the subspace 2D $\| X_1 \times X_2$. Let's make sure that it is possible to find an equivalence function that displays $d^4 \backslash c^4 \longrightarrow b^4 \cup a^4$. In fact, it is possible to write in layers:

$$\begin{aligned} \{ \{S_k | c \le k \le d\}, \{S_l | 1 \le l \le d\}\} \longrightarrow \\ \left\{ \left\{S_j | 1 \le j \le b\right\}, \{S_i | 1 \le i \le a\}\right\} \end{aligned} \tag{17.2}$$

Here we write the mapping of a set consisting of two subsets of layers into another set also consisting of two subsets of layers (the condition for the range of layers follows after the

vertical line |). It is easy to find the corresponding equivalence function based on the equality of measures $d^4-c^4 = b^4+a^4$, as well as taking into account the condition of layered symmetry and Fig. 14.18. As a result, you can write a formula for orthotopes, taking into account their height (see the analog of a square cable in Fig. 7.5:

$$\begin{gathered} c\sum_{c}^{d}|S_k| + (d-c)\sum_{1}^{d}|S_l| \\ = b\sum_{1}^{b}\left|S_j\right| + a\sum_{1}^{a}|S_i| \\ \frac{c}{d^2}\sum_{1}^{\frac{GCD}{d}}|S_m|\,d^2 + \frac{1}{d+c}\sum_{1}^{\frac{GCD}{d-c}}|S_m|\,(d^2-c^2) \\ = \frac{1}{b}\sum_{1}^{\frac{GCD}{b}}|S_m|\,b^2 + \frac{1}{a}\sum_{1}^{\frac{GCD}{a}}|S_m|\,a^2 \end{gathered} \tag{17.3}$$

Here in the formula above, (GCD) - greatest common divisor i.e. $gcd(d-c, a, b, d)$. The capacities of 2D layers are written under the sum sign. The manifold in the form of a difference of tesseracts ($d^4 \backslash c^4$ is divided into orthotopes projected on the axis X_3 into segments $[c, d]$ and $[1, c]$ respectively. (Compare with splitting a variety into parts when taking an integral).

In the lower equation of the last formula, the variable is replaced by a single natural counter m, which runs through the value of the ranges $1 \ldots d$, $c \ldots d$, $1 \ldots a$, $1 \ldots b$, respectively, for each set of layers. By defining an expression in this way, one can visually verify the consistent mapping of subsets of layers of the studied structure and the search for an equivalence relation with respect to symmetry with respect to the above subspaces. It is easy to make sure that it is possible to set such a partition of the structure under study, which will ensure work not with fractions, but with natural numbers - for this, instead of nodes, you can simply use the product of $(d-c) * a * b * d$ and display subsets of successive layers with power (read thickness or number of intervals) numerically equal, respectively: $h_k = d^2$, $h_l = d^2 - c^2$, $h_j = b^2$, $h_i = a^2$, as in Fig.7.3.

As a result of this representation, the Figure will have symmetry of the second degree and any layers in it will be commensurate, which indicates the potential possibility to

find four hypercubes with integer edges for the above formula.

The method of determining solvability described in the last example is necessary, but insufficient condition for finding a positive answer to the question. In the penultimate example, it is a sufficient condition for formulating a conclusion about the unsolvability of the Diophantine equation.

18 Summing up

For physicists, a look at the cube is enough to understand the proof of Fermat's Last Theorem. Let's go to the right side of the equation: $a^n = c^n - b^n$ and imagine the construction in n-dimensional space corresponding to this expression. On the left you see a hypercube of dimension n, a symmetric figure. On the right you see a set of layers of dimension one less. This set will be asymmetric or will have an irrecoverable symmetry defect or a violation of the continuity of the layers for dimension n > 2, because elements of dimension form 1 to n-1 belong to a layer (use the rule triangle inequality). It is impossible to describe the same construction as an object in such a contradictory way. There is a conflict in the properties of dimensionality, continuity or symmetry. Therefore, such a construction does not exist in nature!

It turned out that very simple tools were all we needed: constructions in the form of an ordinary wooden cube for children's creativity, a globe, a chess set, a tape recorder on reels, a stencil, a right-angled triangle to prove Fermat's Theorem in a way that was understandable even to the blind. It is enough to feel with your fingers the faces, the edges of the cube or the meridian on the globe, concentrating on symmetry and maintaining the dimensions of the figures compared. These simple tools also allow us to infer the asymmetry of our universe! Look at the faces of beautiful women and notice that man, a child of the universe, must be slightly asymmetrical to be beautiful. Is this by chance?

19 Conclusuion

Interestingly, in the theories of the concentric spheres of the ancient Greeks Eudoxus, Callippus and Aristotle, the Earth was at the centre of the universe and was surrounded by symmetrical spheres, which were considered perfectly symmetrical [Pto+98]. But it turns out that even when working with your symmetrical spheres, it's easy to make sure that this design doesn't correspond to any physical object in nature. This phenomenon was called in ancient Greece aporia, or logically consistent constructions that do not correspond to anything. Surprisingly, we came to the same conclusion both for the case of working with n-cubes and balls!

[Pto+98]: Ptolemy et al. (1998), *Almagest: or Mathematical Composition in Thirteen Books*

From a philosophical point of view, Fermat's Last Theorem contains a conflict between the content (volume) of nested hypercubes and their shape: the condition for central symmetry and continuity of layers. It is possible to achieve consistency of content at the expense of form and vice versa. This conflict can be overcome only in two-dimensional space, where Pythagorean triples exist as a rare phenomenon of harmony.

Figure 19.12: In 2006, Grigory Perelman was awarded the Fields Medal International Prize for solving the Poincare conjecture for his contributions to geometry and his revolutionary ideas in studying the geometric and analytical structure of the Ricci flow. The mathematician refused the Clay Mathematical Institute award for solving one of the Millennium Problems.

This is reminiscent of the fundamental Heisenberg uncertainty relation in quantum mechanics, which sets a limit to the accuracy of simultaneous measurement of a pair of physical quantities describing a system, such as the momentum and position of a particle.

An absolutely symmetrical universe is impossible. For the emergence of matter, the possibility of chemical reactions and the origin of life, it is necessary to operate with the concept of volume /measure by preserving the amount of matter. These conditions are provided only in slightly an asymmetric, anisotropic space. For $n > 2$, this is impossible in an isotropic (centrally symmetric), homogeneous space, as postulated in the axioms of Euclidean geometry. The deep nature of this contradiction stems from the fundamental physical properties of our universe.

The Russian mathematician Grigory Perelman proposed a method for proving the Poincare hypothesis, a problem in mathematics formulated at the beginning of the 20th century. The essence of the hypothesis: if a three-dimensional space

is closed, has no edges, and any loop in it can be pulled into a point, then it should be equivalent to a three-dimensional sphere.

If it were perfectly symmetrical, like the studied construction of concentric spheres, then matter with its inherent properties of conservation of matter/measure could not arise in it.

Space in mathematics and physics

A Hilbert space is a complete space with a scalar product. The Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is a special case of it. Mathematically, in Euclidean space, the scalar product and the norm generated by it (the length of the vector) are invariant with respect to rotations (orthogonal transformations).

This means that if you take a vector and rotate the entire coordinate system, its length will not change. Formally: For any orthogonal transformation O (such that $O^T O = I$) and any vector v, $||Ov|| = ||v||$ is performed. It seems that space is "isotropic" because there is no specific direction in it, and rotations preserve their structure.

What's the catch? In contrast to physical isotropy, physical isotropy is tested experimentally. It involves physical processes occurring in space-time: the propagation of light, the movement of particles, and the passage of clocks.

The key difference is:

Euclidean space: In it, the propagation speed of any signal or interaction is unlimited. The distance is determined by the Euclidean metric $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. The cones of the past and the future are unlimited.

Minkowski space-time (Special theory of Relativity): It is isotropic in the relativistic sense! The speed of light c is the same in all directions for all inertial observers. Metric $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. There is a dedicated invariant cone, the light cone. Rotations in spacetime (Lorentz transformations) preserve this metric and, consequently, the speed of light.

Resolution of the paradox: The Euclidean metric is mathematically symmetric with respect to rotations, but this symmetry does not coincide with the symmetry of real physical space-time. Euclidean space is a "slice" of constant

time in Minkowski space-time, but the passage of time itself and the causal structure are absent in it.

The confusion arises from the confusion of two concepts:

- Geometric isotropy (rotational invariance) of an abstract vector space. Euclidean space has it. The physical isotropy of space-time, which includes not only the geometry of spatial sections, but also the behaviour of time, light, and causality. Hilbert/Euclidean space is not a model of spacetime, so this property does not apply to it.

Thus, by investigating Fermat's Great Theorem, we have approached questions of physics and worldview, without even applying higher mathematics, general relativity and complex differential equations to illustrate the principles of the origin of our universe. The assumptions that were made within the framework of Euclidean geometry, as applied to cosmic scales, become inaccurate. Here, non-Euclidean geometry is already at work. In anisotropic space, the conflict between the form and the content of the structures we study is constructively resolved, but this requires abandoning Euclidean geometry! In an anisotropic space, the conflict between the shape and content of the structures we study is constructively resolved, but for this it is necessary to abandon the geometry of Euclid!

Figure 19.13: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) was a Russian mathematician, one of the discoverers of non-Euclidean ("hyperbolic") geometry, a figure in university education and public education.

Take a look at the portrait of the Russian scientist Nikolai Ivanovich Lobachevsky, rector of Kazan University, a mathematician who carefully studied the fifth postulate of Euclid, the axioms of which we considered, and formulated his so-called "imaginary geometry". Subsequently, this geometry was called Lobachevsky geometry. The reader can familiarize himself with the geometry of Lobachevsky [Efi04] and the biography of this unusual scientist in [Kol65].

[Efi04]: Efimov (2004), *Higher Geometry*

[Kol65]: Kolesnikov (1965), *Lobachevsky*

It turned out that Lobachevsky geometry surprisingly well describes the concept of space-time interval, the Lorentz transformation. The echoes of the Big Bang manifest themselves in the form of cosmic microwave background radiation, low-temperature photons with a temperature of 2.72 Kelvin, which can be studied using the latest equipment and obtain information about the anisotropy of our universe.

Indeed, the 1983-1984 Russian relic experiment confirmed the anisotropy of the relic radiation, the "echo" of the Big Bang.

The measurements were carried out using a radiometer developed at the Institute of Space Research of the USSR Academy of Sciences, in the group of Igor Arkadyevich Strukov (the general management of the program was carried out by academician Nikolai Semenovich Kardashev) on the launched satellite Forecast-9. In 2006, the discovery of Russian scientists was "appreciated" by awarding the Nobel Prize in Physics to Americans George Smoot and John Mather for repeating the results of Russian physicists, but with greater accuracy. [Sku10] The names of Russian scientists remained in the shadows.

[Sku10]: Skulachev (2010), «Correlation of data on anisotropy of relic radiation in WMAP and Relikt-1 experiments»

The above proof is presented with a focus on school knowledge. For a deeper acquaintance with the theory of prime numbers, readers can refer to the specialized literature, which deals with important issues: simple and compound numbers, arithmetic functions, the theory of comparisons, primitive roots and indices, continued fractions, algebraic and transcendental numbers, properties of primes, the theory of Diophantine equations.

In addition, it is recommended: [Wei72], [Tit53].

[Wei72]: Weil (1972), *Foundations of Number Theory*

[Tit53]: Titchmarsh (1953), *Theory of the Riemann Zeta Function*

to understand the algorithmic aspects of number theory with applications in cryptography (checking large primes for primality, factoring large numbers, discrete logarithm) and using computers.

There is work ahead to develop Russian science, engineering and the revival of the system of state registration of scientific discoveries, which was lost due to the decision. No. 156 of the Presidium of the USSR Academy of Sciences dated May 14, 1991. In this acutely competitive situation, the author was forced to continue his research to find short, understandable proofs of the ABC hypothesis, from which the FLT proof also follows.

Skeptics continue to believe that Pierre de Fermat was most likely mistaken. Meanwhile, consistent application of the basic principles of physics and geometry makes us think differently. The work on Fermat's theorem gave impetus to the development of number theory, which also describes the laws of the physical world, but indirectly. The paradigm shift allows us to see this connection in a visual representation. The dramatic story of the discovery of Fermat's theorem and the search for visual proofs should become part of school/university training.

Arithmetic functions and thermodynamics

Arithmetic functions and thermodynamics 10

Arithmetic functions in number theory are functions defined on the set of natural numbers $\mathbb{N}$ and taking values from the set of complex numbers $\mathbb{C}$ (formally: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Their name is due to the fact that they express certain **arithmetic properties of natural numbers** — for example, the number of divisors, the sum of divisors, the number of mutually prime numbers, etc. Although the values can be complex, many important arithmetic functions in practice turn out to be integer.

Key arithmetic functions (and their properties) are studied in number theory:

- the Euler function discussed above $\varphi(n)$(totient) is the number of natural numbers that do not exceed n and are coprime with n;
- Mobius function $\mu(n)$;
- Chebyshev functions $\theta(n)$ and $\psi(n)$;
- the Mangold function $\Lambda(n)$;
- function $\tau(n)$ is the number of divisors of n;
- function $\sigma(n)$ is the sum of the divisors of n

Special operations are defined for arithmetic functions:

- sum of a function (analogous to a discrete integral);
- Dirichlet convolution (analogous to multiplication of functions);
- Dirichlet series (generating function).

These tools allow you to explore:

- distribution of function values;
- asymptotic behavior;
- links between different arithmetic properties of natural numbers.

1 Euler's Totient Function 475
2 The Mangold function 479
3 Chebyshev functions and entropy 482
4 Mobius function $\mu(n)$ 489
5 Relation of hypercube difference, sign measure, and Mobius function . . 490
6 Definition of the Dirichlet transformation 493
6.1 Examples of Dirichlet transformations 494
7 Dirichlet convolution and Dirichlet series 495
8 Place of p - number in physics 498
9 Grundy series and Schrodinger's quantum uncertainty . . 500

1 Euler's Totient Function

Euler's totient function $\varphi(n)$ is the number of integers from 1 to n that are coprime to n. Its calculation is based on multiplicativity and the canonical prime factorization of a number.

It is a powerful tool that connects prime numbers, modular arithmetic, and algebraic structures, playing a critically important role in modern encryption systems.

Definition and Notation

Euler's totient function (denoted $\varphi(n)$, read as "phi of n") is an arithmetic function that, for a natural number n, equals the number of natural numbers less than n and coprime to n. Coprime numbers (or relatively prime numbers) are numbers whose greatest common divisor (GCD) is 1.

Definition 1.1

$$\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n,\ \gcd(k, n) = 1\}.$$

Some values of $\varphi(n)$:

- $\varphi(1) = 1$ (by definition, the number 1 is coprime to itself).
- $\varphi(5) = 4$, since the numbers coprime to 5 are 1, 2, 3, 4.
- $\varphi(10) = 4$, since the numbers coprime to 10 are 1, 3, 7, 9.

Key Properties and Derivation of the Formula

The function $\varphi(n)$ is multiplicative. This is its main property. It means that if two numbers a and b are coprime ($\gcd(a, b) = 1$), then:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

It is precisely from this property that the general formula is derived.

Step 1. The Case of a Prime Number

For a prime number p, all numbers from 1 to $(p - 1)$ are coprime to p. Only the number p itself is not coprime.

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Example: $\varphi(7) = 6$.

Step 2. The Case of a Prime Power

Consider p^k, where p is prime. Which numbers from 1 to p^k are not coprime to p^k? These are the numbers divisible by p. They are easy to count: these are p, $2p$, $3p$, ..., p^k. The total number of such numbers is $\frac{p^k}{p} = p^{k-1}$.

The total number of integers from 1 to p^k is p^k. Subtract the number of "unsuitable" ones:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Example: $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$. Indeed, the numbers coprime to 8 are 1, 3, 5, 7.

Step 3. The General Case (Canonical Factorization)

Any natural number $n > 1$ can be uniquely represented as a product of prime powers (canonical factorization):

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m},$$

where all p_i are distinct prime numbers.

Since powers of different primes are coprime, we can apply the multiplicative property:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}) \cdot \varphi(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_m^{k_m}).$$

Substituting the formula for $\varphi(p_i^{k_i})$ from step 2:

$$\varphi(n) = \left[p_1^{k_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\right] \cdot \left[p_2^{k_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\right] \cdot \ldots \cdot \left[p_m^{k_m} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\right].$$

Factoring out n:

This results in the previously used formula:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_m}\right). \tag{1.1}$$

Example 1.1 (Calculation Example) Let $n = 100$. Canonical factorization: $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Using the formula:

$$\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 100 \cdot \frac{4}{10} = 40.$$

Let's verify: there are indeed 40 numbers coprime to 100 (e.g., all odd numbers except those ending in 5).

Practical Significance and Euler's Theorem

Euler's totient function is not just an abstract counter. It lies at the heart of Euler's theorem, one of the cornerstones of number theory and cryptography.

Theorem 1.1 (Euler's Theorem) *If a and n are coprime ($\gcd(a, n) = 1$), then*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Special Case for Prime n (Fermat's Little Theorem).

Theorem 1.2 (Fermat's Little Theorem) *If p is prime and a is not divisible by p, then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, since $\varphi(p) = p - 1$.*

Applied Areas of the Function

- Cryptography (RSA): This is the most famous application. Euler's totient function is part of the public and private keys in the RSA algorithm. The difficulty of computing $\varphi(n)$ for a number $n = p \cdot q$ (the product of two large primes) without knowing the factors p and q ensures the cryptographic strength of RSA.
- Group Theory: $\varphi(n)$ equals the order of the multiplicative group of the ring of integers modulo n (the number of invertible elements modulo n).
- Solving congruences, theory of power residues.
- Combinatorics and Probability Theory: For example, the probability that a randomly chosen number from 1 to n is coprime to n is $\frac{\varphi(n)}{n}$.

Corollary 1.3 (frametitle=Fundamental result) *Finally, this led to the main conclusion of this monograph: it was deduced from the Lemma on Orthogonality and Coprimality 6.3 that to ensure unique counting of each microstate, it is necessary to eliminate common divisors in the expression for partition functions and their product 6.7. For this, it is necessary to introduce a correction factor $\frac{\phi(\Gamma)+1}{\Gamma} \quad n = \Gamma$, which accounts for the order of the group: the number of cosets of completely reducible representations plus one 8.8.*

It is interesting to note that due to the bijective relation $\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} \mapsto$ p_i, the factor in formula 1.1 for finding Euler's totient function via prime numbers is completely analogous to the set of prime

numbers taken from the finite matrix $\breve{D}(n)$, which appear in the expression for $Rad(abc)$ on the main diagonal of the submatrix 3.5.

Such an interconnection is explained by the fact that a single element generates an infinite series of microstates. This principle is embodied in the partition function. By choosing a natural basis, the computation of averages can be limited to the number of microstates equal to the order underlying the cyclic subgroup.

A similar effect when working with a diffraction grating involved avoiding order overlap 7.9. At the level of statistical physics, this effect consists in ensuring the single counting of each microstate 2.2. The Chinese Remainder Theorem helps to explain important principles of statistical physics to middle school students through a set of coprime moduli defining an orthonormal basis (with a cyclic structure) for representing numbers 7.3.

2 The Mangold function

The Mangoldt function $\Lambda(n)$ is an arithmetic function introduced by the German mathematician Hans von Mangoldt in 1894. It plays an important role in the theory of prime numbers, in particular, in proving the law of their distribution.

Definition 2.1 (Definition of the Mangold function $\Lambda(n)$) *The Mangoldt function $\Lambda(n)$ is defined as follows for a simple p and an integer $m \geq 1$,*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{if } n = p^m \text{ for simple } p \text{ and } m \geq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

In other words:

- if n is the power of a prime number (p^m, where p is prime and m is natural), then $\Lambda(n) = \ln p$;
- if n is not a power of a prime number, then $\Lambda(n) = 0$.

Examples of values For the first natural numbers, the function

takes the values:

$$\begin{aligned}
&\Lambda(1) = 0 \quad (1 \text{ is not a power of a prime number});\\
&\Lambda(2) = \ln 2 \quad (2 = 2^1);\\
&\Lambda(3) = \ln 3 \quad (3 = 3^1);\\
&\Lambda(4) = \ln 2 \quad (4 = 2^2);\\
&\Lambda(5) = \ln 5 \quad (5 = 5^1);\\
&\Lambda(6) = 0 \quad (6 = 2 \cdot 3 \text{ — not a prime});\\
&\Lambda(7) = \ln 7 \quad (7 = 7^1);\\
&\Lambda(8) = \ln 2 \quad (8 = 2^3);\\
&\Lambda(9) = \ln 3 \quad (9 = 3^2).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Basic properties

1. Total property (follows from the fundamental theorem of arithmetic):
$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n,$$
where the sum is taken over all divisors d of the number n
2. Expression in terms of the Mobius function $\mu(d)$ (Mobius inversion formula):
$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d} = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d.$$
3. Relation to the Riemann zeta function $\zeta(s)$ for $\operatorname{Re} s > 1$:
$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n},$$
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$
4. Relation to L Dirichlet functions $L(s, \chi)$ (for the character χ):
$$\ln L(s, \chi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s \ln n},$$
$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

5. Asymptotic relations (for $x \to \infty$):

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} \sim \ln x,$$

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n \ln n} = \ln \ln x + \gamma + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

where γ is Euler's constant, c is some positive the constant.

Separately, we should consider the relationship of $\Lambda(n)$ with the $\psi(n)$ Chebyshev functions and the ζ Riemann functions.

Connection to $\psi(n)$by Chebyshev function

$\psi(n)$ The Chebyshev function $\psi(x)$ is defined as an adder function of $\Lambda(n)$:

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

In short, $\Lambda(n)$ helps to study the distribution of primes and is used in the proof of the prime number theorem. $\Lambda(n)$ is used to express the logarithmic derivative of the ζ function (Perron's formula):

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}\, dx, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Corollary 2.1 *The Mangoldt function is a key tool in analytical number theory:*

- *proof of the prime number distribution theorem;*
- *studying the zeros of the Riemann zeta function;*
- *analysis of L Dirichlet functions;*
- *estimation of sums related to prime numbers and their powers. From the point of view of thermodynamics, the*
- *Mangoldt function expresses the probability of finding a particle in a microstate corresponding to the energy level $p \mapsto e^{\beta p}$, in other words, a state generated on the basis of a prime number p.*

3 Chebyshev functions and entropy

Definition 3.1 *Riemann specifically introduced the function $\pi(n)$ to denote the number of primes not exceeding n.*

Chebyshev's arithmetic functions are defined by the following expressions. For the case of $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} log(x), \quad p > 0 \tag{3.1}$$

From the definition of entropy 3.1 using logarithm averaging of values following the trace of a finite-dimensional matrix $\check{D}$3.1, it follows that the physical meaning of Chebyshev functions is related to entropy in a natural basis. Let p_n be the nth prime number, then $\pi(p_n) = n$, where $\pi(x)$ is the Riemann function, defined as the number of primes not exceeding the integer x. Taking into account the definition of a finite-dimensional matrix 3.1, we have for such: p_n

The physical meaning of the θ Chebyshev function

p_n —n is the th prime number, and $\pi(p_n) = n$

$$\begin{aligned} \pi(p_n) &= n \\ e^{\theta(n)} &= \left\langle \mathrm{Tr}\, log\check{D}(n) \right\rangle = S_{D(n)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

The number L — is the dimension of the Hilbert space of the system $D(n)$, i.e. the number of all linearly independent states $\mathrm{Tr}\,\underline{E}$ that are taken into account in the description under consideration.

Here, the average value of the logarithm is taken in the formula above. This means that each prime in a sequentially increasing series of primes $2, 3, \ldots p_n$ occurs only once, see 3.3. In other words, the entropy is found using the expression $S_{D(n)}$ for a system without degenerate energy levels, which implies the absence of algebraic multiplicity in the characteristic polynomial $detD(n)$.

The Chebyshev function $\psi(x)$ is defined by a slightly different expression:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} log(x), \quad p > 0 \tag{3.3}$$

$\Longrightarrow e^{\psi(x)}$ is the smallest common multiple of all positive integers $\leq x$. It is also obvious by analogy:

The physical meaning of the ψ Chebyshev function

p_n —n is the th prime number, and $\pi(p_n) = n$

$$\begin{aligned} \pi(p_n) &= n \\ e^{\psi(n)} &= S_{\tilde{D}(n)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

The dimension of the Hilbert space (diagonal length of the density matrix $\breve{D}(n)$) is equal to $\mathrm{Tr}\,\underline{E}$ the sum of the multiplicities of degeneracy over all energy levels of the system $L = \sum_{i=1}^{k} g_i$

Entropy is calculated by $S_{\tilde{D}(n)}$ for a system with degenerate energy levels, the characteristic polynomial $det\tilde{D}(n)$ contains eigenvalues with algebraic multiplicity ≥ 1

Of the two defined Chebyshev functions [Cha74], their relationship follows according to the following formula:

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots \tag{3.5}$$

This series is finite because $\theta(x) = 0$ for $x < 2$. If $p^m < x < p^{m+1}$, then $log(p)$ occurs in 3.3 exactly m times $m = \left[\frac{log(x)}{log(p)}\right]$, and therefore:

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{log(x)}{log(p)}\right] log(p) &\leq \sum_{p \leq x} \frac{log(x)}{log(p)} log(p) \\ &= log(x) \sum_{p \leq x} 1 = log(x)\pi(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

The model embedded in the ABC hypothesis corresponds to the thermodynamic system $\tilde{D}$, which is in thermal equilibrium with the supersystem 9.5. With adiabatic changes according to Liouville's theorem, the phase volume is preserved and $S_D = S_{\tilde{D}}$. Liouville's theorem and the conservation of entropy under adiabatic changes remain valid for the case of $\breve{D}$. It is this principle that lies in the interrelationships of the Chebyshev functions $\psi(x)$ and $\theta(x)$.

In [Cha74] §2, it is stated that if one of the three functions:

[Cha74]: Chandrasekharan (1974), *Introduction to Analytic Number Theory*

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \qquad \frac{\theta(x)}{x} \qquad \frac{\psi(x)}{x} \tag{3.7}$$

has a limit at $x \to \infty$, then the other two functions also have limits at $x \to \infty$ and all these three limits coincide.

Proposition 3.1 (asymptotic distribution law p) *Thus, in order to prove the asymptotic law of the distribution of primes, it suffices to prove that* $\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$.

Fractions of $\theta(x)x$ and $\frac{\psi(x)}{x}$ can be interpreted as specific values of the Chebyshev functions $\theta(x)$ and, respectively, $\psi(x)$ based on the number of quantum levels L. For comparison, in thermodynamics, such a quantity is understood as the density of energy levels in the energy representation of $\frac{\Delta\Gamma}{dE}$. In the case under consideration, the matrix $D(n)L = \pi(x) = n$ due to the conditions 3.2.

Based on this interpretation, the conclusion follows: $S_{D(n)} = \log n$ is the entropy of the maximally mixed state. Let's explore the question, what does $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}$ mean?

S thermodynamic and S according to Shannon and von Neumann

Temperature T does not explicitly appear in the formulas of information entropy according to Shannon and von Neumann 12. At the same time, in phenomenological thermodynamics, entropy S is inextricably linked to temperature:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{fr}}}{T}, \qquad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}, \qquad E = U - TS.$$

There is a seeming contradiction: why is there no temperature T in the definition of entropy as a measure of uncertainty, which refers to the main thermodynamic variables?

Hierarchy of entities

Information entropy (general level) The formulas of Shannon and von Neumann describe **uncertainty measure** of

any probability distribution or quantum state. They apply to:

- texts and data
- for non-equilibrium physical systems
- for quantum states (pure and mixed)
- **including** for equilibrium thermodynamic systems

Temperature (T) does not appear at this level, since the concept of entropy is broader than the concept of thermodynamic equilibrium.

Statistical Mechanics (bridge between levels) Statistical mechanics postulates: **thermodynamic entropy is equal to the information entropy calculated for the Gibbs equilibrium distribution**.

For a system in thermal equilibrium with a thermostat at temperature T:

$$w_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i}.$$

Substitute the Gibbs distribution into the Shannon formula:

$$\begin{aligned} S &= -\sum_i w_i \ln w_i \\ &= -\sum_i w_i \ln\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}\right) \\ &= -\sum_i w_i \left[-\ln Z - \beta E_i\right] \\ &= \ln Z \underbrace{\sum_i w_i}_{=1} + \beta \underbrace{\sum_i w_i E_i}_{=\langle E \rangle} \\ &= \ln Z + \frac{\langle E \rangle}{T}. \end{aligned}$$

By the definition of free energy $F = -T \ln Z$. In addition, $\langle E \rangle$ is the average value of the energy of the system in the thermodynamic sense, and therefore:

$$S = \frac{E - F}{T} \quad \Rightarrow \quad F = E - TS,$$

which exactly corresponds to the thermodynamic definition.

Temperature as a derivative of entropy In statistical mechanics, temperature arises naturally from the condition of maximizing entropy at a fixed average energy $\langle E \rangle = U$:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N}.$$

This ratio:

1. Determines the temperature for equilibrium systems
2. Shows that T is a parameter that characterizes the dependence of entropy on energy
3. is not executed for nonequilibrium systems (where the temperature may not be determined)

Physical interpretation

- Information entropy is a measure of our ignorance about the microscopic state of the system.
- Thermodynamic entropy is the same measure, but calculated for a specific (equilibrium) distribution.

Thus, temperature T is a parameter that a) determines the shape of the equilibrium distribution (Gibbs) b) characterizes how "energy intensive" an increase in entropy is. c) It appears only when considering systems in thermal equilibrium.

S thermodynamic and S according to Shannon and von Neumann

Example 3.1 (Example: a two-tier system) Consider a system with two energy levels: $E_0 = 0$, $E_1 = \varepsilon$. Gibbs distribution:

$$w_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}, \quad w_1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}.$$

Shannon entropy:

$$S = -\left[w_0 \ln w_0 + w_1 \ln w_1\right].$$

This entropy:

- Depends on T through $\beta = 1/(T)$
- At $T \to 0$: $S \to 0$ (system in ground state)
- For $T \to \infty$: $S \to \ln 2$ (equally probable states)
- All derivatives $\partial S/\partial U$ give the correct temperature

S thermodynamic and S according to Shannon and von Neumann

Corollary 3.2 (The general definition of entropy) ►

The Shannon and von Neumann formulas define the general *definition of entropy; the thermodynamic formulas are a* special case *for equilibrium.*

- ***Temperature*** *T is not included in the definition of entropy, but defines the* specific distribution *(Gibbs) for which information entropy becomes thermodynamic entropy.*
- ***Statistical mechanics*** *is the bridge: $S_{Thermodyn} = S_{Shannon}(w_i^{Gibbs}(T))$.*
- *For nonequilibrium systems, the concept of temperature may not be defined, but the Shannon/von Neumann entropy remains a valid measure of uncertainty.*

Thus, the apparent contradiction is resolved by understanding the hierarchy:

$$S_{\text{information}} \xrightarrow[\text{equilibrium}]{\text{condition}} \text{Gibbs distribution.}$$

The formulas of thermodynamics with the parameter

$\beta = \frac{1}{T}$ follow from this expression.

Due to the stationary temperature of the system under study, the expressions $\frac{\theta(x)}{x}$ and $\frac{\psi(x)}{x}$ converge to a constant. Let's prove this first for $\theta(n)$ (condition: p_n —n is the th prime number, and $\pi(p_n) = n$):

$$\frac{\theta(n)}{n} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial E} = \xrightarrow{\frac{\ln p_i + \ln p_{i+1} + \ln p_{i+2} \ldots}{p_i + p_{i+1} + p_{i+2} \ldots}} \text{Const.} \tag{3.8}$$

Here, in the numerator and denominator of the fraction, there are prime numbers taken from the main diagonal (under)matrices $\breve{D}(n)$, where they are arranged in ascending order. The largest contribution is made by the higher terms. Energy and entropy are additive functions. (The probabilities of incompatible events also add up, i.e. they have the property of additivity provided that the sum does not exceed 1. Therefore, $\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \log x$, which corresponds to the entropy of S. By virtue of the isomorphism relations discussed in the chapter on the ζ-Riemann function 6.2, we have: $p \mapsto e^{\beta p}$ and similarly $p \mapsto \ln p$. This is reminiscent of Lopital's rule.

It is appropriate to recall the connection between thermodynamic entropy and Shannon and von Neumann entropy. 3 relation $\frac{\ln p_i}{p_i} = \beta$, where $\beta = \frac{1}{T}$ is the same temperature at any point of the system under study.Any thermodynamic system can be decomposed into vectors of a natural basis (the basis is complete). Due to the additive property of entropy S and energy E, the relation 3.8 will be fulfilled under the same conditions for the case of $\frac{\theta(x)}{x} \quad x \in \mathbb{N}$.

By virtue of 3.2, 3.4, Liouville's theorems and the completeness of the natural basis for the Chebyshev function $\theta(n)$, the expression and value of the constant will be preserved. The restriction of the Chebyshev function from above 3.6 leads to the conclusion that in 3.8 $Const = 1$.

Thus, the Chebyshev functions and the Riemann function, as well as the relations between them, have a thermodynamic basis, and by understanding their physical meaning, important estimates can be made almost without calculations.

4 Mobius function $\mu(n)$

The Mobius function $\mu(n)$ is an arithmetic function that is defined as follows:

(i) $\mu(1) = 1$;
(ii) $\mu(n) = (-1)^k$ if n is the product of k distinct primes;
(iii) $\mu(n) = 0$ otherwise, i.e. if n is divisible by the square of an integer other than one.

The definition immediately implies

Lemma 4.1 *The Mobius function $\mu(n)$ is multiplicative.*

The proof of this lemma follows directly from the definition.

Theorem 4.2 *The ratio is fair*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 0, & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

Proof. Let $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ be the canonical expansion of the number $n > 1$. The divisors d of the number n for which $\mu(d) \neq 0$ have the form

$$1,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m,\ p_ip_j\ (i \neq j),\ p_ip_jp_k\ (i \neq j \neq k),\ \ldots,\ p_1p_2\ldots p_m. \tag{4.1}$$

Then

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{i} \mu(p_i) + \sum_{i<j} \mu(p_ip_j) + \ldots + \mu(p_1p_2\ldots p_m) \tag{4.2}$$

and therefore

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots = (1-1)^m = 0. \tag{4.3}$$

□

Let p_n be the nth prime number, and $\pi(p_n) = n$. Let's denote by $\breve{D}' = D' = d \in diag(\breve{D}(n)$, which selects only unique values of primes from the main diagonal of the matrix $\breve{D}$, without repetition, and compare the last expression with a characteristic polynomial:

$$f_{D'}(\lambda) = det\,(\lambda I - D) = \prod_{j=1}^{\pi(n)} (\lambda - p_j) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda^{m-i}(-p)^i \tag{4.4}$$

where m is the product of a consecutive series of the first $\pi(n)$ primes starting from 2. Expressions 4.3 and 4.4 are structurally equivalent. Moreover, if we take a characteristic polynomial in the form of a matrix function, substitute $\lambda = 1$, and instead of a prime number, use the unit ort $p_i = |e_i|$, taking into account its sign (+ - by and − - against the direction of the vector), then the two last equations will become identical. This idea requires more careful consideration.

5 Relation of hypercube difference, sign measure, and Mobius function

Consider the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with the Lebesgue measure λ. For $a > 0$, we define a hypercube:

$$Q_a = [0, a]^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le a \ \forall j\}.$$

For $0 < b < a$, consider the layer between the cubes:

$$S_{a,b} = Q_a \setminus Q_b.$$

Its volume is known:

$$V_{a,b} = \lambda(S_{a,b}) = a^n - b^n.$$

Decomposition by inclusions and exclusions

For a nonempty subset of $J \subset \{1, \ldots, n\}$, we define the set:

$$F_J = \{x \in Q_a \mid x_j > b \text{ for all } j \in J\}.$$

There are no restrictions other than $0 \le x_j \le a$ on coordinates that are not included in J.

The volume of F_J is equal to:

$$\lambda(F_J) = (a-b)^{|J|} a^{n-|J|}.$$

Applying the inclusion-exclusion principle to the events $A_j = \{x \in Q_a : x_j > b\}$, we obtain the equality of the indicator functions:

$$\mathbf{1}_{S_{a,b}}(x) = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|-1} \mathbf{1}_{F_J}(x).$$

Integration gives an alternating formula for volume:

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (a-b)^k a^{n-k}. \tag{1}$$

Analogy with the Mobius function

Let $n = p_1 p_2 \dots p_m$ be the product of various prime numbers. The Mobius function $\mu(d)$ for the divisor of d is equal to $(-1)^k$ if d is the product of k different prime factors of $\{p_1, \dots, p_m\}$, and 0 otherwise.

A well-known identity:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0. \tag{2}$$

Comparing (1) and (2), we see the structural similarity:

- In (1), the number of terms with $|J| = k$ is $\binom{n}{k}$, the sign is $(-1)^{k-1}$.
- In (2), the number of divisors with k prime factors is $\binom{m}{k}$, the sign is $(-1)^k$.

Both expressions are alternating binomial sums that provide full compensation in the extreme case.

Limit transition $b \to a$

Let's assume $t = a - b > 0$. Then (1) is rewritten as:

$$a^n - (a-t)^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} t^k a^{n-k}.$$

At $t \to 0^+$ (i.e., $b \to a^-$), the right-hand side tends to zero. Geometrically, the layer $S_{a,b}$ thins at the boundary of Q_a and

"collapses" into an $(n-1)$-dimensional set of zero Lebesgue measure.

This process can be implemented by isotopy (family of continuous reversible embeddings) $Q_b \hookrightarrow Q_a$ with b varying from 0 to a.

Formalization in terms of symbolic measures

Let $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ be the space of finite signed measures on $\mathbb{R}^n$. For a measurable set A, we denote by $[A]$ the Lebesgue measure bounded by A.

Then equality(1) can be written as the identity in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$:

$$[S_{a,b}] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{|J|=k} [F_J]. \tag{3}$$

For $b \to a$, each measure $[F_J]$ weakly converges to a measure centered on the face of the cube Q_a, determined by the conditions $x_j = a$ for $j \in J$. The sum in (3) becomes a zero measure, which corresponds to the topological degeneracy of the layer.

The principle of symmetry

Both identities — (1) for the hypercube difference and (2) for the Mobius function — express the same principle of combinatorial symmetry: An alternating sum over all subsets of a finite set (coordinates or prime factors) yields zero, except in the trivial case when the original set is empty.

In geometric interpretation, this principle manifests itself as the mutual destruction of the contributions of overlapping regions when calculating the measure of the difference of sets.

Corollary 5.1 *Thus, the formula*

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (a-b)^k a^{n-k}$$

is not It is not only an algebraic identity, but also reflects the deep connection between:

1. *by measure theory (decomposition of the signed measure of a layer);*

2. *by Combinatorics (the principle of inclusions and exclusions);*
3. *Topology (maximum shrinkage of the layer during deformation);*
4. *By number theory (analogy with the Mobius function).*

This relationship allows us to consider the volume difference of hypercubes as a topological-arithmetic invariant with the property of complete compensation in the limit.

Symmetry in the Mobius function

This means that the Mobius function is closely related to the structure of the layers of the hypercube, and therefore to the isotropy of space. One can imagine the reverse operation in the form of removing a layer of the unit cube 1^m, which consists in sequentially subtracting each hypergrane, each equivalence class. This analogy of formulas proves the validity of the natural basis model, where each prime number is considered as an orthogonal vector. (It was found above that primes are the generating group of natural numbers $\mathbb{N}5.3$). Literally, in the last formula of the characteristic polynomial, you can replace each prime with unit orts to verify the homomorphism of the algebras.

6 Definition of the Dirichlet transformation

Definition 6.1 (Dirichlet transformation) *The Dirichlet transformation is an operation on an arithmetic function f, the result of which is a new arithmetic function F, defined by the formula:*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad n \in \mathbb{N},$$

where summation is performed over all positive divisors d of the number n.

Relation to multiplicativity

If f is a multiplicative function, then its Dirichlet transformation F is also multiplicative.

Conversely, if F is multiplicative, then f is multiplicative.

Mobius conversion formula

If F is the Dirichlet transform of the function f, then:

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

where μ is the Mobius function.

Associativity with convolution

The Dirichlet transform can be expressed in terms of Dirichlet convolution:

$$F = f * \mathbf{1},$$

where $\mathbf{1}(n) = 1$ for all n.

6.1 Examples of Dirichlet transformations

For the unit function $\mathbf{1}$

$$F(n) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n),$$

where $\tau(n)$ is the number of divisors of n.

For the Euler function φ

$$F(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

For a power function, $f(n) = n^s$

$$F(n) = \sum_{d|n} d^s = \sigma_s(n),$$

where $\sigma_s(n)$ is the sum of the s powers of the divisors of n.

For the Mobius function μ

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Connection with Dirichlet series

The Dirichlet transformation is closely related to Dirichlet series. If

$$\mathrm{DG}(f;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

— Dirichlet series for f, then the series for the transformation $F = f * \mathbf{1}$ is:

$$\mathrm{DG}(F;s) = \mathrm{DG}(f;s) \cdot \zeta(s),$$

where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function.

Corollary 6.1 (Important corollaries) *1. Dirichlet transformation preserves multiplicativity. 2. The inverse transformation is expressed in terms of the Mobius function. 3. The operation is useful in the study of divisors, sums of functions on divisors, and analytical number theory.*

7 Dirichlet convolution and Dirichlet series

Figure 7.1: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859; German: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) — a German mathematician who made significant contributions to mathematical analysis, function theory, and number theory. In number theory, he proved the theorem on arithmetic progressions: the sequence $\{a + nb\}$, where a and b are coprime integers, contains infinitely many prime numbers.

It was said above that only unitary transformations that preserve the norms of vectors and the Hermitian properties of operators have a physical meaning, see 3.1, where the issues of invariance with respect to some transformation of the Hamiltonian of the system under study are considered.

Consider the space of arithmetic functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ with a norm defined in terms of weighted ℓ^2 is a scalar product:

$$\|f\|_\zeta^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^2}.$$

This rule is related to the Dirichlet series:

$$L_{|f|^2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^s},$$

so that $\|f\|_\zeta^2 = L_{|f|^2}(2)$.

Dirichlet convolution is defined as:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Let's examine the question under what conditions the equality holds.:

$$\|f * g\|_\zeta^2 = \|f\|_\zeta^2 \cdot \|g\|_\zeta^2$$

The case of completely multiplicative functions A function f is called **completely multiplicative** if $f(mn) = f(m)f(n)$ for all $m, n \in \mathbb{N}$ and $f(1) = 1$.

For a completely multiplicative f, its Dirichlet series can be represented as an Eulerian product:

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ simple}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

provided convergence $|f(p)p^{-s}| < 1$. In particular, for $|f(n)|^2$ (which is also quite multiplicative) we have:

$$L_{|f|^2}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - |f(p)|^2 p^{-s}}.$$

Therefore,

$$\|f\|_\zeta^2 = L_{|f|^2}(2) = \prod_p \frac{1}{1 - |f(p)|^2 p^{-2}}.$$

It is known that for any arithmetic functions f, g:

$$L_{f*g}(s) = L_f(s) \cdot L_g(s). \tag{7.1}$$

If f and g are completely multiplicative, then

$$L_{f*g}(s) = \prod_p \frac{1}{(1 - f(p)p^{-s})(1 - g(p)p^{-s})}.$$

However, $f * g$, generally speaking, is not completely multiplicative, so $L_{|f*g|^2}(s)$ does not decompose into a simple Eulerian product.

Condition for maintaining the norm

Let f and g be completely multiplicative functions, and their **carriers have disjoint sets of prime divisors**. That is, if $f(n) \neq 0$, then all the prime divisors of n lie in some set $\mathbb{P}_f$, and if $g(n) \neq 0$, then all the prime divisors of n lie in $\mathbb{P}_g$, and $\mathbb{P}_f \cap \mathbb{P}_g = \varnothing$.

Then for any n, if $n = ab$ with $\gcd(a,b) = 1$, the sum is

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

a nonzero contribution gives only the summand corresponding to the expansion $d = a$, $n/d = b$, where a contains only the primes of $\mathbb{P}_f$, and b — only from $\mathbb{P}_g$. Therefore,

$$(f * g)(n) = f(a)g(b),$$

and

$$|(f * g)(n)|^2 = |f(a)|^2 |g(b)|^2.$$

Now calculate the norm:

$$\|f * g\|_\zeta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f * g)(n)|^2}{n^2} = \sum_{\substack{a,b\geq 1 \\ \gcd(a,b)=1}} \frac{|f(a)|^2 |g(b)|^2}{(ab)^2}.$$

From the mutual simplicity of the carriers, the sum is decomposed into the product:

$$\|f * g\|_\zeta^2 = \left(\sum_a \frac{|f(a)|^2}{a^2}\right) \cdot \left(\sum_b \frac{|g(b)|^2}{b^2}\right) = \|f\|_\zeta^2 \cdot \|g\|_\zeta^2.$$

Interpretation through Eulerian products Under the condition of disjoint simple media:

$$L_{|f|^2}(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}_f} \frac{1}{1 - |f(p)|^2 p^{-s}}, \quad L_{|g|^2}(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}_g} \frac{1}{1 - |g(p)|^2 p^{-s}}. \tag{7.2}$$

Since $|f*g|^2$ for $n = ab$ $(\gcd(a,b) = 1)$ is equal to $|f(a)|^2|g(b)|^2$, we have:

$$L_{|f*g|^2}(s) = L_{|f|^2}(s) \cdot L_{|g|^2}(s).$$

Substituting $s = 2$, we obtain the desired equality of norms.

The condition is the preservation of the norm, defined in terms of weighted $\ell^T he$2-dot product is important. The main idea outlined in the chapter on the ζ function is verification through a physical experiment. It should be assumed that the summand of the form $\frac{1}{n^2}$ corresponds to the squareamplitude of the wave function. Recall that the average value of the observed f is expressed by a formula of the form 7.2, while the set of values w_{nm} are elements of the statistical density

operator in the energy representation. - they form a statistical matrix. The problem of finding such a matrix is reduced to calculating the probabilities $w_n = w_{nn}$ - these are the probabilities of finding the system in states with energy E_n, and they form the diagonal elements of the density matrix (squares of the amplitude of the wave function) see also 8.

From what has been said, the conclusion follows that the preservation of the norm, defined through a weighted ℓ^2 is due to physics. Compare this conclusion with the reasoning "Pythagorean triples exist only on the $2D$ plane" in 7.

A brief conclusion Thus, for fully multiplicative functions, the norm

$$\|f\|_\zeta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^2}$$

is preserved by Dirichlet convolution($\|f * g\|_\zeta^2 = \|f\|_\zeta^2 \|g\|_\zeta^2$) if and only if the sets of prime divisors of the carriers f and g do not intersect.

In the general case (if there are common prime divisors in the carriers), there are cross terms that violate equality, even if the functions are quite multiplicative.

Thus, the Chebyshev functions and the Riemann function, the Mobius function, and a number of relationships between them have a thermodynamic basis, and by understanding their physical meaning, important estimates can be made almost without calculations.

8 Place of p - number in physics

It is the primes that make it possible to link a system, a supersystem, and a subsystem together. The canonical Gibbs distribution was derived based on an equally probable distribution over all micro-canonical states of the system, the probability of finding a complex system 1-2 equal to the product of the probabilities of its subsystems 1 and 2: $\rho_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2$, which makes it convenient to work with logarithms and allows you to operate with additive variables. Additive functions for homogeneous quantities are the basis for a number of natural numbers, for countable sets and the production of any measurements => measurability of distances, the introduction of the concepts of metrics and measures. The properties of the

microcosm determines the properties of the macrocosm. => the multiplication operation is primary in comparison with the addition/subtraction operation. From these positions, it is possible to explain the axioms of arithmetic, introduced by Giuseppe Peano, as well as the principle of mathematical induction, widely practiced in mathematical proofs.

Table 8.1: Mathematics model. Algebra.

Difficulty of Understanding ⟶			
Prime Numbers	Integer Polynomials	Matrices. SLDEs $\mathbf{y} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$.	Quantum Mechanics. Linear Operators
2, 3, 5, 7, 11 . . . and even integers $2\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$	Irreducible Polynomials	Symmetry Group G. Completely reducible representations decomposed into irreducibles: $D = \sum_j^{\oplus} r_j D^{(j)}$	$\widehat{H}\psi = E\psi$ and entropy formula $S = -\sum_i w_i \ln(w_i)$
$g = \frac{1}{p}$ – probability density and $\underline{\tilde{Z}} = \langle g \rangle$ – group generating element	Characteristic polynomial $(\lambda - a_i)^k$ of a matrix	Statistical weight Γ and its differential $\Delta\Gamma$	Probability density $\lvert\Psi\rvert^2 = \sum_{m,n} c_m^* \cdot c_n \psi_m^* \psi_n$. Statistical matrix. Z-sum
Fundamental Theorem of Arithmetic $a = \prod_p p^{\alpha(p)}$	$f = c \prod_p p^{\alpha(p)}$	$R = R_1 \oplus R_2 \cdots \oplus R_i$. Invariant subspaces. Characteristic polynomial.	Degenerate eigenvalues of the Hamiltonian (energy level degeneracy)
The cognitive understanding of the universe	Polynomials and matrix functions	Description of dynamical processes	Modelling of the microworld
⟵ Foundations			

It is challenging to overstate the significance of prime numbers in the physical laws that govern the material world and, in a broad sense, the universe as a whole Tab. 8.1. There is a correlation between prime numbers and quantum mechanics, statistical physics, and the subsequent probability theory. The divisibility properties of prime numbers (only by one and themselves) follow from symmetry, independence, and the random nature of microstates in any thermodynamic system.

9 Grundy series and Schrodinger's quantum uncertainty

Another interesting piece of evidence in favor of the connection between arithmetic and quantum mechanics is given in the publication "A mathematical monk finds the divine in a paradoxical series of numbers" 21:49 / August 16, 2024 Source Securitylab.ru

Remark 9.1 How did the mathematical paradox lead the monk Luigi Grandi to philosophical and theological conclusions that turned the idea of infinity upside down?

The question of what is the result of an infinite mathematical series $1-1+1-1+\ldots$, At first glance, it may seem like a simple task, but in the 18th century it became a real challenge for many outstanding mathematicians. This paradox, known as the Grandi series, was named after the Italian mathematician and monk Luigi Guido Grandi, who first began studying it in 1703.

The essence of the paradox lies in the fact that, despite the apparent simplicity of calculations, different calculation methods lead to different results. If we represent the series as $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, then each pair of numbers 1 - 1 is equal to zero, and the entire sum of the series is reduced to zero. However, if you place the brackets differently, for example, leave the first element out of the brackets, and then group the rest.: $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$, then the sum already turns out to be equal to 1. Thus, a simple change in the order of operations leads to completely different results.

This paradox interested not only Grandi, but also such outstanding mathematicians as Gottfried Wilhelm Leibniz and Leonhard Euler. Leibniz, reflecting on this problem, suggested that the correct answer might be $\frac{1}{2}$. He justified this by saying that if you stop the addition at a random point, the intermediate sum will be either 0 or 1 with equal probability. Therefore, in his opinion, the average value of the sum should be $\frac{1}{2}$. Leonhard Euler in his work "On divergent series", published in 1760, supported this idea and even argued that the sum of the Grandi series and the fraction $\frac{1}{2}$ are equivalent and can be replaced by each other without error.

However, despite all the arguments in favor of various results, modern mathematicians have come to the conclusion that the Grundy series does not have a definite sum. This conclusion is based on the analysis of partial sums of a series that alternate between 0 and 1 and never converge to any fixed value. In mathematics, this behavior of a series means that it diverges, that is, it does not have a specific amount.

Modern approaches to infinite series and their summation appeared due to the development of analysis in the 19th century. The concept of convergence was introduced, which allows us to determine which value the sum of a series approaches as an increasing number of its elements are added. However, in the case of the Grundy series, the partial sums range between 0 and 1 and do not approach any one value. This leads to the conclusion that the Grandi series does not have a definite amount. However, there are alternative summation methods, such as the Cesaro method, which calculates the average of partial sums. Applying this method to the Grundy series leads to the result $\frac{1}{2}$

Corollary 9.1 *Readers familiar with the paradoxSchrodinger's Cat such quantum uncertainty is not surprising. This is another example of the connection between arithmetic (in this case, we can talk about ways to isolate numbers through associative rules) and quantum mechanics.*

The conclusions can be generalized to a number of subsystems and apply equally to mathematics (fundamentals of probability theory, logic) and physics. It is logical to determine the logarithm of the probability distribution and obtain an additive quantity — entropy. Separability - the ability to isolate a subsystem within a complex system and the ability to set a function allowed the Architect of the Universe (if one exists even despite the skepticism of atheists) to make the world manageable and knowable, to reduce complex phenomena to simple ones.

Парадокс и предубеждение

11 Парадокс и предубеждение

1 Введение 504
2 Цель социологического исследования . . . 506
3 Мораль и наука . . . 509
4 Общепризнанные, но ложные теории 511
5 Мораль стран Объединенного Запада . 513
6 Метаязык Вселенной 517

В десятилетие науки и техники необходимо стимулировать интерес школьников и студентов к точным наукам. «Открытие по плечу каждому студенту и старшекласснику!» - именно этот посыл стремится донести автор до любознательной молодежи и дерзких российских ученых. Там, где Американской науке потребовалось 140 стр. на поиск доказательства Великой теоремы Ферма, за что Эндрю Уайлсу присудили Абелевскую премию в 2016 году - Российской науке оказывается достаточно лишь полстраницы либо шести граней деревянного кубика для творческого развития ребёнка.

1 Введение

Указ Президента РФ от 25 апреля 2022 г. N 231 "Об объявлении в Российской Федерации Десятилетия науки и технологий"в числе прочих задач предусматривает повышение доступности информации о достижениях и перспективах российской науки для граждан Российской Федерации (литера в п. 2.). Важно отметить, что наряду с Великой теоремой Ферма существует также Малая теорема Ферма в теории чисел. Здесь речь идет только Великой теоремой Ферма (Fermat's Last Theorem).

Великая теорема Ферма была сформулирована в 1637г. Пьером де Ферма. При жизни (1601-1665гг) этот французский математик доказательства не опубликовал. Над головоломкой бились сильнейшие остроумные математики мира, но доказательств для всех степеней n не было вплоть до 1994г., когда впервые сэр Эндрю Уайлс, ныне декан математического факультета Принстонского университета США, изложил доказательство на 140 стр., за что автору доказательства Эндрю Уайлсу присудили престижную Абелевскую премию в 2016г. Всё это свидетельствует в пользу сложности научного поиска. Выходит, что Пьер де Ферма сильно преувеличивал, утверждая о найденном им кратком доказательстве?

Однако Российской науке в 2020 г. оказалось достаточно для изложения основных идей доказательства лишь полстраницы либо шести граней деревянного кубика для творческого развития ребёнка и знаний преимущественно в пределах школьной программы, а не громоздких цилиндрических функций, используемых Уайлсом. Тем самым от знаний, используемых узкими специалистами, совершён переход в пользу школьного образования, популярной науки и массового просвещения. Можно ли считать это открытием? Является открытием получение научного результата оригинальным, новым, ранее не известным науке способом — так гласит "Положение об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях", утв. постановлением Совета Министров СССР от 21 августа 1973 г. N 584. (действие документа подтверждено решением Верховного Суда РФ от 9 декабря 2015 г. по делу N АКПИ15-1138). Положение действовало до февраля 2021г. и было отменено как устаревший нормативный акт СССР постановлением Правительства РФ № 80. В истории утраты научного суверенитета следует выделить решение от 14 мая 1991г. N 156 Президиума Академии наук СССР, признавшем нецелесообразным сохранение государственной регистрации научных открытий. С вступлением в силу части IV ГК РФ в 2008г. из закрытого перечня объектов интеллектуальной собственности (ст. 1225 ГК РФ) были исключены научные открытия. К сожалению, регистрация научных открытий в современной России, даже в условиях острого военного противостояния, до сих пор осуществляется «на внешнем контуре».

Предубеждение "международного математического сообщества" против изложенного в данной монографии краткого доказательства ВТФ транслируется некоторыми уважаемыми российскими учеными. Так в деле Верхового суда РФ СИП-947/2022 по спору автора с Роспатентом в связи с отказом в госрегистрации патента на промышленный образец по упомянутой на Рис. 7.4 заявке автора № 2021501435/49 от 20.03.2021, судебные акты были обоснованы с опорой на шесть (!) лженаучных писем и одну ложную экспертизу, где была исследованалишь одна грань из шести, имеющихся у куба, повторены голословные утверждения Роспатента в плагиате приведенного выше доказательства с американской версии, базирующейся на цилиндрических функциях. Отказ в регистрации был сделан Роспатентом под надуманным предлогом «наруше-

ния общественной морали и нравственности», вероятнее всего Западной морали, исключающей развитие России, как суверенного государства. Заметим, что морально-этические споры не подсудны Суду по интеллектуальным правам — нарушение п. 1. ст. 47 Конституции РФ. Сам промышленный образец экспертами даже не исследовался, доказательство, выгравированное лазером на кубе «не заметили», публикации, монографии в РИНЦ отрицались как «не солидные», критиковался ”слишком простой английский”. Такая откровенно заискивающая, прозападная позиция ученых далеко отступает от объективности и научности - ст. 14 ФЗ N 127-ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике".

30 мая 2024 своим определением Конституционный суд РФ отказал автору в рассмотрении его жалобы, касающейся обнаружившейся неопределенности по вопросу соответствия Конституции РФ пункта 4 ст. 1349 Гражданского кодекса Российской Федерации (ГК РФ) в том конституционно-правовом смысле, в котором результаты интеллектуальной деятельности в научно-технической сфере, отвечающие установленным ГК РФ требованиям к промышленным образцам, оцениваются Роспатент с позиции соответствия общественным интересам, принципам гуманности и морали Западных стран, а не Российской Федерации. Отказывая в рассмотрении жалобы по существу, Конституционный суд, ссылаясь на решение Суда по интеллектуальным правам, пришёл к выводу, что размещенная информация на спорном промышленном образце ”способна ввести в заблуждение”, но одновременно указал на отсутствие конфликта с моралью в данном деле. В чём же состоит такое ”заблуждение” в деле? - вопрос риторический.

2 Цель социологического исследования

Социальная проблема: в России, вопреки декларируемой ст. 44 Конституции РФ, нет системы нормативного регулирования научных открытий, реестр открытий нашей страны ведут частные структуры и иноагент Википедия, по непрозрачным тарифам и процедурам. Заострить внимание на этом остром несоответствии, равно как и на

социальном зле ложных экспертиз, нередко становящихся основой трудно отменяемых неправосудных решений (достаточно сделать несложный запрос в поисковике о рецензии на экспертизу и поинтересоваться тарифами, чтобы понять востребованность инструментов по опровержению ложных экспертиз) помог бы яркий прецедент. Так путем анализа был выбран объект исследований — Великая теорема Ферма, «математическая жемчужина», кратко сформулированная, но очень сложно доказанная. Существуют ли «олимпиадные» способы доказательства? [Вор+88] Обнадеживало автора озарение самого Пьера де Ферма, утверждавшего ещё в 1637г., что он «нашёл воистину чудесное доказательство, но поля [Арифметики Диофанта] здесь слишком узки, чтобы вместить его!». Это подсказало направление поиска — парадокс, минимальное количество формул, а значит необходимо искать с позиции геометрии и физики, поскольку в XVII веке наука ещё не была подвержена узкой специализации, активно проводились, выражаясь современным языком, междисциплинарные исследования. Настойчивый поиск завершился нахождением краткого доказательства - но как признать его открытием юридически? Смоделировать спор в этой ситуации в суде по интеллектуальным правам — это один из способов защиты прав, гарантированных ст. 45 Конституции РФ: каждый вправе защищать свои права и свободы всеми способами, не запрещенными законом.

[Вор+88]: Воробьев и др. (1988), Задачи по физике

В условиях правовой лакуны (пробела), для создания прецедента в образовании и педагогике, автор был вынужден выжечь лазером своё открытие на гранях деревянного куба и подать заявку в Роспатент о регистрации патента на промышленный образец с доказательством Великой теоремы Ферма. Отказ в выдаче патента на промышленный образец со стороны Роспатента произошёл более чем через год с обвинением автора в «введении в заблуждение», аморальности и безнравственности. Под этими надуманными предлогами Роспатент приписывает открытие, найденное гражданином России, американской науке, не имеющей никакого отношения к защищаемой ст. 44 Конституции РФ интеллектуальной собственности гражданина Российской Федерации.

Единственным возражением со стороны Роспатент могло бы стать научное опровержение найденного автором до-

казательства. Поскольку оно опирается преимущественно на школьные знания, провести тщательную проверку может любое лицо с аттестатом школьного образования. Автор и возглавляемый им Союз «Сибирский Центр медиации» многократно объявляли публичное обещание награды — конкурсы с щедрыми призами за научное опровержение краткого доказательства ВТФ, приглашали к диалогу декана математического факультета Принстонского университета США, сэра Эндрю Уайлса по поводу направленного ему авторского доказательства ВТФ (RO153663225RU от 29.02.2020 вручено адресату 17.03.2020 и RA631127263RU от 03.05.2022 - поступило на Таможню США 15.05.2022, затем возвращено в Россию.) — но награда осталась не востребованной, а письма - без ответа.

По мнению Роспатента, указание имени Заявителя и даты сделанного им математического открытия на изделии и упомянутой заявке «вводит в заблуждение», является «недостоверным», «нарушает принципы общественной морали и нравственности». Но этот одиозный вывод в решении Роспатента противоречит ранее произведенной Роспатентом регистрации базы данных [Avd20], в единственной таблице содержатся строки и изображения с доказательством Великой теоремы Ферма. Автор, как заявитель патента, подал свои возражения на решение Роспатент с учетом административного порядка (п. 2. ст. 1248 ГК РФ) в Палату по патентным спорам. Возражения были отклонены Палатой со ссылкой на экспертизу, в ходе которой была исследована лишь одна грань шестигранного куба (!?).

[Avd20]: Avdyev (2020), «Database for computer proof of Fermat's theorem for billions based on school knowledge»

Решение Палаты по патентным спорам Роспатент было оспорено автором в Суд по интеллектуальным правам сначала без соблюдения досудебного порядка, который не является обязательным для научных споров (СИП-947/2022), затем с соблюдением досудебного порядка как потребовал суда (СИП-357/2022) и признанием со стороны Роспатента отсутствие у него компетенции рассматривать научные споры. После неоднократных судебных заседаний председательствующей судья совершил не предусмотренные Арбитражным процессуальным кодексом (АПК РФ) действия, ограничив публикации автора-Заявителя только 2020г. И без обсуждения вопросов со сторонами спора, как вопреки требованиям АПК РФ и

объективному исследованию доказательств [ББ09], направил запрос в десяток научных организаций с формулировкой: являются ли прилагаемые публикации Заявителя доказательством Великой теоремы Ферма? Такая постановка вопроса противоречит правилам формальной логики, поскольку факт публикаций в ряде разных изданий РИНЦ является достоверным (предмет спора - плагиат найденного Заявителем доказательства с иного "общепризнанного" и совершение аморального, безнравственного проступка). Поэтому часть высших учебных заведений и институтов отказались дать ответ под благовидным предлогом отсутствия специалистов в теории чисел. Другие же дали ответы с грубейшим нарушением ст. 14 ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике"от 23.08.1996 N 127-ФЗ, научной этики, процессуальных правил, а также содержания курсов по основам теории множеств и топологии, изучаемых студентами первых курсов и частично - школьниками физико-математических школ. В этом и заключается новизна доказательства, получение результата ранее неизвестным науке способом. Если Эндрю Уайлс «всё это предвидел ещё в 1994г»., то зачем ему понадобилось тратить 140 страниц, там, где достаточно одной?

[ББ09]: Бугель и др. (2009), Правовая статистика: Учебное пособие

3 Мораль и наука

В сложившейся практике научные издания, входящие в Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ), не принимаются во внимание, когда задеты интересы американской науки — не случайно эксперт Роспатент ориентировался исключительно на популярную прессу западных изданий в русскоязычном переводе. Такая необъективность и научная сегрегация по принципу гражданства противоречит действующему Российскому законодательству. Необъективность проявляется даже в том, что Роспатент вслед за своим экспертом, во всех своих решениях исследует лишь одну грань из шести деревянного куба - промышленного образца. Остальные грани не нашли никакого отражения в переписке, экспертизе и оспариваемых решениях Роспатент. Проигнорированы научные публикации, а также научные монографии Заявителя в изданиях РИНЦ и др. Является ли такое игнорирование объективных доказательств со стороны Роспатента

научным и объективным? - Вопрос риторический.

Важно отметить, что с позиции морали Западных стран, прежде всего США, научное развитие России недопустимо. Для иллюстрации: одна из крупнейших мировых баз научных данных Web of Science стала недоступной для российских пользователей. ТАСС цитирует заявление ее владельца — компании Clarivate — о том, что она "приняла решение закрыть российский офис и прекратить в РФ коммерческую деятельность, пояснив, что причиной этого стала спецоперация на Украине". Западная мораль, идеология отрицает Россию, как суверенное государство. В Указе Президента РФ от 9 ноября 2022 г. № 809 "Об утверждении Основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских духовно-нравственных ценностей", где в п. 14. дано определение деструктивной идеологии: "Идеологическое и психологическое воздействие на граждан ведет к насаждению чуждой российскому народу и разрушительной для российского общества системы идей и ценностей". Указ Президента развивает и конкретизирует более ранние нормативные акты.

Остаётся догадываться, что же из перечисленного инкриминируется автору? В своём решении Роспатент также указывает на пробел в действующем законодательстве: отсутствие в Российской Федерации государственного реестра научных открытий, констатирует, что совместная деятельность частных НКО, регистрирующих научные открытия осуществляется вне рамок закона и Конституции РФ. Признавая неудовлетворительное положение дел по государственной регистрации научных открытий в РФ, передачу стратегически важных вопросов для обеспечения безопасности и развития России международному сообществу и частным структурам, Роспатент просто констатирует, что эти вопросы не относятся к его компетенции (дело № 300-ЭС22-11151, № С01-842/2022СИП-357/2022 Верховного суда РФ). Одновременно Палата по патентным спорам, входящая в структуру Роспатента, распространяет свою компетенцию и на научные споры вразрез со ст. 14 ФЗ "О науке и государственной научно-технической политике"от 23.08.1996 N 127-ФЗ. Вместо ссылки на реестр научных открытий Роспатент почему-то ссылается на портал информационного агентства ТАСС, так же не имеющий отношения к государственному реест-

ру научных открытий, не упоминался в ст.44 Конституцией РФ, равно как и в действовавшем на момент подачи обращения автора в Роспатент “Положении об открытиях, изобретениях”.

До начала обострения идеологического и военного противостояния Россия - США общепринято было считать российскую науку органически интегрированной в общемировую. Главное возражение Роспатента — доказательство автора противоречит общепризнанному доказательству и мнению международного математического сообщества (такое мнение формируется прежде всего в США, как «щедрого грантодателя»).

4 Общепризнанные, но ложные теории

Является ли «общепризнанность» критерием научной истины? - Ответ отрицательный. История науки изобилует примерами общепризнанных ложных теорий. В эпоху Классического Средневековья на уровне религиозных представлений и общественного сознания эпидемии воспринимались как божественная кара за различные отступления от религиозных канонов, в частности, отход от догматов церкви, попытки рационального познания мира, вероотступничество [[Изу18]].

[Изу18]: Изуткин (2018), «Эпидемии в эпоху классического средневековья в Европе»

Руки и хирургические инструменты обрабатывали не перед, а после операций. Другой пример общепризнанного доказательства: геоцентрическая система мира представление об устройстве мироздания, согласно которому центральное положение во Вселенной занимает неподвижная Земля, вокруг которой вращаются Солнце, Луна, планеты и звёзды [[Пто+98]].

[Пто+98]: Птолемей и др. (1998), Альмагест: или математическое сочинение в тринадцати книгах

Эта ложная теория просуществовала 1400 лет, пока не была опровергнута польским астроном Николаем Коперником, разработавшим теорию движения планет вокруг Солнца на основании принципа Пифагора о равномерных круговых движениях (трактат «О вращениях небесных сфер», издан 1543г.), и далее были открыты Законы Кеплера, законы Ньютона. Более свежий пример общепризнанного [КЖ22], но ложного доказательства

[КЖ22]: Караваева и др. (2022), «ЗЕЛЕНЫЕ ФИНАНСЫ РОССИИ»

— переоценка роли зеленой энергетики, как альтернативы традиционной энергетике. В результате волюнтаристских решений стран объединенного Запада цены на газ выросли более, чем в десять раз (!) . . . “без углеводородов, без резервов, максимальный уровень, до которого можно довести восстанавливаемую энергетику, — это максимум 30 процентов от общего энергобаланса», — считает доцент Финансового университета при Правительстве России Леонид Крутаков [Интервью в ЛентеРУ https://lenta.ru/news/2022/01/12/zelenerg/ на 09.02.23]. Среди общепризнанных ошибочных истин особенно хочется выделить спор вокруг устья Амура и о. Сахалин. До середины XIX века общепризнанным было убеждение ряда ученых, мореплавателей, государственных деятелей о непригодности р. Амур для судоходства среди них: Русский мореплаватель, возглавлявший первое русское кругосветное плавание И. Ф. Крузенштерн, председатель совета директоров Российско-Американской компании барон П. Н. Врангель, офицер Российского императорского флота, исследователь Охотского моря А. М. Гаврилов, министр иностранных дел К. В. Нессельроде. Вслед за перечисленными авторитетами Император Всероссийский Николай I считал, что река Амур непригодна для судоходства, теряется в песках и с, подачи Нессельроде, запретил адмиралу русского флота Г.И. Невельскому исследовать устье Амура под предлогом экономии средств казны, сохранения Кяхтинской чайной торговли с Китаем, соблюдения баланса отношений с Англией и США на Дальнем Востоке. И лишь в 1849-1851гг. Геннадий Иванович Невельской, ослушавшись приказа, опроверг это заблуждение, исследовав Амурский лиман. Заслугой русского адмирала стало присоединение к нашей стране обширных дальневосточных земель и острова Сахалин, а не полуострова, как это ранее ошибочно считали упомянутые авторитеты [[Зад69]].

[Зад69]: Задорнов (1969), Первое открытие. К океану.

История науки изобилует подобными примерами.

Автор обратился в Конституционный суд с просьбой защитить принципы гуманности и морали не Западных стран, а России в патентуемом изделии. Дело в том, что на обычном деревянном кубике гражданин выжег лазером доказательство Великой теоремы Ферма. Роспатент оказал в госрегистрации промышленного образца, потому что найденное россиянином доказательство противоре-

чит общепринятому док-ву гражданина США, на 140 стр. Роспатент потребовал удалить имя гражданина РФ под краткой версией его доказательства, а также отказал в госрегистрации промобразца под предлогом нарушения общественной морали и нравственности. Вопрос заключается в том, чья мораль подразумевается?

Система духовных и моральных ценностей приобретает решающее значение в условиях развязанной Западом когнитивной войны, бурного развития информационно-коммуникационных технологий, визуализации, трёхмерного моделирования и печати, легко преодолевающей государственные границы.

5 Мораль стран Объединенного Запада

Мораль стран Объединенного Запада и России в корне различны.

С началом специальной военной операции Запад отбросил дипломатические уловки. Западная мораль в ряде случаев отрицает веру в Бога, придерживается культа Сатаны, пропагандирует, дьяволопоклонничество, гомосексуализм, отрицает брак, как союз мужчины и женщины, пропагандируется индивидуализм, допускаются ложь и лицемерие, как средство достижения целей, и т. д. Всё это указывает на закат западной Цивилизации [Шпе10]. Для иллюстрации, когда нашумевшая по всему миру выставка трупов профессора Гюнтера фон Хагенса дошла и до России, РПЦ выступила против такого «бесстыдства», указывая не негативное влияние на нравственность, отсутствие научного и воспитательного значения расчлененных человеческих трупов в том виде, как это представляет Гюнтер фон Хагенс.

[Шпе10]: Шпенглер (2010), закат Европы

Рис. 5.1: Анатомические экспонаты Гюнтера фон Хагенса по прозвищу Доктор Смерть

Наука, воспитание и образование базируются на духовно-нравственных ценностях. Так, Федеральный закон от 5 июля 1996 г. N 86-ФЗ "О государственном регулировании в области генноинженерной деятельности" определяет механизмы, обеспечивающие безопасность граждан и окружающей среды в процессе осуществления генноинженерной деятельности и использования ее результатов.

Принят Федеральный закон от 20 мая 2002 г. N 54-ФЗ "О временном запрете на клонирование человека", исходя из принципов уважения человека, признания ценности личности, необходимости защиты прав и свобод человека и учитывая недостаточно изученные биологические и социальные последствия клонирования человека.

Другой пример: указ Президента РФ от 10 октября 2019 г. N 490 "О развитии искусственного интеллекта в РФ" определяют понятия доверенные технологии искусственного интеллекта, отвечающие стандартам безопасности, разработанные с учетом принципов объективности, недискриминации, этичности, исключающие при их использовании возможность причинения вреда человеку и нарушения его основополагающих прав и свобод, нанесения ущерба интересам общества и государства [Авд23].

[Авд23]: Авдыев (2023), «Великая головоломка, как индикатор суверенизации Российской науки»

Можно продолжать эти примеры с учетом законодательства регулирующего обращения с радиоактивными материалами и ядерным оружием и мирным атомом в энергетике, но изложенного достаточно для вывода:

> результаты интеллектуальной деятельности в научно-технической сфере, включая промышленные образцы, должны оцениваться по шкале духовно-нравственных ценностей Российской Федерации, морали нашей страны. Система духовных и моральных ценностей приобретает решающее значение в условиях развязанной Западом когнитивной войны, бурного развития информационно-коммуникационных технологий, визуализации, трёхмерного моделирования и печати, легко преодолевающей государственные границы.

Действующая редакция п. 4 ст. 1349 ГК РФ не содержит указания на общественную мораль и нравственность с позиции ценностей Российской Федерации. В результате такой в деле 300-ЭС23-19598 (СИП-947/2022) Верховного Суда РФ спор разрешен с опорой на предубеждения международного математического сообщества, постулирования вторичности российской науки и отрицание ее научного суверенитета.

Как указание имени российского гражданина (ст. 21 Конституции РФ) под найденным им доказательством ВТФ

(ст. 44, 75.1 Конституции РФ) может противоречить российской общественной морали и нравственности? - вопрос риторический. В всех перечисленных делах нет научной экспертизы в том процессуальном порядке, как это предусматривает процессуальный кодекс: формулировка вопросов, выбор экспертного учреждения, предупреждение эксперта об уголовной ответственности, сведения о квалификации эксперта и специализации. Забыв о научной и элементарной этике, шесть научных организаций наперебой принялись очернять доказательство ВТФ Заявителя, подменяя обсуждаемый тезис, путая научную терминологию. Не обошлось без ответов в анонимном формате.

Научные открытия имеют общемировое и, в данном деле, культурное и историческое значение с позиции педагогики и образования, поскольку «неразрешимая» с 1637 г. Великая теорема Ферма в 2020г., связующая времена Диофанта Александрийского (III век НЭ, Эпохи Просвещения (XVII век) и современность (цифровизация и 3D моделирование XXI век) была впервые доказана средствами школьной программы в краткой форме. В условиях обострённого противостояния коллективного Запада с Россией, краткое доказательство ВТФ, относимой к «математическим жемчужинам», имеет важное культурное и историческое значения. Доказательство Заявителя подрывает гегемонию США и "красоту" найденного профессором Лиги Плюща, проф. Принстонского университета, декана мат. Факультета Эндрю Уайлса ста с лишним страничного доказательство, за которое ему была присуждена Абелевская премия в 2016г. Но поиск Истины не останавливается с присуждением самых престижных наград и премий. И этот принцип также является продолжением разделяемых Российской Федерацией духовно-нравственных ценностей: постоянное развитие личности и социальных институтов, многополярный мир, безбарьерная среда, общество равных возможностей и т.д.

Указ Президента РФ от 25.04.2022 № 231 "Об объявлении в Российской Федерации десятилетия науки и технологий" подчеркивает значимость научно-технологического развития страны и среди прочих задач ставит повышение доступности информации о достижениях и перспективах российской науки для граждан Российской Федерации

(литера в п. 2 Указа). С этих позиций краткое доказательство Заявителя демонстрирует каждому школьнику приоритет и достижения российской науки, а поэтому имеет важные публично-правовые последствия для науки, педагогики, укрепления российской морали лидирующего государства в сферах образования, науки и техники. Этот Указ развивает ст. 34 Конституции РФ: Каждый имеет право на свободное использование своих способностей и имущества для предпринимательской и иной не запрещенной законом экономической деятельности.

Говоря о вторичности Российской науки, Заявитель отмечает идеологические предпосылки, также вытекающие из морали и системы ценностей. Ещё в 1991 г. Президиум Академии наук СССР признал «нецелесообразным» сохранение государственной регистрации научных открытий (решение от 14 мая 1991 г. N 156). Изъятие интеллектуального результата в вида научного открытия под предлогом "нецелесообразности" было предпринято Российским государством в период больших ожиданий от интеграции нашей страны в международное научное сообщество и разделение труда. Но как убедительно показала специальная военная операция, такие ожидания оказались иллюзорными.

В Десятилетие науки и технологий вопрос защиты интеллектуального потенциала требует особого внимания. Достаточно указать на уязвимость п. 5. ст. 1259 ГК РФ: Авторские права не распространяются на. . . открытия, убедиться в отсутствии Закона об открытиях, преемника Государственного комитета по изобретениям и открытиям при ГКНТ СССР государственной услуги по регистрации научной открытий.

Не изобретайте сущности сверх необходимости. Философ Уильям Оккам.

Простое доказательство имеет более высокую научную ценность: «не изобретайте сущности сверх необходимости» (Уильям Оккам). Надписи на изделии согласно заявке на патентуемый промышленный образец автора не нарушают прав других лиц и публичные интересы, а напротив соответствуют общественным интересам, принципам гуманности и морали в той мере, в которой этому способствует образование и просвещение. С 2021г. Гиперкуб деревянный 3D на сборной подставке с доказательством Великой теоремы Ферма был размещен Союз Сибирский Центр медиации автором на маркет-плейсе, как развивающий сувенир для школьников, студентов и любозна-

тельной молодежи. Этот сувенир подарен автором ряду библиотек и университетов России.

6 Метаязык Вселенной

Трудно переоценить место простых чисел в физических законах, определяющих окружающий материальный мир и, в широком смысле, нашу Вселенную. Изложенный выше материал уже показал связь простых чисел с квантовой механикой, статистической физикой и вытекающей из неё теории вероятностей. См.таблицу (8.1).

Для наглядной иллюстрации проявлений свойств микромира достаточно сослаться на принцип неопределённости Гейзенберга $\Delta p \Delta q \geqslant \hbar/2$, проявляющихся в преобразованиях Фурье, в спектрах и сигналах: невозможно одновременно сузить полосу спектр и длительность сигнала - см. подробный пример в ([Хар62]).

[Хар62]: Харкевич (1962), Спектры и анализ

Связь простых чисел с логарифмическими функциями представляется совершенно естественной. В ходе эволюции слух, зрение, осязание человека и животных адаптировались к логарифмическому закону, что позволят адекватно воспринимать окружающую среду, органично продолжает законы природы, является следствием закона статистической механики и квантовой физики, теории вероятности. Легко рассчитать след статистической матрицы, где на диагоналях расположен усреднённый логарифм вероятности - всё основано на принципе симметрии, усреднения, возможности выделения, обособления частного из целого, разделения понятий взаимосвязи и взаимодействия [Сел03].

[Сел03]: Селиванов (2003), Поиск ошибочного и правильного

А роль симметрии/асимметрии в нашей жизни ещё как следует не осознана, по крайней мере Западной наукой. Свойства колец многочленов и линейных операторов являются производными от свойств простых чисел. Благодаря аддитивным свойствам энтропии можно добиться уменьшения флуктуации легко измеримых величин: числа частиц, энергии, температуры, давления, по мере увеличения выборки и описать его простыми линейными соотношениями. Так реализуется связь микромира с

макромиром. Эта связь подчиняется законам математической статистики (статистической физики). см. также интересную популярную книгу [Пон86].

[Пон86]: Понтрягин (1986), Обобщения чисел

Простые числа - метаязык Вселенной.

Поражает тот обстоятельство, что буквально с первых классов школьники изучают явления, в основе которых обнаруживается квантовая природа, фундаментальные законы нашей Вселенной: симметрия, однородность пространства, изотропность и т.д. Если математику нарывают языком Вселенной, то простые числа - это метаязык Вселенной.

В этом смысле простые числа пришли к нам из зарождения Вселенной, это реликты от Большого взрыва! Это метаязык или по Станиславу Лемму His Master's Voice. (Глас Господний) - На Земле, пожалуй, нет такого взрослого, который не умеет считать и молиться, но далеко не каждый способен услышать...

Чтобы лучше осознать то удивление, которое испытал автор, представьте себе мир без простых чисел, где любое число имеет сколько угодно делителей, где невозможно выделить часть из целого, где каждое явление нередуцируемо до более простых. Именно о таких явлениях упоминает Роджер Пенроуз в своей книге [Пен05].

[Пен05]: Пенроуз (2005), Тени разума в поисках науки о сознании

Дискретность генетического кода, заключающееся в том, что данный нуклеотид может входить в состав только одного кодона - это ещё одни пример важности обособленности части из целого.

Подытоживая изложенное, можно утверждать, что если бы простых чисел не было, то это изменило бы нашу Вселенную до неузнаваемости. Возможно ли было бы зарождение в мире без простых чисел человека разумного?

Важно отметить, что система может обладать свойствами эмерджентности (англ. от «возникающий, неожиданно появляющийся») качественно новыми, не присущими её компонентам по отдельности.

В социальной сфере большой интерес представляет сверхаддитивный эффект (т.е. «превосходящий сумму»), имеется в виду дополнительная прибавка в продуктивности

групповой работы, превосходящая сумму вкладов отдельно друг от друга. Для таких случаев изложенный выше подход должен быть дополнен качественно новыми методами. Но такие сложные явления не входят в предмет исследования. Более подробно о проблеме синергии см. например в [Kpe21].

[Kpe21]: Крейк (2021), «Некоторые теоретико-методологические основы рассмотрения синергии в социуме»

Поскольку любые дерзкие попытки на продолжение научного поиска кратких доказательств ВТФ встречали сопротивление, автор был вынужден продолжить научную работу над ABC-гипотезой, из которой вытекает ряд интересных следствий, включая саму ВТФ. Обе теоремы оказались связаны благодаря общим принципам, заложенным при формировании нашей Вселенной.

И хочется завершить эту главу цитатой:

Рис. 6.2: Немецкий философ, один из центральных мыслителей эпохи Просвещения. Его работы в области эпистемологии, метафизики, этики и эстетики сделали его одной из самых влиятельных фигур в западной философии Нового времени.

«Две вещи наполняют душу постоянно новым, возрастающим удивлением и благоговением: звёздное небо надо мной и нравственный закон во мне. То и другое, как бы покрытые мраком или бездною, находящиеся вне моего горизонта, я не должен исследовать, а только предполагать. Я вижу их перед собой и непосредственно связываю их с сознанием своего существования...»

Иммануил Кант.

Paradox and Prejudicee

12 Paradox and Prejudice

1 Introduction 522
2 Purpose of the sociological research . . . 523
3 Popular American Press vs RSCI 526
4 Morality and Science 526
5 Generally accepted but false theories . . 528
6 The morality of the countries of the United West 532
7 Scientific discoveries are of global importance 535
8 The Metalanguage of the Universe 537

In the decade of science and technology, it is necessary to stimulate the interest of schoolchildren and students in the exact sciences. "Every student and high school student can make a discovery!" - this is exactly the message the author seeks to convey to curious young people and daring Russian scientists. Where American science needed 140 pages. in search of a proof of Fermat's Great Theorem, for which Andrew Wiles was awarded the Abel Prize in 2016, Russian science finds that only half a page or six faces of a wooden cube are enough for the creative development of a child.

1 Introduction

Decree of the President of the Russian Federation No. 231 dated April 25, 2022 "On the announcement of the Decade of Science and Technology in the Russian Federation", among other tasks, provides for increasing the availability of information about the achievements and prospects of Russian science for citizens of the Russian Federation (letter in paragraph 2.). It is important to note that along with Fermat's Great Theorem, there is also a Small Theorem Fermat in number theory. Here we are talking only about Fermat's Last Theorem.

Fermat's Last theorem was formulated in 1637. By Pierre de Fermat. During his lifetime (1601-1665), this French mathematician did not publish the proof. The world's strongest witty mathematicians fought over the puzzle, but there was no proof for all degrees of n until 1994, when for the first time Sir Andrew Wiles, now dean of the Mathematics Department at Princeton University in the USA, presented the proof on 140 pages, for which the author of the proof, Andrew Wiles, was awarded the prestigious Abel Prize in 2016. All this testifies in favor of the complexity of the scientific search. Does it turn out that Pierre de Fermat was greatly exaggerating when he claimed to have found a brief proof?

However, in 2020, it turned out to be enough for Russian science to present the main ideas of the proof of only half a page or six faces of a wooden cube for the creative development of a child and knowledge mainly within the school curriculum, and not the bulky cylindrical functions used by Wiles. Thus, a transition has been made from the knowledge used by narrow specialists in favor of school education, popular science and mass education. Can this be considered a discovery? It is a discovery to obtain a scientific result in an original, new, previously unknown to science way — so says the "Regulation on Discoveries, Inventions and innovation proposals", approved by Resolution of the Council of Ministers of the USSR dated August 21, 1973 No. 584. (the validity of the document was confirmed by the decision of the Supreme Court of the Russian Federation dated December 9, 2015 in the case N AKPI15-1138). The regulation was in effect until February 2021 and was abolished as an outdated normative act of the USSR by Decree of the Government of the Russian Federation No. 80. In the history of the loss of scientific sovereignty, the decision of May 14, 1991 should be highlighted. No. 156 of the Presidium of the USSR Academy of Sciences, which recognized the inexpediency of maintaining the state registration of scientific discoveries. With the entry into force of Part IV of the Civil Code of the Russian Federation in 2008, scientific discoveries were excluded from the closed list of intellectual property objects (Article 1225 of the Civil Code of the Russian Federation). Unfortunately, the registration of scientific discoveries in modern Russia, even in conditions of acute military confrontation, is still carried out "on the outer contour".

2 Purpose of the sociological research

Social problem: in Russia, contrary to the declared Article 44 of the Constitution of the Russian Federation, there is no system of regulatory regulation of scientific discoveries, the register of discoveries of our country is maintained by private structures and foreign agencies, according to opaque tariffs and procedures. A vivid precedent would help to focus attention on this acute discrepancy, as well as on the social evil of false examinations, which often become the basis for difficult-to-reverse unlawful decisions (it is enough to make a simple search engine query about an examination

review and ask about tariffs in order to understand the demand for tools to refute false examinations). Thus, through analysis, the object of research was chosen — Fermat's Great Theorem, a "mathematical pearl", briefly formulated, but very difficult to prove. Are there "Olympiad" proof methods? The author was encouraged by the insight of Pierre de Fermat himself, who claimed back in 1637 that he had "found a truly wonderful proof, but the fields [of Diophantus' Arithmetic] here are too narrow to accommodate it!". This prompted the direction of the search — a paradox, a minimum number of formulas, which means that it is necessary to search from the perspective of geometry and physics, since in the XVII century science was not yet subject to narrow specialization, interdisciplinary research was actively carried out, in modern terms. The persistent search ended with the finding of a brief proof - but how can it be legally recognized as a discovery? To simulate a dispute in this situation in an intellectual property court is one of the ways to protect the rights guaranteed by Article 45 of the Constitution of the Russian Federation: everyone has the right to defend their rights and freedoms in all ways not prohibited by law.

In the context of a legal lacuna (gap), in order to create a precedent in education and pedagogy, the author was forced to burn his discovery with a laser on the edges of a wooden cube and apply to Rospatent for registration of a patent for an industrial design with proof of Fermat's "Great Theorem" [Avd20]. The refusal to grant a patent for an industrial design by Rospatent occurred more than a year later, accusing the author of "misleading", immorality and *immorality*. Under these far-fetched pretexts, Rospatent attributes the discovery found by a Russian citizen to American science, which has nothing to do with the intellectual property of a citizen of the Russian Federation protected by Article 44 of the Constitution of the Russian Federation.

[Avd20]: Avdyev (2020), «Database for computer proof of Fermat's theorem for billions based on school knowledge»

The only objection from Rospatent could be a scientific refutation of the evidence found by the author. Since it is based mainly on school knowledge, any person with a school education certificate can conduct a thorough check. The author and the Union "Siberian Mediation Center" headed by him have repeatedly announced a public promise of awards — contests with generous prizes for the scientific refutation of a brief proof of FLT, invited the Dean of the Faculty of Mathematics of Princeton University, Sir Andrew Wiles, to a dialogue

about the author's proof of FLT sent to him (RO153663225RU dated 02/29/2020 handed to the addressee 03/03/2020 and RA631127263RU dated 05/03/2022 - received to US Customs on 05/15/2022, then returned to Russia.) — but the award was not in demand, and the letters remained unanswered.

According to Rospatent, the indication of the Applicant's name and the date of his mathematical discovery on the product and the mentioned application is "misleading", is "unreliable", "violates the principles of public morality and morality". But this odious conclusion in Rospatent's decision contradicts the database registration previously carried out by Rospatent [3], the only table contains rows and images with a proof of Fermat's Great Theorem. The author, as the patent applicant, filed his objections to the decision of Rospatent, taking into account the administrative procedure (paragraph 2. art. 1248 OF the Civil Code of the Russian Federation) to the Chamber for Patent Disputes. The objections were rejected by the Chamber with reference to the examination, which examined only one face of the hexagonal cube (!?).

The decision of the Rospatent Patent Dispute Chamber was challenged by the author to the Intellectual Property Rights Court, first without observing the pre-trial procedure, which is not mandatory for scientific disputes (SIP-947/2022), then in compliance with the pre-trial procedure as required by the court (SIP-357/2022) and recognition by Rospatent of its lack of competence to consider scientific disputes. After repeated court sessions, the presiding judge committed actions not provided for by the Arbitration Procedural Code (APC RF), limiting the publications of the Applicant author only in 2020. And without discussing issues with the parties to the dispute, as contrary to the requirements of the Agro-industrial Complex of the Russian Federation and objective examination of evidence [BB09], sent a request to a dozen scientific organizations with the wording: *are the attached publications of the Applicant a proof of Fermat's Great Theorem?* Such a statement of the question contradicts the rules of formal logic, since the fact of publications in a number of different publications of the RSCI is reliable (the subject of the dispute is plagiarism of evidence found by the Applicant from another *generally recognized* and the commission of immoral, immoral misconduct). Therefore, some higher educational institutions and institutes refused to give an answer under the plausible pretext of the lack of specialists

[BB09]: Bugel et al. (2009), *Legal Statistics: Textbook*

in number theory. Others gave answers in gross violation of Article 14 of the Federal Law "On Science and State Scientific and Technical Policy" dated 08/23/1996 N 127-Federal Law, scientific ethics, procedural rules, as well as the content of courses on the basics of set theory and topology studied by first-year students and partially by students of physics and mathematics schools. This is the novelty of the proof, obtaining a result in a way previously unknown to science. If Andrew Wiles "foresaw all this back in 1994," then why did he need to spend 140 pages where one is enough?

3 Popular American Press vs RSCI

In this dilemma, Rospatent's choice confidently leans in favor of the popular American press - the agency applies an excerpt from the news of popular American science. In current practice, scientific publications included in the Russian Science Citation Index (RISC) are not taken into account when the interests of American science are hurt — it is no coincidence that the Rospatent expert focused exclusively on the popular press of Western publications in Russian translation. Such bias and scientific segregation based on the principle of citizenship contradicts the current Russian legislation. Bias is manifested even in the fact that Rospatent, following its expert, in all its decisions examines only one face out of six wooden cubes - an industrial design. The remaining facets were not reflected in the correspondence, expertise and contested decisions of Rospatent. Scientific publications, as well as the Applicant's scientific monographs in the publications of the RSCI and others, were ignored. Is such disregard of objective evidence by Rospatent scientific and objective? - The question is rhetorical.

4 Morality and Science

It is important to note that from the moral standpoint of Western countries, primarily the United States, Russia's scientific development is unacceptable. To illustrate: one of the world's largest scientific databases, Web of Science, has become inaccessible to Russian users. TASS quotes a statement from its owner, the company Clarivate, that it "decided to

close the Russian office and stop commercial activities in the Russian Federation, explaining that the reason for this was a special operation in Ukraine." Western morality and ideology denies Russia as a sovereign state. In the Decree of the President of the Russian Federation dated November 9, 2022 No. 809 "On the approval of the Foundations of State Policy for the preservation and strengthening of traditional Russian spiritual and moral values", where paragraph 14 defines destructive ideology: "Ideological and psychological impact on citizens leads to the imposition of a system of ideas and values alien to the Russian people and destructive to Russian society. The Presidential Decree develops and concretizes earlier documents.

It remains to guess which of the above is incriminated to the author? In its decision, Rospatent also points out a gap in the current legislation: the absence of a state register of scientific discoveries in the Russian Federation. Recognizing the unsatisfactory state of affairs regarding the state registration of scientific discoveries in the Russian Federation, the transfer of strategically important issues for ensuring the security and development of Russia to the international community and private structures, Rospatent simply states that these issues do not fall within its competence (case 300-ES22-11151C01-842/2022SIP-357/2022 of the Supreme Court of the Russian Federation). At the same time, the Chamber for Patent Disputes, which is part of the Rospatent structure, extends its competence to scientific disputes, contrary to art. 14 Federal Law "On Science and State Scientific and Technical Policy" dated 08/23/1996 N 127-Federal Law. Instead of referring to the register of scientific discoveries, Rospatent for some reason refers to the portal of the TASS news agency, which is also unrelated to the state register of scientific discoveries, was not mentioned in Article 44 of the Constitution of the Russian Federation, as well as in the “Regulations on Discoveries and Inventions” in force at the time of the author’s appeal to Rospatent.

Before the escalation of the ideological and military confrontation between Russia and the United States, it was generally accepted that Russian science was organically integrated into the global one. Rospatent’s main objection is that the author’s proof contradicts generally accepted proof and the opinion of the international mathematical community (such an opinion is formed primarily in the United States, as a

"generous grantee"). -

5 Generally accepted but false theories

Is "universal acceptance" a criterion of scientific truth? - The answer is no. The history of science is replete with examples of universally accepted false theories. In the Classical Middle Ages, at the level of religious beliefs and public consciousness, epidemics were perceived as divine punishment for various deviations from religious canons, in particular, departure from the dogmas of the church, attempts at rational knowledge of the world, apostasy [Izu18].

[Izu18]: Izutkin (2018), «Epidemics in the Classical Middle Ages in Europe»

Hands and surgical instruments were treated not before, but after operations. Another example of generally accepted evidence: the geocentric system of the world is the idea of the structure of the universe, according to which the central position in the Universe is occupied by the stationary Earth, around which the Sun, Moon, planets and stars rotate [Pto+98].

[Pto+98]: Ptolemy et al. (1998), *Almagest: or Mathematical Composition in Thirteen Books*

This false theory existed for 1400 years, until it was refuted by the Polish astronomer Nikolai Copernicus, who developed the theory of planetary motion around the Sun based on the Pythagorean principle of uniform circular motions (treatise "On the Rotations of the celestial spheres", published in 1543), and then Kepler's Laws and Newton's laws were discovered. A more recent example of the generally accepted [KZ22], but the false proof is the overestimation of the role of green energy as an alternative to traditional energy. As a result of the voluntaristic decisions of the countries of the united West, gas prices have increased more than tenfold (!) . . . "without hydrocarbons, without reserves, the maximum level to which renewable energy can be brought is a maximum of 30 percent of the total energy balance," says Leonid Krutakov, associate professor at the Financial University under the Government of Russia Among the generally recognized erroneous truths, I would especially like to highlight the dispute around the mouth of the Amur and about. Sakhalin. Russians Russian navigator, who headed the first Russian circumnavigation of the world I. F. Kruzenshtern, Chairman of the Board of Directors of the Russian-American company Baron P. N. Wrangel, officer of the Russian Imperial Navy, researcher of the Sea of Okhotsk A.M. Gavrilov, until the middle of

[KZ22]: Karavaeva et al. (2022), «Green Finance of Russia»

"Without hydrocarbons, without reserves, the maximum level to which renewable energy can be brought is a maximum of 30 percent of the total energy balance" says Leonid Krutakov. Interview in the feed https://lenta.ru/news/2022-01-12 on 09.02.23.

the XIX century, it was generally recognized that a number of scientists, navigators, statesmen about the unsuitability of the Amur River for navigation, among them: Russian navigator, who headed the first Russian circumnavigation of the world I. F. Kruzenshtern, Chairman of the Board of Directors of the Russian-American company Baron P. N. Wrangel, officer of the Russian Imperial Navy, researcher of the Sea of Okhotsk A.M. Gavrilov, Minister of Foreign Affairs K. V. Nesselrode. Following the listed authorities, Emperor Nicholas I of Russia believed that the Amur River was unsuitable for navigation, lost in the sands, and with the filing of Nesselrode, forbade Admiral of the Russian Fleet G.I. Nevelsky to explore the mouth of the Amur River under the pretext of saving treasury funds, preserving the Kyakhtin tea trade with China, maintaining a balance of relations with England and the United States in the Far East. And only in 1849-1851. Gennady Ivanovich Nevelskoy, disobeying the order, refuted this misconception by exploring the Amur estuary. The merit of the Russian admiral was the annexation of vast Far Eastern lands and Sakhalin Island to our country, and not the peninsula, as previously mistakenly considered by the mentioned authorities [Zad69]. The history of science is replete with similar examples.

[Zad69]: Zadornov (1969), *First Discovery. To the Ocean*

In the interest of humanity and morality of Russia

The system of spiritual and moral values is becoming crucial in the context of the cognitive war unleashed by the West, the rapid development of information and communication technologies, visualization, three-dimensional modeling and printing, which easily overcomes state borders.

Acting in the interests of humanity and morality, not of Western countries, but of Russia, the author filed a complaint with the Constitutional Court. The reason for the appeal was the revealed uncertainty about whether paragraph 4 of Article corresponds to the Constitution of the Russian Federation. 1349 of the Civil Code of the Russian Federation (Civil Code of the Russian Federation) in the constitutional and legal sense in which the results of intellectual activity in the scientific and technical field that meet the requirements for industrial designs established by the Civil Code of the Russian Federation are evaluated by the Federal Executive Authority for Intellectual Property from the position of compliance with the public interests, principles of humanity and morality of Western countries, and not the Russian Federation.

The dispute over the name of a Russian citizen and morality

On March 20, 2021, the author applied to the Federal Service for Intellectual Property (Rospatent) with application No. 2021501435/49 for state registration of an industrial design. Product name "Device for learning "Hypercube wooden on a prefabricated stand with a proof of Fermat's great theorem" (hereinafter FLT).

In the positive formal examination of Rospatent for the Applicant's industrial design dated 07/16/2021, it was concluded: According to the results of the formal examination, the applicant is notified that the formal examination of the application for an industrial design conducted in accordance with paragraphs 1 and 3 of Article 1391 of the Civil Code of the Russian Federation has been completed with a positive result. I.e., the result of the Applicant's creative work is an original design solution. From the point of view of the state registration of a patent for an industrial design, this is enough, the truth / falsity of the Applicant's copyright proof could be left "to the judgment of posterity." Meanwhile, on April 14, 2022, Rospatent decided to refuse to grant a patent for an industrial design on the application on the grounds that the surname, first name of the Applicant in Latin letters, as well as the year 2020 of the mathematical proof of FLT found by him, engraved with a laser on the patented product, according to Rospatent, is misleading, as unreliable, and thus it is contrary to the public interest. Rospatent applied clause 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation in contradiction with the Constitution, considering the patented product to be the Applicant's full name, including the proof and the date of its location, contrary to public interests, principles of humanity and morality.

On May 29, 2023, by its decision in case No. SIP-947/2022, the Intellectual Property Rights Court (SIP) refused to satisfy the author's claims to Rospatent to declare illegal/invalid Rospatent's decision to refuse to grant a patent for an industrial design under application No. 2021501435/49 dated 03/20/2021. On August 21, 2023, the Presidium of the Intellectual Property Rights Court, by a decision in case C01-1179/2023, refused to satisfy the cassation complaints of both the Applicant of the registered industrial design of the author and the Union "Siberian Mediation Center" (SCM), which sold the product - the patented product through Internet

Solutions LLC (Ozon trading platform). Disagreeing with the judicial acts adopted in the case, Avdyev M.A. and the Union appealed to the Supreme Court of the Russian Federation. On 10/23/2023, in case No. (SIP-947/2022), the Supreme Court of the Russian Federation rejected the cassation appeals of the author and the Union "Siberian Mediation Center" against the decision of the Intellectual Property Rights Court of 05/29/2023 and the decision of the Presidium of the Intellectual Property Rights Court of 08/21/2023.

Along with judicial appeals, the Applicant appealed to the Government of the Russian Federation for the protection of intellectual rights in accordance with Article 44 of the Constitution of the Russian Federation with a proposal to register a scientific discovery in mathematics, the sovereignty of science and stimulate the interest of young people in science and technology, in other words, the implementation of Article 44 of the Constitution of the Russian Federation.

The applicant has exhausted all other domestic remedies, unsuccessfully resorted to extrajudicial protection through correspondence with the Government of the Russian Federation, publications in scientific publications, an open access educational video on the topic of FLT, and other measures. At the same time, the Applicant referred to the cancelled Resolution of the Council of Ministers of the USSR of August 21, 1973 No. 584 "On approval of the Regulations on Discoveries, Inventions and rationalization proposals"1, the Applicant argued that to fit more than a hundred pages. The American version of the FLT proof on the six faces of the children's cube is impossible, unlike the Russian version of the FLT proof found by the Applicant, the main ideas of which are set out in two formulas and drawings and takes up half a page.

In the judicial acts listed above, the SIP and its Presidium went beyond the limits of a certain Federal Law 95-Federal Law competence and authority, resolving a dispute in terms of morality, morality and science. Speaking of the scientific side, taking into account the accessibility of the presentation of the Applicant's FLT proof to schoolchildren, this kind of dispute must be resolved with the involvement of specialists in the fields of philosophy and logic, general methodology of science, geometry and physics, number theory, and school pedagogy. Considering the moral aspects (the right to the name of a Russian, not an American citizen, the possibility of presenting one's own version of the proof, even if this

contradicts the dominant point of view of the international scientific community to the priority of science in the United States and the consolidated West, the prejudice about the absence of a short version of the FLT proof), the dispute should be settled from the positions of epistemology, scientometry, morality and ethics, religion.

In fact, the above dispute is a manifestation of the contradictions inherent in clause 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation to the Constitution of the Russian Federation. The thesis that the name of a citizen and the date of his discovery are misleading, as unreliable, and thus contradicts the public interests expound the discursive position of apologists for pro-Western morality, alas, still prevailing in the domestic academic environment due to inertial thinking based on the long-term leadership of European and US countries in the fields of culture, education and sciences based on the system of Western values — the so-called societies of democracy and social welfare. It is important to remember that from the moral standpoint of Western countries, primarily the United States, Russia's scientific development is unacceptable.

In general, Western morality and ideology denies Russia as a sovereign state - this is the main public interest of the ruling classes of the countries of the united West.

6 The morality of the countries of the United West

The morals of the countries of the United West and Russia are fundamentally different.

With the beginning of a special military operation, the West dropped diplomatic tricks. Western morality in some cases denies faith in God, adheres to the Cult of the Devil, promotes devil worship, homosexuality, denies marriage as a union of a man and a woman, promotes individualism, lies and hypocrisy are allowed as a means to achieve goals, etc. All this points to the decline of Western Civilization [[Spe10]]. To illustrate, when the sensational worldwide exhibition of the corpses of Professor Gunther von Hagens reached Russia,

[Spe10]: Spengler (2010), *The Decline of the West*

the ROC opposed such "shamelessness", pointing out not the negative impact on morality, the lack of scientific and educational significance of dismembered human corpses in the form presented by Gunther von Hagens.

Figure 6.1: Anatomical exhibits of Gunther von Hagens, nicknamed Dr. Death

Science, education and upbringing are based on spiritual and moral values. Thus, Federal Law No. 86 of July 5, 1996 "On State Regulation in the field of genetic engineering" defines mechanisms that ensure the safety of citizens and the environment in the process of carrying out genetic engineering activities and using its results. The Federal Law of May 20, 2002 was adopted. No. 54-Federal Law "On a temporary ban on human cloning", based on the principles of respect for human beings, recognition of the value of personality, the need to protect human rights and freedoms and taking into account the insufficiently studied biological and social consequences of human cloning.

Another example: Decree of the President of the Russian Federation No. 490 dated October 10, 2019 "On the development of artificial intelligence in the Russian Federation" (with amendments and additions) defines the concepts of trusted artificial intelligence technologies that meet safety standards, developed taking into account the principles of objectivity, non-discrimination, ethics, excluding the possibility of harming a person and violating his fundamental rights when using them rights and freedoms, harming the interests of society and the state [Avd24].

[Avd24]: Avdyev (2024), «How can a student prove the ABC hypothesis using prime numbers, quantum mechanics and creative imagination?»

These examples can be continued, taking into account the legislation regulating the handling of radioactive materials and nuclear weapons and peaceful atom in the energy sector, but the above is enough to conclude:

> the results of intellectual activity in the scientific and technical field, including industrial designs, should be

evaluated on the scale of spiritual and moral values of the Russian Federation, the morality of our country. The system of spiritual and moral values is becoming crucial in the context of the cognitive war unleashed by the West, the rapid development of information and communication technologies, visualization, three-dimensional modeling and printing, which easily overcomes state borders.

The current version of clause 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation does not contain an indication of public morality and morality from the standpoint of the values of the Russian Federation. As a result, in the case (SIP-947/2022) of the Supreme Court of the Russian Federation, the dispute was resolved based on the prejudices of the international mathematical community, postulating the secondary nature of Russian science and denying its scientific sovereignty.

How can the indication of the name of a Russian citizen (Article 21 of the Constitution of the Russian Federation) under the evidence of FLT found by him (Articles 44, 75.1 of the Constitution of the Russian Federation) contradict Russian public morality and morality? - the question is rhetorical.

It seems impossible to arrange a text of more than one hundred pages so that it can be printed on six faces of a wooden cube for the creative development of a child.

Scientific discoveries have global and, in this case, cultural and historical significance from the point of view of pedagogy and education, since Fermat's Great Theorem, insoluble since 1637, in 2020, linking the times of Diophantus of Alexandria (III century NE, the Enlightenment (XVII century) and modernity (digitalization and 3D modeling of the XXI century), was first proved by means of the school curriculum in a short form. In the context of the heightened confrontation between the collective West and Russia, a brief proof of FLT, referred to as "mathematical pearls", has important cultural and historical significance. The Applicant's evidence undermines the hegemony of the United States and the "beauty" found by the Ivy League professor, Prof. Princeton University, Dean of Math. The Andrew Wiles Faculty of the hundred-plus-page proof, for which he was awarded the Abel Prize in 2016. But

the search for Truth does not stop with the awarding of the most prestigious awards and prizes. And this principle is also a continuation of the spiritual and moral values shared by the Russian Federation: the constant development of personality and social institutions, a multipolar world, a barrier-free environment, a society of equal opportunities, etc.

Decree of the President of the Russian Federation dated 04/25/2022 No. 231 "On the announcement of the Decade of Science and Technology in the Russian Federation" emphasizes the importance of scientific and technological development of the country and, among other tasks, sets increasing the availability of information about the achievements and prospects of Russian science for citizens of the Russian Federation (letter in paragraph 2 of the Decree). From these positions, the Applicant's brief proof demonstrates to each student the priority and achievements of Russian science, and therefore has important public legal consequences for science, pedagogy, and strengthening the Russian morality of the leading state in the fields of education, science and technology. This Decree develops Article 34 of the Constitution of the Russian Federation: Everyone has the right to freely use their abilities and property for entrepreneurial and other economic activities not prohibited by law.

7 Scientific discoveries are of global importance

Speaking about the secondary nature of Russian science, the Applicant notes the ideological prerequisites that also arise from morality and a system of values. Back in 1991, the Presidium of the USSR Academy of Sciences recognized that it was "inappropriate" to maintain the state registration of scientific discoveries (decision No. 156 of May 14, 1991). The withdrawal of an intellectual result in the form of a scientific discovery under the pretext of "inexpediency" was undertaken by the Russian state at a time of great expectations from the integration of our country into the international scientific community and the division of labor. But as the special military operation convincingly showed, such expectations turned out to be illusory.

In the Decade of Science and Technology, the issue of protecting intellectual potential requires special attention. It is enough to point out the vulnerability of clause 5 of Article 1259 of the Civil Code of the Russian Federation: . . discoveries, to make sure that there is no Law on Discoveries, the successor of the State Committee for Inventions and Discoveries under the State Committee for Scientific Research of the USSR, the state service for registration of scientific discoveries.

Paragraph 1. of Article 44 of the Constitution of the Russian Federation states that everyone is guaranteed freedom of literary, artistic, scientific, technical and other types of creativity, teaching. Intellectual property is protected by law. From the available scientific publications and monographs from the peppery RSCI, the mathematical discovery was made by the Applicant in early 2020, and at that time was regulated by Resolution of the Council of Ministers of the USSR dated August 21, 1973 No. 584 "On approval of the Regulations on Discoveries, Inventions and innovation proposals".

The definition of the Constitutional Court of the Russian Federation, dated 30/05/2024, N 1337-O, concerning the rejection of the complaint filed by citizen Avdyev Marat Alexandrovich, alleging a violation of his constitutional rights by paragraph 4 of Article 1349 of the Civil Code of the Russian Federation. Nevertheless, even a negative answer allows the author to freely distribute and print the results of his intellectual activity in accordance with Articles 29 and 44 of the Constitution of the Russian Federation. It should be recalled that the sole grounds for refusal to register an industrial design patent by Rospatent were those of violations of public morals. The aforementioned elements have now been removed.

Don’t invent entities beyond necessity

A simple proof has a higher scientific value: ”Do not invent entities beyond necessity” (William Occam).

The inscriptions on the product according to the application for the patented industrial design of the author do not violate the rights of other persons and public interests, but on the contrary correspond to the public interests, principles of humanity and morality to the extent that education and enlightenment contribute to this. Since 2021. A 3D wooden hypercube on a prefabricated stand with a proof of Fermat’s

Great Theorem was placed by the author at the Siberian Mediation Center Union on Market Place as a developing souvenir for schoolchildren, students and curious youth. This souvenir was presented by the author to a number of libraries and universities in Russia.

8 The Metalanguage of the Universe

Prime numbers are a mathematical model of the possibility of isolating a subsystem with additive resource separation from a system Fig. 2.5. The utilisation of prime numbers facilitates the integration of a system, a suprasystem, and a subsystem. Prime numbers are metalanguage of universe.

The conclusion of the canonical Gibbs distribution was made on the basis of an equally probable distribution over all microchannel states of the system. This facilitates the use of logarithms and additive variables. Additive functions for homogeneous quantities form the basis for a series of natural numbers, for countable sets, and for the production of any measurement. The measurability of distances is introduced through the concepts of metrics and measures. It is evident that the properties of the microcosm are indicative of the properties of the macrocosm. The multiplication operation is considered to be of greater importance than the addition and subtraction operations. It is from these positions that the axioms of arithmetic introduced by Giuseppe Peano can be elucidated, as well as the principle of mathematical induction, which is widely practised in mathematical proofs.

The conclusions derived can be extrapolated to a range of subsystems, finding equal application in mathematics (fundamentals of probability theory, logic) and physics. It is logical to determine the logarithm of the probability distribution and thereby ascertain an additive value, i.e. entropy. The capacity to differentiate a constituent element within a complex system, in conjunction with the capacity to establish a function, enabled the Architect of the Universe (if such a being exists, despite the scepticism of atheists) to render the world manageable and knowable, thereby reducing complex phenomena to simpler ones [Sel03].

[Sel03]: Selivanov (2003), *Search for the wrong and the right*

And the role of symmetry/asymmetry in our lives has not yet been properly realized, at least by Western science. The prop-

erties of polynomial rings and linear operators are derived from the properties of prime numbers. Due to the additive properties of entropy, it is possible to reduce the fluctuation of easily measurable quantities: the number of particles, energy, temperature, pressure, as the sample increases and describe it in simple linear relations. This is how the connection of the microcosm with the macrocosm is realized. This relationship obeys the laws of mathematical statistics (statistical physics). see also the interesting popular book [Pon86].

[Pon86]: Pontryagin (1986), *Generalizations of Numbers*

Prime numbers are the metalanguage of the universe.

It is striking that, literally from the first grades, schoolchildren study phenomena that are based on quantum nature, the fundamental laws of our universe: symmetry, uniformity of space, isotropy, etc. If mathematics is called the language of the universe, then prime numbers are metalanguage of the Universe.

In this sense, prime numbers came to us from the beginning of the universe, they are relics from the Big Bang! Is it a metalanguage or according to Stanislav Lemm His Master's Voice - perhaps there is no adult on Earth who does not know how to count and pray, but not everyone is able to hear...

To better feel the surprise that the author feels, imagine a world without prime numbers, where any number has as many divisors as you want, where it is impossible to separate a part from the whole, where every phenomenon is irreducible to simpler ones. It is about such phenomena that Roger Penrose mentions in his book [Pen05]. The discreteness of the genetic code, which consists in the fact that a given nucleotide can be part of only one codon, is another example of the importance of separating a part from the whole.

[Pen05]: Penrose (2005), *Shadows of the Mind: In Search of a Science of Consciousness*

Summarizing the above, it can be argued that if there were no prime numbers, it would change our universe beyond recognition. Would it be possible for a reasonable person to originate in a world without prime numbers?

It is important to note that the system may have the properties of emergence (English from "arising, unexpectedly appearing") qualitatively new, not inherent in its components individually.

In the social sphere, of great interest is the superadditive effect (i.e., "exceeding the amount"), meaning an additional increase in the productivity of group work, exceeding the amount of contributions separately from each other. For such cases, the above approach should be supplemented with qualitatively new methods. But such complex phenomena are not included in the subject of the study. For more information about the synergy problem, see, for example, [Cra21].

[Cra21]: Craik (2021), «Some theoretical and methodological foundations of the consideration of synergy in society»

Since any daring attempts to continue the scientific search for brief evidence of FLT were met with resistance, the author was forced to continue scientific work on the ABC hypothesis, from which a number of interesting consequences follow, including FLT itself. Both theorems turned out to be connected due to the common principles laid down during the formation of our universe.

And I would like to end this chapter with a quote:

Figure 8.2: German philosopher, one of the central thinkers of the Enlightenment era. His work in epistemology, metaphysics, ethics, and aesthetics has made him one of the most influential figures in Modern Western philosophy.

"Two things fill the soul with constantly new, increasing wonder and awe: the starry sky above me and the moral law in me. Both, as if covered with darkness or abyss, are beyond my horizon, I should not explore, but only assume. I see them in front of me and connect them directly with the consciousness of my existence..."

Immanuel Kant.

Приложения

13 Приложение

1 Пространство Лебега, Гильберта. Операторы 542
1.1 Базис из линейно независимых функций 542
2 Характеристическая $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$ 545
3 Прямое произведение групп 548
4 Характер конечной абелевой группы . 550
5 Характеры $\chi^{(R)}$ регулярного представления 552
6 Функция Грина. Пропагатор 554
6.1 Интегральное уравнение Фредгольма 559
7 Статистическая матрица. 561
8 Каноническое распределение Гиббса 564
9 Вырождение энергетических уровней . 568
10 Группа на основе нормированных статсумм 570
11 Функции от матриц 572
12 Подробнее об S фон Неймана 575
13 Обобщение $\mathrm{Rad}(x)$ на $\mathbb{R}$ 578
14 Для любознательных читателей . . . 580

1 Пространство Лебега, Гильберта. Операторы

В этой секции и следующей используются обозначения: ψ, ϕ - волновая функция, G - ограниченная область в R^n.

Всё сказанное в этом разделе о пространство Лебега $\mathscr{L}_2(G)$ переносится на пространство Лебега с весом $\mathscr{L}_2(G;\rho)$. Определение $\langle f|g\rangle_\rho$:

$$\langle f|g\rangle_\rho = \int_G \rho(x) f(x) g(x)^*\,dx \tag{1.1}$$

где $\rho \in C(\bar{G})$ и $\rho(x) > 0$, $x \in G$, $f, g \in \mathscr{L}_2\,(G;\rho)$

(Далее для простоты ниже $\rho = 1$ и в формулах опускается, но выводы касающиеся ортонормированных функций, можно распространить на $\forall \rho(x) > 0, \quad x \in G$, в чём легко убедиться путем замены переменных). В пространстве измеримых функций, для которых интеграл от квадрата модуля конечен $\int \|f(x)\|^2 dx < \infty$ - в пространстве Лебега $\mathscr{L}_2$ рассмотрим систему уравнения линейного оператора $A\psi_a = a\psi_a$, где собственная функции ψ_a, являются линейно независимыми, а собственные значения линейного оператора A заданы над полем $\mathbb{C}$.

1.1 Базис из линейно независимых функций

Всякая ортонормальная система $\{\psi_k\}$ состоит из линейно независимых функций, т.е. $\forall c_k$ и $\sum\limits_k |c_k| \neq 0$ невозможно $\sum_k c_k \psi_k \equiv 0$. Собственные функции $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ с помощью процесса ортогонализации Грама- Шмидта можно привести к совокупности ортонормированных функций,

например в $\mathscr{L}_2(-\pi,\pi)$: является тригонометрическая система:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad \left\langle \psi_i | \psi_j \right\rangle = \delta_{i,j} \tag{1.2}$$

Замечание 1.1 В этой монографии соотношение ортогональности может быть записано также в виде: $(f,g) = 0$ или $\langle f,g\rangle = 0$ либо $\langle f|g\rangle = 0$. Условие ортогональности в пространстве Лебега $\mathscr{L}_2$) играет важную роль в поиске доказательств гипотез в теории чисел.

Для указанных функций $\forall \quad f(x)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$c_k = (f,\psi_k) \qquad f = \sum_k^\infty c_k\psi_k = \sum_k^\infty (f,\psi_k)\psi_k \tag{1.3}$$

Верно равенство Парсеваля-Стеклова [ЖВ22] для ортонормальной системы $\{\psi_k\}$, полной в $\mathscr{L}_2$:

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

$$\sum_k^\infty \left|(f,\psi_k)\right|^2 = \left|f\right|^2 \tag{1.4}$$

Из теоремы Рисса-Фишера следует:

Уравнение замкнутости

Для того чтобы ортонормальная система $\{\psi_k\}$ была полной в $\mathscr{L}_2$ необходимо и достаточно чтобы

- для $\forall f$ выполнялось равенство Парсеваля-Стеклова;
- $\forall f$ из множества $\mathscr{M}$ плотного в $\mathscr{L}_2(G)$ можно было сколь угодно точно приблизить в $\mathscr{L}_2(G)$ линейной комбинацией функций этой системы.

(См. § 1 там же).

Изложенные выше свойства для пространство Лебега $\mathscr{L}_2(G)$ справедливы и для его дискретного аналога l_2 и тем более для его конечномерных подпространств пространства l_2. Согласно теореме Рисса-Фишера простран-

ство Лебега $\mathscr{L}_2(G)$ изоморфно пространству Гильберта H.

В квантовой физике - волновая функция, являющаяся решением линейного уравнения Шрёдингера, определяется в координатном $\phi(q,t)$ либо импульсном представлении $\psi(p,t)$.

Уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}(p,q)\Psi \tag{1.5}$$

Симметрия квантовомеханической некоторой группы проявляется как инвариантность уравнения Шрёдингера относительно преобразований над переменными координат и импульса (q,p) из этой группы (напомним, что в классической механике преобразования, сохраняющее вид гамильтониана называют каноническими). Если уравнение Шрёдингера инвариантно относительно преобразования, то после преобразования оно должно сохранить прежний вид [Зел02]. Очевидно, что это будет выполнено, если эта подстановка не изменит вид гамильтониана $H(x)$ 1.5.

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

Следствием инвариантности гамильтониана при канонических преобразованиях является его эрмитовость. Для эрмитова оператора собственные значения являются действительными числами и соответствуют энергии системы. В ортонормированной системе функций можно подобрать базис из собственных векторов, отвечающих своим собственным значениям (энергии), где гамильтониан системы приобретает простой вид

$$\widehat{H}\psi = E\psi \tag{1.6}$$

где E - энергия исследуемой системы (сумма энергий подсистем). Это соответствует теореме о кинетической энергии, изучаемой в на уроках механики в школе [Фер00].

[Фер00]: Ферми (2000), «Лекции по квантовой механике.»

Собственные значения образуют дискретную последовательность (конечную или бесконечную счетную), что является характерным для собственных значений, собственные функции принадлежащих пространству Гильберта.

Скалярное произведение Ψ_1, Ψ_2 являющихся решением 1.5 определяется по формуле:

$$\langle \Psi_1,\, \Psi_2 \rangle = \sum_p \left\langle \Psi_1,\, \psi_p \right\rangle \left\langle \psi_p,\, \Psi_2 \right\rangle . \tag{1.7}$$

Налицо аналогия с обычным комплексным векторным пространством. Полная ортонормированная система функций играет роль базисной системы ортогональных друг другу векторов единичной длины. Функция Ψ есть вектор в этом пространстве (с бесконечным числом измерений), коэффициенты Фурье 1.3 - это компоненты по направлениям базисных векторов, а норма этого вектора равна сумме квадратов модулей составляющих. Скалярное произведение 1.7 равно сумме произведений c_p - каждой компоненты 1.3 на величину, комплексно сопряженную соответствующей компоненте c_p^*. Интегрируемость оператора, действующего на произвольное решение управление Шрёдингера $A\Psi$:

$$A\Psi = \sum_{p,r} c_p^r A\psi_p = \sum_{p,r} a_p c_p^r \psi_p. \tag{1.8}$$

определена в силу сходимости ряда $\sum_{p,r} a_p^2 \left|c_p^r\right|^2$ для финитной волновой функции Ψ и оператора A с ограниченной нормой (которая инвариантна относительно выбранного базиса) [Сад04].

[Сад04]: Садовничий (2004), Теория операторов

2 Характеристическая $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$

В случае ограниченной нормы оператора и сходимости ряда можно определить оператор $F(A)$ через разложение в степенной ряд по квадратной матрице $a_p\, c_p^r$ вида: $F(A)\Psi = \sum_{p,r} F(a_p) c_p^r \psi_p$. Такое определение функции $F(A)\Psi$ также не зависит от базиса, в частности для функции экспоненты $e^{i\xi A}$:

$$e^{i\xi A}\,\Psi = \sum_p e^{i\xi a_p} c_p \psi_p. \tag{2.1}$$

Можно определить статистическое распределение $f(\xi)$ случайной величины для любого динамического состояния физической системы. Действительно, введённая русским математиком и механиком А.М. Ляпуновым характеристическая функция $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\, dx$ распределения случайной величины $P(x)$ (для дискретного случая определяется по формуле: $f(\xi) = \sum_n e^{i\xi X_n}$, знание которой позволяет полностью описать распределение - это по определению, среднее значение величины e^A в этом состоянии. Воспользовавшись определением среднего 2.20, вычислим непосредственно это среднее значение с помощью выражения:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{\left\langle \Psi,\, e^{i\xi A}\, \Psi \right\rangle}{\langle \Psi,\, \Psi \rangle} \\ f(\xi) &= \sum_p w_p e^{i\xi a_p} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Где определение весовых коэффициентов задаётся формулами:

$$w_p = \frac{\sum\limits_r |c_p|^2}{\langle \Psi, \Psi \rangle} = \frac{\sum\limits_r \left|\left\langle \psi_p, \Psi \right\rangle\right|^2}{\langle \Psi, \Psi \rangle}. \tag{2.3}$$

Из выражения для характеристической функции распределения следует что:

- Величина $f(\xi)$ может принимать только значения $_{1,2,\ldots} a_p$ т. е. собственные значения сопоставленного ей оператора. a_p
- Вероятность того, что Ψ примет значение a_p, есть w_p.
- Среднее значение $\left\langle f(\xi) \right\rangle$ дается выражением при условии сходимости этого ряда что обеспечивается в силу полноты ортонормальной системы и равенства Парсеваля-Стеклова 1.4.

.

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Кубо, анализируя матрицу плотности свободной частицы в координатном преставлении, приводит формулу для элемента статистической матрицы в координатном q-представлении §2.32 [Куб07]:

$$\langle q' \mid e^{-\beta\hat{H}} \mid q'' \rangle = \exp\left\{-\beta\hat{H}(q') \sum_i \varphi_i(q')\varphi_i^*(q'')\right\}$$
$$= \exp\left\{-\beta\hat{H}(q')\right\} \delta(q' - q'') \quad (2.4)$$

Важно отметить, что хотя ряд $\sum_l \psi_l(q')\psi_l(q'')^*$ не сходится в обычном смысле, его можно рассматривать как δ-функцию Дирака. Это следует из того, что если функции $\psi_k \quad (l = 1, 2, \dots)$ образуют полную систему $\{\psi_k\}$ в функциональном пространстве, удовлетворяющем заданным граничным условиям, то для любой функции 1.3 выполняется соотношение:

$$\int \sum_l \psi_l(q')\psi_l^*(q'')f(q'')dq'' = f(q') \quad (2.5)$$

и эта формула является одним из способов определения δ-функции.

В выражении 2.4 при разложении может быть использована произвольная система функций при условии, что она является полной. При этом не требуется, чтобы функции были собственными значениями уравнения 1.5. Это, очевидно, следует из того, что соотношение 2.5 является совершенно общим. Следовательно, в качестве базиса для представления матрицы плотности 2.4 может быть использована любая полная система функций, например, плоские волны 1.2, 1.3.

Уравнение Шрёдингера 1.5 эквивалентно некоторому эволюционному принципу. Рассматривая среднее значение энергии в состоянии ψ как функционал, определенный на классе квадратично интегрируемых функций L_2, можно отыскать функцию ψ, как соответствующую экстремуму этого функционала, путём обращающую в ноль вариации. Вычислив вариацию, легко убедиться, что условия экстремума удовлетворяются для функции ψ, если она подчиняется уравнению Шрёдингера:

$$\hat{H}\psi = \langle E \rangle \psi \quad (2.6)$$

а среднее значение энергии есть собственное значение в этом состоянии. Верно и обратное, если какая-то функция

ψ, имеет экстремум $\langle E \rangle$, то она удовлетворяет уравнению Шрёдингера.

Поэтому наинизшее значение $\langle E_{min} \rangle$ оператора $\hat{H}$ даёт абсолютный минимум функционала $\langle E \rangle$, который реализуется на волновой функции основного состояния системы ψ_0. Следующее по величине после $\langle E_{min} \rangle$ собственное значение $\hat{H}$ даёт, минимум $\langle E \rangle$ на классе функции ортогональных к ψ_0 и так далее.

Осцилляционная теорема

В квантовой теории осцилляционные теоремы связывают число узлов (нулей) волновой функции - решения уравнения Шрёдингера с номером энергетического уровня E_n осцилляционная теорема гласит: волновая функция $\psi(x)$ соответствующая n-му энергетическому уровню, имеет ровно n узлов (точек, где $\psi(x)$ обращается в нуль (не считая граничных точек). Это позволяет визуализировать энергетические состояния: основное состояние $n = 0$ не имеет узлов, первое возбуждённое $n = 1$ имеет — один узел и т.д. Например для квантового гармонического осциллятора решения (эрмитовы полиномы) имеют ровно n узлов для $E_n = 2n + 1$.

Здесь уместна аналогия осцилляционной теоремы и выражения для нетривиальных нулей функция $\Xi(t)$ 1.20.

В той или иной степени осцилляционная теорема изучается на уроках школьной химии изучается строение электронных оболочек атома s, p, d, f $\forall$, где литера обозначает соответствующую форму орбитали, вытекающую из решения уравнения Шрёдингера.

3 Прямое произведение групп

Изложенные выше принципы нахождения среднего через статистическую матрицу 7.3, а также соотношение ортогональности 3.8 для матричных элементов имеют аналогию при работе с целыми числами. Теорема сопоставляет свойству ортогональности элементов матриц неприводимых представлений свойство целых чисел, выражающееся в отсутствие общих делителей $(p, q) = 1$. (что в краткой

форме означает условие равенства единице наибольшего общего делителя). Проведём последовательный поиск доказательства.

Предположим, что исследуемая система находится в термодинамическом равновесии. В этом случае статистическая матрица имеет диагональный вид в базисе собственных состояний гамильтониана системы. Каждое значение энергетического уровня (оно же - собственное значение λ) повторяется на главной диагонали этой матрицы столько раз, какова его кратность. Диагональные матрицы коммутируют между собой.

Определение 3.1 Говорят, что группа G раскладывается на прямое произведение своих подгрупп $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ если:

1. Каждый элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде $g = g_1 \dots g_k$, где $g_i \in G_i$
2. $g_i g_j = g_j g_i$ для $g_i \in G_i$, $g_j \in Gj$, если $i \neq j$.

Очевидно, что если группа G конечна, то $|G| = |G_1| \dots |G_k|$. Условие (1) подразумевает, что $G_i \cap G_j = \{e\}$ для $i \neq j$. Правила умножения групп определены в условии (2) того же Определения 1.

Отождествляя каждый элемент с последовательностью $(e \dots g_i \dots e) \in G = G_1 \times \dots G_k$ где g_i элемент стоит на i месте, можно получить вложение $G_i \in G_1 \times \cdots \times G_k$ в виде подгруппы множество $n \times n$ обратимых матриц вместе с операцией обычного умножения матриц:

$$GL(n, R) \cong (K^*)^n = K_1^* \times \cdots \times K_n^* \tag{3.1}$$

где K^* обозначает кольцо целых чисел с операцией умножения. Выше было сделано допущение, что статистическая матрица является диагональной, эрмитовой, при этом значения плотности вероятностей $\hat{w}$ на главной диагонали являются вещественными и положительными значениями 7.4.

Разложение абелевой группы в прямое произведение циклических следует из теоремы о структуре конечных абелевых групп. Любая конечная абелева группа может быть разложена в прямую сумму своих циклических подгрупп, порядки которых являются степенями простых чисел.

Мультипликативная запись не меняет сути разложения — она лишь альтернативный способ обозначения групповой операции.

Учитывая, что абелева группа порядка m имеет точно m характеров, что $\forall$ конечная мультипликативная абелева группа G является прямым произведением циклических групп.

$$G \cong G_{r_1} \times G_{r_2} \times \cdots \times G_{r_m} \tag{3.2}$$

Приведенные классы вычетов по модулю $(mod\, m)$ образуют мультипликативную абелеву группу порядка $\phi(a)$, и это не случайно: функция Эйлера $\phi(a)$ как раз равна числу приведённых классов вычетов по модулю $m \mid a$.

4 Характер конечной абелевой группы

Сравним более детально свойства характерах конечной абелевой группы и аналогичные свойства для характера целых чисел. Можно распространить определение характера приведенных классов вычетов по модулю $(mod\, m)$ на все целые числа $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \chi(a) = \chi(b) \Longleftrightarrow a \equiv b (mod\, m) \\ \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \\ \chi(a) = 0 \quad \text{если} \quad (a, m) > 1 \\ \chi(a) \neq 0 \quad \text{если} \quad (a, m) = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

(Изложенное выше определение соответствует понятию характера Дирихле.)

$\chi(a)$ определяется на $\mathbb{Z}$ и обладает свойствами:

Периодичность: $\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b)\, \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Полная мультипликативность $\chi(a\dot{b}) = \chi(a)\dot{\chi}(b)\, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ обнуление $\chi(n) = 0$ если $(n, m) > 1$ В результате образуется мультипликативная абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ группе приведённых классов вычетов по модулю $(mod\, m)$, при этом порядок $m = \phi(a)$ - значению функции Эйлера.

$$\sum_{k(mod\, a)} \chi(k) = \begin{cases} \phi(a) & \text{если} \quad \chi = \chi_1 \\ 0 & \text{если} \quad \chi \neq \chi_1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Где суммирование произошло по всем характерам группы $\hat{G}$.

$$\sum_{\chi} \chi(k) = \begin{cases} \phi(m) & \text{если} \quad k \equiv 1(mod\, m) \\ 0 & \text{если} \quad k \neq 1(mod\, m) \end{cases} \tag{4.3}$$

Если представления имеют один и тот же набор характеров, то они эквиваленты - это следует из единственности разложения на неприводимые компоненты и свойств ортогональности характеров неприводимых представлений. Данное свойство распространяется и на случай бесконечных групп, если сравниваемые представления вполне приводимы 3.13. Здесь требуется пояснение. Из теории представлений известно, что характер представления однозначно определяет его с точностью до эквивалентности. Это следует из того, что характер — это след матрицы представления группы $\mathrm{Tr}(G)$, и если два представления имеют одинаковые характеры для всех элементов группы, то их неприводимые компоненты совпадают по кратности благодаря ортогональности характеров.

Неприводимые представления бесконечных групп

Для бесконечных групп неприводимые представления могут быть бесконечномерными. Однако если рассматривать вполне приводимые представления (те, которые разлагаются в прямую сумму неприводимых), то аналогичное свойство может сохраняться при условии, что разложение на неприводимые компоненты единственно, и характеры определёны корректно. Например, в компактных группах характеры неприводимых представлений образуют ортонормированную систему, и равенство характеров влечёт эквивалентность представлений.

Лемма об ортогональности и взаимной простоте может быть распространена на характеры неприводимых представлений.

Определение 4.1 Определение компактной группы. Компактная (топологическая) группа — это топологическая группа, топология которой реализует её как компактное топологическое пространство (при действии на элемент группы результат также остаётся в группе). Компактные группы являются естественным обобщением конечных групп с дискретной топологией и обладают свойствами, которые в значительной степени сохраняются. Компактные группы имеют хорошо изученную теорию, связанную с групповыми действиями и теорией представлений.

Сравнивая полученные результаты 4.1 с формулами нахождения среднего 2.20 оператора наблюдаемой и формулой следа для характеров представления группы 3.10, можно сделать вывод об их эквивалентности.

Аддитивная группа Z_n классов вычетов по модулю n является циклической 8.4.

Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ — каноническое представление целого числа путём разложения на простые множители, то верно следующее разложение:

$$Z_n \cong Z_{p_1{}^{l_1}} \oplus Z_{p_2{}^{l_2}} \cdots \oplus Z_{p_1{}^{l_k}} \tag{4.4}$$

Определение 4.2 Конечная примарная группу (p-группа) — это группа, для которой существует такое простое число p, что порядок каждого её элемента является некоторой степенью этого числа.

Поэтому наряду с комплекснозначная формулой произведения 8.8 можно применять аналогичную, но на основе произведения циклических групп Z_n 4.4.

5 Характеры $\chi^{(R)}$ регулярного представления

Характеры представления $\chi(g_1)$, $\chi(g_2)$, $\chi(g_3)$, $\dots$ $\chi(g_m)$, также можно рассматривать как составляющие вектора в m-мерном пространстве.

Характеры унитарных представлений

Для случая унитарных представлений характеры неприводимых представлений образуют систему ортонормированных векторов. Так как для элементов одного класса характеры совпадают, то все такие векторы принадлежат одному подпространству, при этом для одного класса компоненты векторов представляет собой равные величины

Применим операцию сдвига по всем элементам группы G путем умножения $\forall$ элемента слева g_s. Это можно выразить с помощью матрицы регулярного представления $\|R_{ij}\|$ порядка $m \times m$, в каждом столбце которой лишь один единичный элемент, а все остальные - нули. Регулярное представление содержит в себе все неприводимые представления группы в случае комплексных представлений конечных групп (это верно для алгебраически замкнутых полей, например, поля комплексных чисел). Согласно теореме Машке, регулярное представление разлагается в прямую сумму всех неприводимых представлений, причем каждое неприводимое представление входит в разложение столько раз, какова его размерность.

Произвольный вектор Φ подпространства может быть разложен по векторам, соответствующим неприводимым представлениям группы G, при этом $\Phi(g') = \Phi(g^{-1}g'g)$, для $\forall g, g'$, , что обеспечивается за счёт полноты системы неприводимых представлений. Раскладывая вектор Φ принадлежащий пространству R^m, по полной системе векторов, можно получить для компонент этого вектора соотношение:

$$\Phi(g') = \sum_{j,\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g') = \sum_{j,\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g^{-1}g'g) \quad (5.1)$$

Усредняя $\Phi(g')$ по всем элементам группы G и используя соотношение ортогональности 3.8, опуская промежуточные выкладки, получим [Пет99]:

[Пет99]: Петрашень Мария Ивановна (1999), Применение теории групп в квантовой механике

$$\Phi(g') = \frac{1}{m} \sum_j \sum_{j,\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g^{-1}g'g) = \sum_j B_j \chi^{(j)}(g')$$

$$B_j = \frac{1}{n_j} \sum_\alpha C^{(j)}_{\alpha,\alpha} \quad (5.2)$$

При этом число различных неприводимых представлении группы равно числу её классов сопряженности. В результате получена формула, выведенная ранее для усреднения наблюдаемой с использованием статистической матрицы 7.2.

Характеры $\chi^{(R)}$ регулярного представления вычисляются по формуле особенно просто:

$$\begin{cases} \chi^{(R)}(g_s) = m & \text{если} \quad g_s = E \\ \chi^{(R)}(g_s) = 0 & \text{если} \quad g_s \neq E \end{cases} \tag{5.3}$$

Из последней формулы и 3.12 очевидно следует, что каждое неприводимое представление содержится в регулярном столько раз, каков порядок этого неприводимого представления n_i. Порядок приводимого представления равен сумме квадратов неприводимых (с учетом их кратности r_i) согласно формуле 3.9.

Число ортогональных векторов $D^{(j)}_{\alpha,\beta}$ совпадает с размерностью векторного пространства, в котором реализуется регулярное представление $\sum_j n_j^2 = m$ и векторы $D^{(j)}_{\alpha,\beta}$ образуют в нем полную систему ортогональных векторов. Это позволяет нагляднее отследить связь с целыми числами.

6 Функция Грина. Пропагатор

В этой подсекции H - гамильтониан ψ и Ψ - волновые функции, ρ - плотность вероятности, G - функция Грина K - её разновидность пропагатор S - действие.

Перейдём теперь к полному уравнению Шрёдингера, описывающему эволюцию во времени. Для стационарных состояний зависимость от времени является чисто гармонической в силу вещественности энергии. Среднее значение любой физической величины, не зависящей явно от времени в стационарном состоянии, оказывается постоянным.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве произвольное, в общем случае, нестационарное решение уравнения Шрёдингера $\Psi(q,t)$, где q обозначает не одну, а совокупность

переменных данного представления, запишем его в виде разложение по времени [Зел02]:

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

$$\Psi(q,t) = \sum_n \bar{\psi}_n(q) e^{-iw_n t} \tag{6.1}$$

где $\bar{\psi}_n(q)$ - коэффициент разложения, а знак суммы означает сумму по Фурье-гармоникам. Подставляя разложение в уравнение Шрёдингера, считая, что гамильтониан $\hat{H}$ не зависит явно от времени, принимая во внимание условие ортонормированности, приравнивая коэффициенты по каждой гармонике отдельно, получим:

$$\hat{H}\bar{\psi}_n(q) = \hbar w \psi_n(q) \tag{6.2}$$

Коэффициенты $\bar{\psi}_n(q)$ разложения являются решениями стационарного уравнения Шрёдингера, отвечающим энергии $E_n = \hbar w_n$

Из условия нормировки 1.2 и ортогональности волновых функций ψ_n следует вывод, что коэффициент разложения $\bar{\psi}_n(q)$ в формуле 6.1 отличается от нормированных волновой функции лишь постоянными множителями, в общем случае комплексными $\bar{\psi}_n(q) = c_n \psi_n$, следовательно:

$$\Psi(q,t) = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(q) \tag{6.3}$$

Эта формула даёт общее решение для нестационарного уравнения Шрёдингера. Заметим, что для квазиклассического приближения волновую функцию часто выражают через две вещественные модуль - корень из плотности вероятности 2.9 и фазу, как интеграл от аналога достаточно плавно изменяющегося классического импульса частицы по пути движения, что позволяет выразить волновую функцию Ψ как функцию от плотности вероятности ρ и фазы S:

$$\Psi = \sqrt{\rho} \cdot exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) \tag{6.4}$$

Выбор решения уравнения Шрёдингера для конкретной физической ситуации зависит от начальных условий. Согласно квантовомеханическому принципу причинности

задание волновой функции в начальный момент времени полностью определяет дальнейшую эволюцию системы.

Поскольку начальная волновая функция может быть произвольно задана, это означает, что любая $\Psi(q,t)$ может быть разложено представлена как суперпозиция по стационарным решением уравнения Шрёдингера. Стационарные волновые функции $\psi_n(q)$ образуют полную ортонормированного систему функций, при этом коэффициенты c_n в 6.3 легко находятся по формуле:

$$c_n = \int \psi_n^* \Psi(q,0)\, d\tau \tag{6.5}$$

Из чего следует вывод, что величина $\left[\psi_n\right]^2$ даёт вероятности обнаружения у системы энергии E_n, при этом среднее значение энергии системы не зависит от времени:

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \sum_m E_m \left|c_m\right|^2 \tag{6.6}$$

Поскольку исходное состояние системы нестационарно и не имеет определённой энергии, можно говорить лишь о среднем значении энергии. Из сказанного вытекает важное следствие: задание амплитуд c_n полностью определяет состояние системы.

Выразим решение Ψ_n для произвольного момента времени через начальные условия.

Подставляя 6.5 в 6.3 получаем:

$$\begin{aligned}\Psi(q,t) = \sum_n \int \psi_n^*(q')\Psi(q',0)\psi_n(q)e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\, d\tau \\ = \int G(q,q',t))\Psi_n(q',0) d\tau\end{aligned} \tag{6.7}$$

Здесь введена функция Грина описывающая распространение любого исходного пакета:

$$G(q,q',t) = \sum_n \psi_n(q)\psi_n^*(q')e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \tag{6.8}$$

Функция Грина также подчиняется уравнению Шрёдингера и представляет собой его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, которые легко найти положив в 6.7 время $t = 0$. $\Longrightarrow$ вывод, граничное условие - правая часть дифференциального уравнения Шрёдингера:

$$G(q, q', 0) = \delta(q - q') \tag{6.9}$$

Из двух последних формул следует, что для того, чтобы произвольное решение уравнение Шрёдингера можно было представить в виде 6.3 необходимо соблюдение условия:

$$\sum_n \psi_n(q)\psi_n^*(q') = \delta(q - q') \tag{6.10}$$

Заметим, что $G(q, q', t, t')-$ определяется как пропагатор в квантовой механике, он соответствует амплитуде вероятности перемещения частицы из одного места пространства в другое за заданный промежуток времени или вероятности перемещения частицы с определённой энергией и импульсом.

Несложно вывести [Зел02] формулу пропагатора для свободного движения частицы:

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

$$K(r, r', t) = \frac{m}{2\pi i\hbar t} exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar t}(r - r')^2\right\} \tag{6.11}$$

Легко проследить аналогию пропагатора с формулой для определения так называемой $\psi(\frac{1}{x})$ - функции, введенной Риманом 1.9 и 1.12, где можно задать $r' = 0$, $r = n$, $t = x$. Такая аналогия может на первый взгляд оказаться искусственной, но в следующем разделе она будет раскрыта более полно.

Функция Грина, пропагатор основаны на принципе линейности воздействия независящих факторов, суперпозиции сил, полей. Для случая квазиклассического приближения в уравнения Шредингера подставляется функция в виде, аналогичном 6.4, но с добавлением комплексного слагаемого в виде корня из плотности вероятности в фазу $\frac{\hbar}{i} ln(\sqrt{\rho})$ и дальнейшим разложением фазы в ряд по степени постоянной Планка:

$$\psi(\mathrm{r}) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\mathrm{r})\right)$$
$$S = S_0 + \hbar S_1 + \frac{\hbar^2}{2}S_2 + \cdots \tag{6.12}$$

Подставляя 6.12 в уравнение Шредингера и приравнивая члены с одинаковыми степенями $\hbar$, несложно вывести уравнение для волнового пакета с заданным направлением распространения, вычислить как для классического случая его амплитуду через импульс $p(x)$ по формуле: $A(x,t) = \frac{const}{\sqrt{p(x)}}$ и фазу в точности до множителя $\frac{i}{\hbar}$ равную классическому действию 2.2.

Интересно отметить, что с математической точки зрения описанное квазиклассическое приближение при решении задач квантовой механики (1926) WKB Вентцеля, Крамерса, Бриллуэна является разновидностям метода стационарной фазы. На основании WKB разработана альтернативная формулировка квантовой теории метод интегралов по путям Фейнмана [Тах11], заключающаяся в суммировании вкладов от всех траекторий с весом экспоненты $exp\left\{i\frac{S}{\hbar}\right\}$, где S - классическое действие 2.2 вдоль данной траектории. Классический принцип наименьшего действия отбирает из семейства виртуальных траекторий одну, удовлетворяющую классическим уравнение движения.

[Тах11]: Тахтаджян (2011), Квантовая механика для математиков, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск 2011, 496 с.; English transl., LA Takhtajan, Quantum mechanics for mathematicians

Метод интегралов по путям Фейнмана

Квантовая механика основана на принципе суперпозиции траекторий, где результирующая волновая функция (амплитуда вероятности) определяется интерференцией их вкладов, имеющих разные фазы [Зел02]. Это напоминает явление интерференции волн в оптике.

[Зел02]: Зелевинский (2002), Лекции по квантовой физике

Аналогию пропагатора с формулой функции $\psi(x)$, введенной Риманом, следует рассмотреть детальнее.

Свойство аддитивности энергии, энтропии, числа частиц подсистем, образующих исследуемую систему, в действительности является проявлением явления симметрии.

6.1 Интегральное уравнение Фредгольма

В этой секции ϕ, ψ - искомые функции для решения интегрального уравнения, $\mathbb{K}$ - непрерывное ядро интегрального уравнения K - оператор ядра E - единичная матрица.

Рассмотренная выше функция Грина 6.8 - это пример интегрального уравнения - уравнения, содержащего искомую функцию под знаком интеграла на некоторой области Ω из n-мерного евклидова пространства R^n (для простоты изложения можно считать эту область одномерным открытым интервалом $(0, a)$ - на вывод формул такое упрощение не влияет).

$$\phi(x) = \mu \int\limits_{\Omega} \mathbb{K}(x, y)\phi(x)dy + f(x) \tag{6.13}$$

и союзное к нему интегральное уравнение

$$\psi(x) = \mu \int\limits_{\Omega} \mathbb{K}^*(x, y)\psi(x)dy + g(x) \tag{6.14}$$

(Здесь подразумевается непрерывное ядро $\mathbb{K}$, заданное на замкнутой области $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.) Подразумевается, что функция f и ядро $K(x, y)$ непрерывны на соответствующих областях определения.

Из теории интегральных уравнений известно, что комплексное значение μ, при котором однородное интегральное уравнение имеет нетривиальные решения из $L_2(G)$, называется характеристическим числом ядра $\mathbb{K}$, а соответствующие решения — собственными функциями этого ядра, отвечающими этому характеристическому числу.

Определение 6.1 Характеристические числа μ ядра $\mathbb{K}$ и собственные значения λ оператора взаимнообратны, а их собственные функции совпадают.

В операторной форме уравнения 6.13, 6.14 быть выражены как:

$$\begin{aligned} \phi &= \lambda K\phi + f \\ \psi &= \overline{\lambda} K^*\psi + g \end{aligned} \tag{6.15}$$

где интегральные уравнения определяются ядрами

$$(Kf)(x) = \int_G \mathbb{K}(x,y)f(y)dy$$

$$(K^*f)(x) = \int_G \mathbb{K}(x,y)f(y)dy \quad (6.16)$$

соответственно. Возможно последовательное применение операторов $K_3 = K_2K_1$ по правилу $(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*$), а также возможны повторные ядра $K^{p+1} = K(K^p) = (K^p)K$.

Упрощение до системы алгебраических уравнений

Каждое интегральное управление с вырожденным ядром, т.е. с разделяемыми $\mathbb{K}(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$ переменными, эквивалентно системе алгебраических уравнений уравнений с = μAc+a, и этот результат обобщается на $\forall$ непрерывные ядра. [ЖВ22].

[ЖВ22]: Жаринов и др. (2022), Уравнения математической физики

Операторная форма позволяет лаконично выразить решение интегрального уравнения вида 6.13 через резольвенту по формуле:

$$(I - \mu K)^{-1} = 1 + \mu R, |\mu| < \frac{1}{MV} \quad (6.17)$$

Здесь $M = max(|\mathbb{K}(x,y)|)$ - это максимальное по абсолютному значение ядра при этом $x, y \in$ исследуемой области, а переменная $V = \int_\Omega dy$ обозначает меру исследуемой области.

Решение 6.14 находится с помощью резольвенты:

$$\phi(x) = f(x) + \mu \int_\Omega \mathbb{R}(x,y)f(y)dy \quad (6.18)$$

В свою очередь резольвента определяется по формуле:

$$\mathbb{R}(x,y,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \mathbb{K}_{i+1}(x,y) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{N} M_{i,k} f_i(x) g_k(y) \quad (6.19)$$

Этот ряд аналитичен по μ и сходится в круге $|\mu| < \frac{1}{MV}$. Под $D(\mu)$ подразумевается определитель соответствующего алгебраического уравнения $D(\lambda) = det(E - \lambda A)$, $M_{i,k}$ обозначает алгебраическое дополнение матрицы $(E - \lambda A)$, для которого степень многочлена по λ на единицу меньше $D(\lambda)$. Повторное ядро и повторная резольвента эрмитово сопряженного ядра выражаются через повторные ядра и соответственно резольвенту исходного ядра аналогично, по общим правилам работы над линейными операторами. В круге $|\mu| < \frac{1}{MV}$ существует и ограничен обратный оператор:

$$(I - \overline{\mu} K^*)^{-1} = 1 + \overline{\mu} R^*, |\mu| < \frac{1}{MV} \tag{6.20}$$

Для союзного интегрального уравнения определитель и ранг матрицы $\overline{A^*}$ совпадают с ранее полученными значениями. Согласно I теореме Фредгольма при $D(\lambda) \neq 0$, то интегральное уравнение 6.13 и союзное к нему 6.14 уравнение разрешимы при любых свободных членах f и соответственно g. Оба упомянутых уравнения имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений равное $n - rank(E - \lambda A)$ (II теорема Фредгольма).

Уравнения 6.17 и 6.19 имеют вид, аналогичный 1.2. Эта аналогия объясняется с позиции квантовой физики.

7 Статистическая матрица.

В этой секции все операторы и матрицы рассматриваются в гильбертовом пространстве.

Уравнение Лиувилля описывает эволюцию плотности вероятности $\rho(p_i, q_i; t)$ во времени. Согласно правилу нахождения полной производной функции с учётом несжимаемости потока плотности вероятности по аналогии с жидкостью в фазовом пространстве:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, \hat{H}\} \tag{7.1}$$

Это теорема Лиувилля, она непосредственно следует из инвариантности фазового объема при канонических преобразованиях. Эти же преобразования объясняют лаконичную запись скобок Пуассона $\{\rho, \hat{H}\}$. [Лан04].

[Лан04]: Ландау (2004), Теоретическая физика. Том 1. Механика

Для квантово-механического случая можно сопоставить любой исследуемой системе статическую матрицу в жордановой форме или блочно- диагональном виде в гильбертовом пространстве, на диагоналях которой будут записаны вероятности обнаружения микрообъекта в заданном квантовом состоянии. Вместе такие вероятности образуют полную группу событий, а их сумма равна единице, как предусматривают 2.10, 2.14 и условие нормировки.

Для нахождения статистической матрицы исследуемой системы предположим сначала, что она находится в чисто квантовом состоянии с волновой функцией $\left\langle n|\widehat{\psi}|m\right\rangle$.

Среднее значение наблюдаемой f выражается формулой вида:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{nm} c^* c f_{nm} = \sum_{nm} w_{nm} f_{nm} \\ f_{nm} &= \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m \, dq \end{aligned} \tag{7.2}$$

Множество величин w_{nm} это элементы матрицы плотности (или статистического оператора) в энергетическом представлении. - они образуют статистическую матрицу. Задача нахождения такой матрицы сводится к вычислению вероятностей $w_n = w_{nn}$ - это вероятности нахождения системы в состояниях с энергией E_n, и они образуют диагональные элементы матрицы плотности.

Формула для среднего значения произвольной величины f упрощается. В работе [ЛЛ02] w_{mn} рассматриваются как матричные элементы статистического оператора $\hat{w}$. Статистический оператор (или матрица плотности) описывает смешанное состояние системы.

[ЛЛ02]: Ландау и др. (2002), Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика

В этом случае сумма $\sum_n w_{mn} f_{nm}$ будет диагональным матричным элементом $\hat{w}\hat{f}$, а среднее значение наблюдаемой $\hat{f}$ будет вычисляться по формуле для нахождения следа от суперпозиции операторов - соответствующие матрицы просто перемножаются:

$$\bar{f} = \sum_n (\hat{w}\hat{f})_{nn} = tr(\hat{w}\hat{f}) \tag{7.3}$$

Эта формула позволяет производить вычисление среднего $\overline{f}$ с помощью полного набора взаимно ортогональных нормированных функций. Заметим, что смешанное состояние представляет собой статистический ансамбль различных чистых состояний, каждое из которых возникает с определённой вероятностью. Такое состояние не может быть описано одним вектором состояния. Вместо этого оно описывается матрицей плотности, которая представляет собой взвешенную сумму матриц плотности чистых состояний ансамбля.

Представление Шрёдингера, как способа описания квантовомеханических явлений, эволюция системы во времени описывается изменением вектора состояния, а операторы физических величин постоянны. Для матрицы плотности производная по времени от оператора $\dot{w}$ вычисляется с помощью коммутатора аналогично 3.2:

$$\dot{\hat{w}} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{w}, \hat{H}\right] = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{w}\hat{H} - \hat{H}\hat{w}\right) \tag{7.4}$$

Это условие выполняется, если матрица плотности коммутирует с гамильтонианом.

Таким образом получено выражение - квантово-механический аналог теоремы Лиувилля. Для стационарности статистической матрицы необходимо обращение в нуль производной $\dot{\hat{w}}$, другими словами, чтобы оператор $\dot{\hat{w}}$ коммутировал с гамильтонианом $H \Longrightarrow$ статистическая матрица является диагональной, эрмитовой, при этом значения плотности вероятностей $\dot{\hat{w}}$ на главной диагонали являются вещественными и положительными значениями. Знание спектра волновой функции в энергетическом представлении позволяет определить саму волновую функцию в точности до фазы. Фаза волновой функции не влияет на наблюдаемые величины, такие как плотность вероятности или средние значения.

След оператора инвариантен относительно выбора базиса.

Произвольное состояние, в общем случае, нестационарное решение уравнения Шрёдингера, можно выразить $\Psi(q,t)$ как через интеграл Лебега - функцию Грина 6.8 в L_2, так

и в гильбертовом пространстве. (Оба представления эквивалентны благодаря изоморфизму между пространством L_2 и гильбертовым пространством H.)

Таким образом для произвольной квантово-механической системы можно составить диагональную статистическую матрицу, и среднее значение наблюдаемой будет вычисляться через след этой матрицы с использованием полного набора ортогональных нормированных функций. При наличии вырожденных уровней энергии собственные значения на диагонали повторяются с учетом кратности вырождения. Для нахождения энтропии достаточно вычислить среднее от следа от статистической матрицы.

8 Каноническое распределение Гиббса

Механические состояния, совместимые с данным термодинамическим состоянием, составляют статистический ансамбль. Статистический ансамбль представлен в фазовом пространстве набором точек, распределение которых описывается плотностью вероятности. Она даёт ответ о вероятности нахождения такого состояния всей системы, при котором данное тело находится в некотором определенном квантовом состоянии w_n с энергией E_n, в состоянии, описанном микроскопическим образом. Микроскопическое состоянием внешней среды при этом не отслеживается.

Условие нормировки для распределения гласит:

$$\sum_n w_n = e^F T \sum_n e^{-E_n/T} = 1,$$

или

$$F = -T \ln \sum_n e^{-E_n/T}.$$

Эта формула является основой для термодинамических применений распределения Гиббса. Она дает в принципе возможность вычислить термодинамические функции любого тела, если известен его энергетический спектр.

Стоящую в последней формуле под знаком логарифма сумму обычно называют статистической суммой. Она

представляет собой не что иное, как след оператора $\exp(-\hat{H}/T)$, где $\hat{H}$ — гамильтониан данного тела:

$$Z \equiv \sum_n e^{-E_n/T} = \mathrm{Sp}(e^{-\hat{H}/T}). \tag{8.1}$$

Такая форма записи обладает тем преимуществом, что для вычисления следа можно пользоваться любой полной системой волновых функций.

Каноническое распределение Гиббса основано на простом принципе: вероятность нахождения сложной системы 1-2 равна произведению вероятностей её подсистем 1 и 2: $\rho_{12} = \rho_1 * \rho_2$ (из чего следует удобство применения логарифмов для исследования сложной системы). Опираясь на этот постулат равновероятности всех доступных исследуемой системе микросостояний, вытекающий из симметрии, Гиббс вывел формулу:

$$\begin{aligned} w_n &= exp\left(\frac{F - E_n}{T}\right) \\ w_n &= exp(\beta F - \beta E_n) \\ s &= -\ln w_n = \beta E_n - \beta F \\ \rho &= (2\pi h)^s exp\frac{F - E(p,q)}{T} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Выше приведена функция распределения вероятности по энергии системы в состоянии E_n в квантово-механическом представлении, нижняя формула — в квазиклассическом представлении. Здесь

- $w_n(p,q)$ — вероятность нахождения в состоянии, соответствующему волновой функции с собственным значением
- E_n. - энергия как функция от обобщенных координат,
- s — число степеней свободы.
- F - свободная энергия газа. (В термодинамике за счет разницы свободных энергий конечного и начального состояний газа совершается работа, что объясняет удобство использования этой переменной).
- ρ — плотность вероятности нахождения в конкретной фазовом дифференциале,

Как только рассматривается отдельная одно конкретное микросостояние i, можем определить случайную величину микросостоянийной энтропии (или “информационное содержание”):

$$s_i = -\ln w_i.$$

Её математическое ожидание как раз и есть энтропия Гиббса-Шеннона

Любопытно отметить, что свободная энергия газа является простым следствием условия нормировки приведенного выше канонического распределения Гиббса. Это наглядный пример связи между математикой, теоретической физикой и лабораторным экспериментом. В термодинамике свободная энергия F, энтропия S, энергия E, объем V, давления P, температура T ряд других переменных выводятся друг из друга и контролируются. Первые три перечисленные переменные являются аддитивными функциями.

Возможно, что квазиклассическим является не все микроскопическое движение частиц, а лишь движение, соответствующее части степеней свободы, в то время как по остальным степеням свободы движение является квантовым. Например, может быть квазиклассическим поступательное движение молекул при квантовом характере внутримолекулярного движения атомов. В таком случае уровни энергии тела можно написать в виде функций от квазиклассических координат и импульсов $E(p, q)$.

Упомянутые выше распределения Больцмана и Максвелла являются частными случаями канонического распределения Гиббса. В первом случае в числителе дроби экспоненты подставляется с отрицательным знаком потенциальная энергия, во втором — кинетическая. В знаменателей в обоих случаях остаётся T либо kT.

В силу идентичности молекул газа при анализе распределения Максвелла достаточно рассмотреть фазовое пространство лишь одной молекулы, выразить энергию в импульсном представлении в координатах

$E = \frac{1}{2}m(px^2 + py^2 + pz^2) + \epsilon_k$, при этом ϵ_k -это энергия газа, поделенная на число молекул газа, k-ый уровень энергии одной молекулы, приходящаяся на её вращательные, колебательные степени свободы, собственный момент импульса элементарных частиц, спин и др. Далее

интегрирование по обобщенным координатам dq системы можно заменить на простое умножение на объем сосуда — аналогичный алгоритм применяется для распределения Максвелла (2.6). Это значительно упрощает вычисления. В результате для нахождения свободной энергии F идеального газа (напомним, что разница свободной энергии конечного и начального состояния как раз равна совершенной работе за счет газа) используется следующая формула [9 форм. 31.3, 31.2]:

$$F = -NTln\left[\frac{eV}{N}\left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}Z\right] = -NTln\frac{eV}{N} + Nf(T) \tag{8.3}$$

Где

- N — число молекул
- — абсолютная температура в энергетических единицах
- e — число Эйлера 2.718 . . .
- V — объем сосуда, m — масса молекулы
- $\hbar$ - приведенная постоянная Планка, равная $1.055 * 10^{-34}$ Дж *сек.
- Z — статистическая сумма, зависящая от энергетических уровней молекулы, её определение будет приведено ниже.

Начальные температура, объем и кол-во частиц рассматриваются как заданные извне параметры исследуемой системы. Альтернативное представление приведенной выше формулы заключается в выносе всех параметров в отдельную функцию, зависящую лишь от температуры $f(T)$.

Энтропия S определяется из термодинамических соотношений как частная производная со знаком минус от свободной энергии:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nln\frac{eV}{N} - N\frac{df}{dT}(T) \tag{8.4}$$

Исходя из основных уравнений термодинамики, можно найти и другие термодинамические переменные исследуе-

мой подсистемы, чем полностью определить либо задать её макроскопическое состояние.

9 Вырождение энергетических уровней

Когда разные волновые функции имеют одно и то же собственное значением энергии E_n, то это означает вырождение энергетического уровня. Показатель степени в формуле 3.6 соответствует кратности вырождения энергетического уровня, обозначаемый как статистический вес g_k. В этом случае часть формулы (8.2) содержит статистическую сумму, определяемую по формуле [10, стр. 35 форм. 1.71b]

$$Z = \sum_k g_k e^{-\epsilon_k/kT} \tag{9.1}$$

Условие нормировки для формулы (8.3) позволяет вычислить свободную энергию F через вероятности квантовых состояний:

$$1 = \sum_n^N w_n = e^{F/T} \sum_n^N e^{-E_n/T} \Rightarrow F = -Tln \sum_n^N e^{-E_n/T} \tag{9.2}$$

Применим общую формулу (8.3) для вычисления свободной энергии идеального газа, подчиняющегося статистике Больцмана. Написав энергию $_n$ в виде суммы энергий молекул ϵ_k, можно свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельной молекулы, как и в случае распределения Максвелла. Каждое состояние газа будет определяться набором N (N — число молекул в газе) значений ϵ_k, которые в больцмановском случае можно считать все различными между собой (в каждом молекулярном состоянии — не более одной молекулы в силу ограничений, налагаемых волновыми функциями для фермионов, поскольку именно с такими объектами работает Барометрическая формула). Записав $e^{-\frac{E_n}{T}}$ в виде произведения множителей $e^{-\frac{\epsilon_k}{T}}$ для $\forall$ из молекул и суммируя независимо по всем состояниям каждой молекулы, мы получим выражение, соответствующее N

$$\left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T}\right)^N = \sum_n e^{-E_n/T} = \frac{1}{N!}\left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T}\right)^N \tag{9.3}$$

При этом все наборы N различных значений, отличающиеся лишь распределением одинаковых молекул газа по уровням ϵ_k соответствуют одному и тому же квантовому состоянию газа. Вместе с тем, в статистической сумме, в формуле, выше каждое из состояний должно учитываться лишь один раз. Поэтому мы должны еще разделить выражение полученное выражение на число возможных перестановок N молекул друг с другом, т. е. на $N!$ и оценить значение с применением формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

В результате такой оценки получим формулу для свободной энергии больцмановского идеального газа:

$$F = -NTln\left[\frac{e}{N}\sum_k e^{-\epsilon_k/T}\right] \tag{9.4}$$

В случае вырожденных энергетических уровней число повторов соответствующего значения ϵ_k равно кратности вырождения. Что произойдет с формулами (8.4) и (9.1) для смеси газов? Для ответа на поставленный вопрос обратится к большому каноническому распределению Гиббса с переменным числом частиц:

$$w_{n,N} = Aexp\frac{\Omega + \mu N - E_{n,N}}{T} \tag{9.5}$$

Здесь выше — функция распределения подсистемы одного идеального газа по двум переменным:

- значению энергии E_n и числа частиц N
- Ω - термодинамический потенциал
- T — абсолютная температура в энергетических единицах
- μ — химический потенциал молекулы.

Теперь определим функция распределения подсистемы смеси идеальных газов газа по переменным — значению

энергии E_n и числа частиц N_1, N_2, N_3 - здесь также возможны вырожденные уровни энергии.

$$w_{n,N_1,N2\ldots} = A\, exp \frac{\Omega + \sum_i \mu_i N_i - E_{n,N_1,N2\ldots}}{T} \tag{9.6}$$

Энергию E_n также можно представить в виде суммы энергий молекул ϵ_k, за счет чего свести суммирование по всем состояниям газа к суммированию по всем состояниям отдельной молекулы [[Куб07]]

[Куб07]: Кубо (2007), Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме

Для смеси идеальных газов приведенные выше формулы остаются в силе, только вместо N подставляется количество молекул соответствующего газа. Для смеси газов обладают свойствами аддитивности следующие термодинамические переменные: число молекул, энергия, энтропия, парциальное давление каждого газа термодинамически потенциал и ряд других. При этом объем и температура по правилам термодинамики одинаковы для всех молекул каждого газа из смеси.

10 Группа на основе нормированных статсумм

[Вин02]: Винберг (2002), Курс алгебры. 3-е изд

Z-суммы определяются как матрицы плотности (операторы). И для составной системы из независимых подсистем общая матрица плотности формируется в соответствии с правилами тензорного произведения матриц [Вин02]:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Общ.}} &= \bigotimes_{i=1}^{m} Z_i \\ \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_{\text{Общ.}}) &= \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1) \otimes \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_2) \ldots \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_m) \end{aligned} \tag{10.1}$$

В этом случае для каждого элемента на диагонали результирующей матрицы будут записываться выражения вида:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1) \otimes \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_2) \otimes \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_3)\right)_{(i,j,k\ldots),(i,j,k\ldots)} = \\ w_1(i,i) \cdot w_2(j,j) \cdot w_3(k,k) \ldots \\ e^{-\beta E_i} e^{-\beta E_j} e^{-\beta E_k} \ldots \mapsto \frac{1}{p_i} \frac{1}{p_j} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{n_l} \end{aligned} \tag{10.2}$$

Примечание: Согласно основной теореме арифметики, каноническая форма для любого натурального $\forall a \in \mathbb{N}, \quad a = \prod_p p^{\alpha(p)}$. Последняя формула дает интерпретацию определения ζ-функции 1.2.

Произведение (нормированных $\tilde{Z}$, для которых приведенные выше формулы аналогичны) статистических сумм однозначно с точностью до перестановок, поскольку они являются абелевыми матрицами, обладающими свойством коммутативности и ассоциативности по умножению.

Для того чтобы установить групповую аксиому для $\left\{\tilde{Z}(\beta)\right\}$, необходимо продемонстрировать существование обратного элемента для $\forall$ элемента: $\exists$ обратный элемент для $\forall \quad \tilde{Z}(\beta) \quad \exists, \tilde{Z}_i(\beta)^{-1}$ и, следовательно, указать, что $\left\{\tilde{Z}(\beta)\right\}$ должно быть полем. Согласно утверждению, приведенному в Лемме 6.2, кольцо $\mathbb{Z}_n$ является полем тогда и только тогда, когда n — простое число $\Longrightarrow \tilde{Z}_i(\beta) = tr(\underline{Z})$ и $\underline{Z}$ должны порождаться простыми числами $g_i = \frac{1}{p_i}$.

В рассматриваемой модели нормированная статистическая сумма $\tilde{Z}(\beta)$ может рассматриваться как характер 4 абелевой циклической группы энергии $\hat{E}$ 6.3: $G = \mathbb{Z}_{E\text{Общая}}$. Действительно, для абелевой группы G характеры являются гомоморфизмами $\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$. В статистической физике:

$$\tilde{Z}(\beta) = \sum_{k=0}^{E_{Total}} r_k e^{-\beta \Delta E} \quad \Delta E = 1 \tag{10.3}$$

где r_k — кратность уровня энергии k. Это сумма характеров $\chi_k(\beta) = e^{-\beta k}$, каждый из которых соответствует одномерному представлению $\rho_k : G \to \mathbb{C}^{\times}$, где:

$$\rho_k(m) = \exp\left(i2\pi \frac{k \cdot m}{E_{\text{Общая}}}\right) \quad i^2 = -1 \tag{10.4}$$

Эта модель строго описывает флуктуации, вырождение уровней и переходы между состояниями с помощью абстрактной алгебры, включая:

- Операция сложения $\tilde{Z}_A + \tilde{Z}_B$ корректна и соответствует $\rho_A \oplus \rho_B$. Физически: система в состоянии A или B.
- Свертка сумм дистрибутивна: $(\tilde{Z}_A + \tilde{Z}_B) * \tilde{Z}_C = \tilde{Z}_A * \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_B * \tilde{Z}_C$.

- Тензорные произведения (взаимодействующие системы),
- Преобразования Фурье (анализ флуктуаций),
- Композиция автоморфизмов (симметрии).

Множество $\tilde{Z}$ образует коммутативную алгебру, связанную с теорией представлений группы G. В нашем исследовании мы можем расширить определение характера приведённых классов вычетов по модулю $[m]$ на все целые числа $\mathbb{Z}$ см. 4.1. И такое определение соответствует понятию характера Дирихле. Функция $\chi(a)$ определена на $\mathbb{Z}$ и обладает следующими свойствами:

- Периодичность: $\chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- Полная мультипликативность: $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- Обращение в ноль: $\chi(n) = 0$ если $(n, m) > 1$.

Очевидно, что в результате формируется мультипликативная абелева группа, аналогичная группе приведённых классов вычетов по модулю m ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

11 Функции от матриц

Логарифм от диагональной матрицы

Как вычислить логарифм $\ln$ от диагональной матрицы с положительными вещественными значениями на главной диагонали? Пусть дана диагональная матрица D размера $n \times n$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

где $d_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда логарифм матрицы D (обычно подразумевается натуральный логарифм, но может быть и по другому основанию) — это также диагональная матрица, полученная применением логарифма к каждому диа-

гональному элементу:

$$\log(D) = \begin{pmatrix} \log(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log(d_n) \end{pmatrix}.$$

Почему это работает?

- Диагональные матрицы коммутируют при умножении, и их степенные ряды ведут себя «покомпонентно».
- Логарифм матрицы определяется через степенной ряд (аналог ряда для скалярного логарифма), и для диагональной матрицы этот ряд сводится к скалярным логарифмам на диагонали.
- Экспонента от $\log(D)$ даёт исходную матрицу D, что подтверждает корректность определения:

$$\exp(\log(D)) = D.$$

В традиции теории чисел формулах приводится логарифм без указания основания $\log(x)$ при этом подразумеватеся натуральный логарифм $\ln(x)$.

Замечание 11.1 (Как объяснить это правило?) Это простое правило вытекает из следующих предпосылок:

- Все d_i должны быть строго положительными, иначе логарифм не определён (в вещественной области).
- Если используется не натуральный логарифм (например, $\log_{10}$), то правило остаётся тем же — применяем выбранный логарифм к каждому d_i.

В целом, от квадратной матрицы можно вычислять скалярные функции путем разложения в ряд Тейлора, но с некоторой спецификой [Мал56], 182-183]. В теории аналитических функций (т. е. имеющих производную комплексной плоскости из чего следует удивительный вывод о бесконечной дифференцируемости аналитической функции [Мыш72]) известно, что ряд от комплексной переменной обладает свойством сходимости на некотором кольце сходимости $r < |z| < R$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ [15, стр. 64], за исключение полюсов.

[Мал56]: Мальцев (1956), Основы линейной алгебры

[Мыш72]: Мышкис (1972), Высшая математика. Специальные курсы

Вычислим логарифм от матрицы $\widetilde{D}$, где появились кратные корни (4.2). Здесь выбраны в качестве базиса различные собственные / корневые векторы, являющиеся про-

стыми числами и поэтому матрица будет иметь блочно-диагональный вид (порядок следования клеток Жордана не существен). Аналитическая функция F работает с каждой жордановой клеткой отдельно:

$$\mathscr{F}(\mathscr{D}) = \mathscr{F}(\mathscr{D}_1) \bigoplus \mathscr{F}(\mathscr{D}_2) \cdots \bigoplus \mathscr{F}(\mathscr{D}_\mathscr{L}) \tag{11.1}$$

(Из этого разложения легко сделать вывод о возможности по-сегментного / по-блочного сравнения функций от матриц, который будет использован ниже). В общем случае жордановой клетки вычислить логарифм достаточно просто, применив разложение в ряд Ньютона-Меркатора (ряд Тейлора для функции натурального логарифма от матрицы). Ниже следует выражение для одного блока $\widetilde{\mathscr{F}_i}$, блочно-диагональной матрицы $\mathscr{D}$:

$$\widetilde{\mathscr{F}_i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

Остальные блоки будут выглядеть аналогично. Далее представить матрицу справа от знака равенства в виде суммы единичной матрицы $\mathbf{I}$ и матрицы $\mathbf{G}$, на диагоналях которой находятся нулевые значения: $\mathscr{D} = \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{G})$. Применив хорошо известное разложение логарифма в ряд Тейлора для скалярной переменной и, с учётом возможности вычисления аналога ряда Тейлора, применимого в равной мере для коммутируемых матриц(ы) $\mathbf{G}$ имеем:

$$\ln(I + \mathbf{G}) = \frac{\mathbf{G}}{1} - \frac{\mathbf{G^2}}{2!} + \frac{\mathbf{G^3}}{3!} - \frac{\mathbf{G^4}}{4!} \ldots \tag{11.3}$$

Этот ряд обрывается на некоторой степени, поскольку жорданова клетка является нильпотентной и, будучи возведенная в степень k (размерность жордановой клетки), обращается в нулевую матрицу.

12 Подробнее об S фон Неймана

Определение 12.1 S через матрицу ρ

Для квантового состояния, описываемого матрицей плотности ρ, энтропия фон Неймана $S(\rho)$ определяется как:

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho \log \rho) \tag{12.1}$$

где:

- tr — след матрицы (сумма диагональных элементов);
- $\log \rho$ — матричный логарифм.

[Ней64] При диагонализации матрицы плотности ρ с собственными значениями λ_i формула принимает вид:

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i.$$

[Ней64]: Нейман (1964), Математические основы квантовой механики

λ_i повторяется на главной диагонали матрицы статистического оператора ρ с учетом алгебраической кратности

Где λ_i повторяется на главной диагонали матрицы статистического оператора ρ с учетом алгебраической кратности (кратности вырождения энергетического уровня).

Эта форма идентична энтропии Шеннона, где λ_i интерпретируются как вероятности нахождения системы в i-м состоянии. (Постоянная Больцмана k_B опущена в силу выбора энергетических единиц изменения температуры T для упрощения вида формулы).

В большинстве формул здесь температура T задается в энергетических единицах и постоянная Больцмана k_B) опускается, как это принято в традициях теоретической физики $k_B T \to T$ 1 электрон-вольт = 11606 град. Аналогично постоянная Больцмана опускается в формулах для выражения энтропии S

Для рассматриваемой модели в естественном базисе, в силу теорем Фредгольма I, II существует изоморфная система линейных дифференциальных уравнений и возможна замена корней интегрального уравнения Фредгольма собственными значениями системы изоморфной ей системы ЛДУ: $\lambda_i \mapsto \frac{1}{p_i}$ ($\mapsto$ это отношения биекции), обратная величина от простого числа и $\frac{1}{p_i} \mapsto w_i$ - будет соответствовать вероятности нахождения системы в состоянии ψ_i с энергией E_i, при этом $\sum_1^L w_i = 1$ по всем квантовым состояниям L, поскольку суммирование производится по полной группе вероятностей.

Замечание 12.1 Энтропия фон Неймана, определенная

на более широком классе физических явлений, совпадает с ранее приведенным определением энтропии в Главах, посвященных поиску доказательств Гипотезы Римана и ABC-гипотезы. 3.4.

Третий закон термодинамики (теорема Нернста) утверждает, что изменение энтропии ΔS в любой обратимой изотермической реакции стремится к нулю по мере приближения температуры к абсолютному нулю: $\lim T \to 0 K \Delta S = 0$.

Основные свойства

1. Чистые состояния: для чистого состояния энтропия равна нулю ($S = 0$), что означает полную определённость состояния.

2.Максимально смешанные состояния: энтропия достигает максимума, соответствуя максимальной неопределённости системы. Для системы размерности n максимальная энтропия равна $\ln(n)$. Это достигается, когда система полностью случайна, и ее матрица плотности: $\hat{\rho} = \frac{1}{n}\underline{E}$ пропорциональна единичной матрице (как в примере выше);

3. Энтропия запутанности: частный случай для запутанных состояний, измеряющий, насколько измерение одной подсистемы уменьшает неопределённость о состоянии другой подсистемы.

4.Субаддитивность: уникальное квантовое свойство, при котором энтропия составной системы может быть меньше суммы энтропий её подсистем. Возможен случай, когда система в целом находится в чистом состоянии ($S = 0$), а её части — в смешанных ($S > 0$).

5. Связь с классическими понятиями:

- термодинамическая энтропия Больцмана–Гиббса — предельный случай для макроскопических систем;
- информационная энтропия Шеннона — её классический аналог.

Области применения

Энтропия фон Неймана является фундаментальной величиной в квантовой теории информации, позволяющей:

- количественно описывать неопределённость квантовых систем;
- измерять степень квантовой запутанности;
- анализировать отклонение состояния от идеального (чистого) состояния.

Эта величина играет ключевую роль в квантовых вычислениях, квантовой криптографии и теории квантовой информации. [Pet01]

[Pet01]: Petz (2001), «Entropy, von Neumann and the von Neumann Entropy»

В ABC-гипотезе заложена простая модель системы и входящих в неё подсистем, где отсутствуют квантовые корреляции (запутанность). Согласно Теореме о квантовой природе простых чисел 7 это равносильно отсутствию общих делителей. Число квантовых уровней счётно.

Определение энтропии Шеннона

Для случайной величины A, принимающей n независимых случайных значений a_i с вероятностями $p(a_i) = p_i (i = 1, \dots n)$, для энтропии используется формула Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \tag{12.2}$$

Где:

- $-\log_2 p_i$ означает измеряемое в битах количество информации, содержащейся в том событии, что случайная величина приняла значение a_i количество информации, содержащейся в конкретной букве, имеющей номер i;
- H — среднее количество информации, приходящейся на один символ. Эта величина также называется средней энтропией источника;
- Величина $H_i = -\log_2 p_i$ называется частной энтропией, характеризующей только i-ое состояние.

Замечание 12.2 (Формула Хартли) В случае равновероятных символов источника информационная энтропия рассчитывается по формуле Хартли: $H = \log_r(M)$, где M — мощность (основание, объём) алфавита (количество различных символов алфавита), H — количество информации в каждом символе. В общем случае, основание логарифма в определении энтропии может быть любым, большим 1 (в алфавите, состоящем лишь из одного символа, нельзя передавать информацию). Выбор основания логарифма определяет единицу измерения информации. Для информационных систем, основан-

ных на двоичной системе счисления, единицей информации является двоичный символ — бит и основание логарифма $r = 2$.

Таким образом, энтропия системы является суммой с противоположным знаком всех вероятностей появления состояния (события) с номером i, умноженных на их же двоичные логарифмы. Это определение для дискретных случайных событий можно формально расширить для непрерывных распределений, заданных плотностью распределения вероятностей.

13 Обобщение $\mathrm{Rad}(x)$ на $\mathbb{R}$

Один из способов — определить $\mathrm{Rad}(x)$ для действительного числа x через его рациональные приближения или представления:

Случай 1: x — рациональное число

Если $x \in \mathbb{Q}$, то его можно записать в виде несократимой дроби $x = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$.

Тогда определяется:

$$\mathrm{Rad}(x) = \mathrm{Rad}(p) \cdot \mathrm{Rad}(q) = \prod_{\substack{\text{простые } r \\ r|p \text{ или } r|q}} r.$$

Случай 2: x — иррациональное число

Для иррационального x строгое определение радикала отсутствует. Возможные подходы:

Аппроксимация рациональными числами: Рассмотреть последовательность рациональных чисел $\frac{p_n}{q_n} \to x$ и определить

$$\mathrm{Rad}(x) = \liminf_{n \to \infty} \mathrm{Rad}\left(\frac{p_n}{q_n}\right).$$

Однако этот предел может не существовать или зависеть от выбора последовательности.

Факторизация в обобщённом смысле: Если представить x в виде бесконечного произведения простых (аналогично ряду Эйлера).

Пусть:

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

тогда можно определить

$$\mathrm{Rad}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \neq 0}}^{\infty} p_i.$$

Но такая факторизация не единственна и сложна для произвольных действительных чисел.

Использование в конкретных моделях: В нашем случае переменные a, b, c выражаются через переменные p_i, m_i, где p_i — фиксированные простые, а $m_i \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i(m)},$$

и

$$\mathrm{Rad}(a) = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i(m) \neq 0}}^{k} p_i.$$

Это определение:

- Совпадает с стандартным для целых m_i
- Позволяет вычислить радикал для действительных m_i, так как простые p_i фиксированы
- Гармонирует с рассматриваемой моделью

Обобщение $\mathrm{Rad}(x)$ на действительные числа позволяет:

- Вычислять частные производные
- Исследовать гладкость и ограниченность градиента

$$\nabla \breve{q} = \left(\frac{\partial \breve{q}}{\partial m_1}, \ldots, \frac{\partial \breve{q}}{\partial m_k}, \frac{\partial \breve{q}}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial \breve{q}}{\partial p_k} \right)$$

- Связать задачу с ABC-гипотезой, где радикал играет ключевую роль

14 Для любознательных читателей

Для любознательных читателей особенно рекомендуется следующая литературу по теории чисел:

Карацуба А.А. «Основы аналитической теории чисел» (1983)

Краткая рецензия: Классический труд, в котором основы аналитических методов излагаются через призму решения конкретных известных проблем. Считается качественным и современным для своего времени введением в аппарат теории чисел.

Описание: Это второе издание, существенно переработанное и дополненное по сравнению с первым. Добавлена новая глава о целых точках, полностью обновлены разделы, посвящённые дзета-функции Римана и её применениям, а также включены указания для решения задач. Книга ориентирована на подготовленных читателей: научных сотрудников, аспирантов и студентов, стремящихся глубоко понять методы современной аналитической теории чисел.

Постников А.Г. «Введение в аналитическую теорию чисел» (1971)

Краткая рецензия: Уникальная книга, занимающая промежуточное положение между учебником для начинающих и специализированной монографией. Её главная цель — не углублённое изучение сложного аппарата, а демонстрация широкого спектра проблем и задач, стоящих перед теорией чисел.

Описание: Автор сознательно избегает узкой специализации и освещения тем, уже хорошо представленных в литературе. Книга призвана помочь молодому исследователю не только овладеть мощным математическим аппаратом, но и «накопить» набор интересных задач для его применения. Издание рассчитано на широкий круг математиков: от научных работников и преподавателей до аспирантов, интересующихся теорией чисел и её связями с другими дисциплинами.

«Проблемы аналитической теории чисел» (1975)

Краткая рецензия: Сборник переводов докладов ведущих мировых математиков (Рихерта, Сельберга, Бомбьери и

др.), посвящённый передовому краю науки того времени. Фокус сделан на методе решета и смежных вопросах.

Описание: Материалы сборника представляют интерес не только для узких специалистов по теории чисел, но и для математиков других направлений, желающих ознакомиться с ключевыми проблемами и методами этой области. Книга будет полезна аспирантам и студентам старших курсов математических факультетов.

Чандрасекхаран К. «Введение в аналитическую теорию чисел» (1974)

Краткая рецензия: Доступное и систематическое введение в классические результаты аналитической теории чисел, написанное известным индийским математиком. Ценится за педагогическое мастерство и ясность изложения.

Описание: Книга не требует от читателя обширных предварительных знаний и последовательно знакомит его с основным кругом теоретико-числовых проблем. Чёткое и сжатое изложение делает её полезной как для математиков различных специальностей, так и для студентов университетов.

Гельфонд А.О., Линник Ю.В. «Элементарные методы в аналитической теории чисел» (1962)

Краткая рецензия: Знаковая монография, показывающая, что многие глубокие проблемы теории чисел (как, например, проблема Гольдбаха или закон распределения простых чисел) могут быть сформулированы на элементарном языке, однако для их решения требуются самые изощрённые математические методы.

Описание: В книге исследуется парадокс, когда задачи, сформулированные в простых терминах (предел, асимптотика, целочисленные точки), требуют для своего решения чрезвычайно сложного и нетривиального аппарата. Это делает книгу ценным пособием для понимания глубины связи между «простыми» вопросами и сложнейшими теориями в математике.

Appendix

14 Appendix

1 The Lebesgue, Hilbert space. Operators 584
1.1 Basis of linearly independent functions 584
2 Characteristic $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$ . . . 587
3 Direct product of groups 590
4 Character of a finite Abelian group . . . 591
5 Characters $\chi^{(R)}$ regular representation . 594
6 Green's function. Propagator 595
6.1 The Fredholm integral equation 600
7 Statistical matrix. . 602
8 Canonical Gibbs distribution 605
9 Degeneration of energy levels 608
10 Group based on normalized statsums 610
11 Functions of matrices 612
12 Learn more about Von Neumann's S . 615
13 Generalization of $\mathrm{Rad}(x)$ to $\mathbb{R}$ 618
14 For the curious readers 619

1 The Lebesgue, Hilbert space. Operators

In this section and the next, the notation is used: ψ, ϕ is the wave function, G is a bounded region in R^n.

Everything said in this section about the Lebesgue space $\mathcal{L}_2(G)$ is transferred to the Lebesgue space with weight $\mathcal{L}_2(G;\rho)$. Definition of $\langle f|g\rangle_\rho$:

$$\langle f|g\rangle_\rho = \int_G \rho(x) f(x) g(x)^*\,dx \tag{1.1}$$

where $\rho \in C(\bar{G})$ and $\rho(x) > 0$, $x \in G$, $f, g \in \mathcal{L}_2(G;\rho)$

(Further, for simplicity, $\rho = 1$ is omitted below and in the formulas, but conclusions regarding orthonormal functions can be extended to $\forall \rho(x) > 0, \quad x \in G$, which is easily confirmed by replacing variables). In the space of measurable functions for which the integral of the square of the module is finite $\int \left\|f(x)\right\|^2 dx < \infty$ - in the Lebesgue space $\mathcal{L}_2$, consider the equation system of the linear operator $A\psi_a = a\psi_a$, where the proper functions of ψ_a are linearly independent, and the eigenvalues of the linear operator A are set over the field $\mathbb{C}$.

1.1 Basis of linearly independent functions

Any orthonormal system $\{\psi_k\}$ consists of linearly independent functions, i.e. $\forall c_k$ and $\sum\limits_k |c_k| \neq 0$ impossible $\sum_k c_k \psi_k \equiv 0$. Native functions $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ using the processGram-Schmidt orthogonalization can be reduced to a set of orthonormal functions, for example in $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$: is a trigono-

metric system:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad \left\langle \psi_i | \psi_j \right\rangle = \delta_{i,j} \tag{1.2}$$

(The lower formula, the orthogonality ratio, can also be written as: 1.1, it plays an important role when working in the Lebesgue space $\mathscr{L}_2$).

For the specified functions, $\forall \quad f(x)$ can be decomposed into a Fourier series:

$$c_k = (f, \psi_k) \qquad f = \sum_k^\infty c_k \psi_k = \sum_k^\infty (f, \psi_k)\psi_k \tag{1.3}$$

[Vla76]: Vladimirov (1976), *Equations of Mathematical Physics*

The equality is trueParseval-Steklov [Vla76] for the orthonormal system $\{\psi_k\}$, complete in $\mathscr{L}_2$:

$$\sum_k^\infty \left|(f, \psi_k)\right|^2 = \left|f\right|^2 \tag{1.4}$$

It follows from Riesz-Fischer theorem:

The closure equation

In order for the orthonormal system $\{\psi_k\}$ to be complete in $\mathscr{L}_2$, it is necessary and sufficient that

- the Parseval-Steklov equality was fulfilled for $\forall f$;
- $\forall f$ from the set $\mathscr{M}$ dense in $\mathscr{L}_2(G)$ could be approximated as precisely as desired in $\mathscr{L}_2(G)$ by a linear combination the functions of this system.

(See §1 in the same place).

The above properties for the Lebesgue space $\mathscr{L}_2(G)$ are also valid for its discrete analog l_2 and even more so for its finite-dimensional subspaces of the space l_2. According to the Riesz-Fischer theorem, the Lebesgue space $\mathscr{L}_2(G)$ is isomorphic to the Hilbert space H.

In quantum physics, the wave function, which is a solution to the linear Schrodinger equation, is defined in coordinate $\phi(q,t)$ or pulse representation $\psi(p,t)$.

The Schrodinger equation:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}(p,q)\Psi \tag{1.5}$$

The symmetry of a quantum mechanical group manifests itself as the invariance of the Schrodinger equation with respect to transformations over variables of coordinates and momentum (q,p) from this group (recall that in classical mechanics transformations preserving the form of the Hamiltonian are called canonical). If the Schrodinger equation is invariant with respect to the transformation, then after the transformation it should retain the previous form [Zel02]. Obviously, this will be done if this substitution does not change the form of the Hamiltonian $H(x)$1.5.

[Zel02]: Zelevinsky (2002), *Quantum Physics Lectures*

A consequence of the invariance of the Hamiltonian under canonical transformations is its Hermitian. For the Hermitian operator, the eigenvalues are real numbers and correspond to the energy of the system. In an orthonormal system of functions, one can select a basis from the eigenvectors corresponding to their eigenvalues (energies), where the Hamiltonian of the system takes the simple form

$$\widehat{H}\psi = E\psi \tag{1.6}$$

where E is the energy of the system under study (the sum of the energies of the subsystems). This corresponds to the kinetic energy theorem, studied in mechanics lessons at school [Fer00].

[Fer00]: Fermi (2000), *Lectures on Quantum Mechanics*

The eigenvalues form a discrete sequence (finite or infinite countable), which is characteristic of eigenvalues, eigenfunctions belonging to the Hilbert space.

The scalar product of Ψ_1, Ψ_2 being the solution of 1.5 is determined by the formula:

$$\langle \Psi_1,\, \Psi_2 \rangle = \sum_p \left\langle \Psi_1,\, \psi_p \right\rangle \left\langle \psi_p,\, \Psi_2 \right\rangle . \tag{1.7}$$

There is an analogy with an ordinary complex vector space. A complete orthonormal system of functions plays the role

of a basic system of unit-length vectors orthogonal to each other. The function Ψ is a vector in this space (with an infinite number of dimensions), the Fourier coefficients 1.3 are the components along the directions of the basis vectors, and the norm of this vector is equal to the sum of the squares of the modules of the components. Scalar product 1.7 is equal to the sum of the products of c_p - each component 1.3 by the value complex conjugate of the corresponding component c_p^*. Integrability of an operator acting on an arbitrary Schrodinger control solution $A\Psi$:

$$A\Psi = \sum_{p,r} c_p^r A\psi_p = \sum_{p,r} a_p c_p^r \psi_p. \tag{1.8}$$

determined by the convergence of the series $\sum_{p,r} a_p^2 \left|c_p^r\right|^2$ for the finite wave function Ψ and the operator A with an bounded norm (which is invariant with respect to the chosen basis) [Sad04].

[Sad04]: Sadovnichy (2004), *Theory of Operators*

2 Characteristic $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$

In the case of a bounded operator norm and convergence of the series, the operator $F(A)$ can be defined by decomposition into a power series over a square matrix $a_p\ c_p^r$ of the form: $F(A)\Psi = \sum_{p,r} F(a_p) c_p^r \psi_p$. This definition of the function $F(A)\Psi$ is also independent of the basis, in particular for the exponential function $e^{i\xi A}$:

$$e^{i\xi A}\,\Psi = \sum_{p} e^{i\xi a_p} c_p \psi_p. \tag{2.1}$$

The statistical distribution of $f(\xi) can be determined$ is a random variable for any dynamic state of a physical system. Indeed, it was introduced by the Eng:ssian mathematician and mechanic A.M. Lyapunov characteristic function $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(x)\,dx$ the distribution of a random variable $P(x)$ (for the discrete case is determined by the formula: $f(\xi) = \sum_n e^{i\xi X_n}$, the knowledge of which allows us to fully describe the distribution is, by definition, the average value of e^A

in this state. Using the definition of the average 2.39, we calculate this average value directly using the expression:

$$f(\xi) = \frac{\left\langle \Psi,\, e^{i\xi A}\, \Psi \right\rangle}{\langle \Psi,\, \Psi \rangle}$$
$$f(\xi) = \sum_p w_p e^{i\xi a_p} \tag{2.2}$$

Where the definition of the weighting coefficients is given by the formulas:

$$w_p = \frac{\sum\limits_r |c_p|^2}{\langle \Psi, \Psi \rangle} = \frac{\sum\limits_r \left|\left\langle \psi_p, \Psi \right\rangle\right|^2}{\langle \Psi, \Psi \rangle}. \tag{2.3}$$

It follows from the expression for the characteristic distribution function that:

- Value $f(\xi)$ can only take the values $a_1, a_2, \ldots a_p$ that is, the eigenvalues of the operator associated with it. a_p
- The probability that Ψ will take the value a_p is w_p.
- The average value of $\left\langle f(\xi) \right\rangle$ is given by the expression provided that this series converges, which is ensured by the completeness of the orthonormal system and the Parseval-Steklov equality 1.4.

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

. Kubo, analyzing the density matrix of a free particle in the coordinate representation, provides the formula for the element of the statistical matrix in the coordinate q representation §2.32[Kub+07]:

$$\langle q' \mid e^{-\beta \hat{H}} \mid q'' \rangle = \exp\left\{ -\beta \hat{H}(q') \sum_i \varphi_i(q') \varphi_i^*(q'') \right\}$$
$$= \exp\left\{ -\beta \hat{H}(q') \right\} \delta(q' - q'') \tag{2.4}$$

It is important to note that although the series $\sum_l \psi_l(q')\psi_l(q'')^*$ does not converge in the usual sense, it can be considered as a δ Dirac function. This follows from the fact that if the functions $\psi_k \quad (l = 1, 2, \ldots)$ form a complete system of $\left\{\psi_k\right\}$ in a function space satisfying the specified boundary conditions, then for any function 1.3 the ratio is fulfilled:

$$\int \sum_l \psi_l(q')\psi_l^*(q'')f(q'')dq'' = f(q') \tag{2.5}$$

and this formula is one of the ways to define the δ-function.

In the expression 2.4 any system of functions can be used in the decomposition, provided that it is complete. It is not required that the functions be eigenvalues of the equation 1.5. This obviously follows from the fact that the relation 2.5 is completely general. Therefore, as a basis for the representation of the density matrix 2.4 any complete system of functions can be used, for example, plane waves 1.2, 1.3.

Schrodinger equation 1.5 is equivalent to some evolutionary principle. Considering the average energy value in the state of ψ as a functional defined on the class of quadratically integrable functions L_2, we can find the function ψ as corresponding to the extremum of this functional, which reduces variations to zero. By calculating the variation, it is easy to verify that the extremum conditions are satisfied for the function ψ if it obeys the Schrodinger equation:

$$\hat{H}\psi = \langle E \rangle \psi \tag{2.6}$$

and the average energy value is an eigenvalue in this state. The opposite is also true, if a function ψ has an extremum $\langle E \rangle$, then it satisfies the Schrodinger equation.

Therefore, the lowest value is $\langle E_{min} The \rangle$ operator $\hat{H}$ gives the absolute minimum of the $\langle E \rangle$ functionality, which is implemented on the wave function of the ground state of the system ψ_0. The next largest after $\langle E_{min} \rangle$ the eigenvalue of $\hat{H}$ gives a minimum of $\langle E \rangle$ on the class of functions orthogonal to ψ_0 and so on.

The oscillation theorem

In quantum theory, oscillation theorems relate the number of nodes (zeros) of a wave function - the solution of the Schrodinger equation - to the number of the energy level E_n. The oscillation theorem states: the wave function $\psi(x)$ corresponding to the nth energy level has exactly n nodes (points where $\psi(x)$ vanishes (not counting the boundary points). This allows you to visualize energy states: the ground state $n = 0$ has no nodes, the first excited state

$n = 1$ has one node, etc. For example, for a quantum harmonic oscillator, the solutions (Hermitian polynomials) have exactly n nodes for $E_n = 2n + 1$.

The analogy of the oscillation theorem and the expression for nontrivial zeros of the function $\Xi(t)$2.15 is appropriate here 2.17 To one degree or another, the oscillation theorem is studied in school chemistry lessons. The structure of the electron shells of the atom $s, p, d, f \forall$ is studied, where the letter denotes the corresponding shape of the orbital resulting from the solution of the Schrodinger equation.

3 Direct product of groups

The above principles of finding the average through a statistical matrix 7.3, as well as the ratio of orthogonality 4.3 for matrix elements have an analogy when working with integers. The theorem correlates the property of orthogonality of elements of matrices of irreducible representations with the property of integers, expressed in the absence of common divisors $(p, q) = 1$. (which in short means the condition of equality to one of the greatest common divisor). Let's conduct a sequential search for a proof.

Let's assume that the system under study is in thermodynamic equilibrium. In this case, the statistical matrix has a diagonal form in the basis of the eigenstates of the Hamiltonian of the system. Each value of the energy level (it is also the eigenvalue of λ) is repeated on the main diagonal of this matrix as many times as its multiplicity. Diagonal matrices commute with each other.

Definition 3.1 *A group G is said to decompose into a direct product of its subgroups $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ if:*

1. *Each element of $g \in G$ is uniquely represented as $g = g_1 \ldots g_k$, where $g_i \in G_i$*
2. *$g_i g_j = g_j g_i$ for $g_i \in G_i$, $g_j \in Gj$ if $i \neq j$.*

Obviously, if the group G is finite, then $|G| = |G_1| \ldots |G_k|$. Condition (1) implies that $G_i \cap G_j = \{e\}$ for $i \neq j$. The rules for multiplying groups are defined in condition (2) of the same Definition 1.

Identifying each element with a sequence $(e \dots g_i \dots e) \in G = G_1 \times \dots G_k$ where g_i element stands in i place, you can get an attachment of $G_i \in G_1 \times \dots \times G_k$ as a subgroup of the set of $n \times n$ invertible matrices together with the operation of the usual matrix multiplication:

$$GL(n, R) \cong (K^*)^n = K_1^* \times \dots \times K_n^* \tag{3.1}$$

where K^* denotes a ring of integers with a multiplication operation. Above, it was assumed that the statistical matrix is diagonal, Hermitian, while the probability density values $\hat{\tau w}$ on the main diagonal are real and positive values 7.4.

The decomposition of an Abelian group into a direct cyclic product follows from the theorem on the structure of finite abelian groups. Any finite Abelian group can be decomposed into a direct sum of its cyclic subgroups, the orders of which are powers of primes. The multiplicative notation does not change the essence of the decomposition — it is only an alternative way of denoting a group operation.

Given that an Abelian group of order m has exactly m characters, that $\forall$ a finite multiplicative Abelian group G is a direct product of cyclic groups.

$$G \cong G_{r_1} \times G_{r_2} \times \dots \times G_{r_m} \tag{3.2}$$

The given residue classes modulo $(mod\ m)$ form a multiplicative an Abelian group of order $\phi(a)$, and this is not accidental: the Euler function $\phi(a)$ is just equal to the number of reduced classes of deductions modulo $m \mid a$.

4 Character of a finite Abelian group

Let's compare in more detail the properties of characters of a finite abelian group and similar properties for characters of integers. It is possible to extend the definition of the character of the reduced residue classes modulo $(mod\ m)$ to all integers $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \chi(a) = \chi(b) \Longleftrightarrow a \equiv b (mod\ m) \\ \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \\ \chi(a) = 0 \quad \text{if} \quad (a, m) > 1 \\ \chi(a) \neq 0 \quad \text{if} \quad (a, m) = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

(The above definition corresponds to the concept of Dirichlet's character.)

$\chi(a)$ is defined on $\mathbb{Z}$ and has the properties:

Periodicity: $\chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\,\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Full multiplicativity $\chi(a\dot{b}) = \chi(a)\dot{\chi}(b)\,\forall a, b \in \mathbb{Z}$ zeroing $\chi(n) = 0$ if $(n, m) > 1$ As a result, a multiplicative Abelian group is formed that is isomorphic to $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ the group of reduced residue classes modulo $(mod\, m)$, with the order of $m = \phi(a)$ being the value of the Euler function.

$$\sum_{k(mod\, a)} \chi(k) = \begin{cases} \phi(a) & \text{if} \quad \chi = \chi_1 \\ 0 & \text{if} \quad \chi \neq \chi_1 \end{cases} \tag{4.2}$$

Where the summation occurred for all characters of the group $\hat{G}$.

$$\sum_{\chi} \chi(k) = \begin{cases} \phi(m) & \text{if} \quad k \equiv 1(mod\, m) \\ 0 & \text{if} \quad k \neq 1(mod\, m) \end{cases} \tag{4.3}$$

If representations have the same set of characters, then they are equivalent. This follows from the uniqueness of the decomposition into irreducible components and the orthogonality properties of the characters of irreducible representations. This property also applies to the case of infinite groups, if the compared representations are completely reducible 4.8. An explanation is needed here. It is known from representation theory that the nature of a representation uniquely determines it up to equivalence. This follows from the fact that the character is a trace of the representation matrix of the group $tr(G)$, and if two representations have the same characters for all elements of the group, then their irreducible components coincide in multiplicity due to the orthogonality of the characters.

Irreducible representations of infinite groups

For infinite groups, irreducible representations can be infinite-dimensional. However, if we consider completely reducible representations (those that decompose into a direct sum of irreducible ones), then a similar property can be preserved provided that the decomposition into irreducible components is unique and the characters are

correctly defined. For example, in compact groups, the characters of irreducible representations form an orthonormal system, and equality of characters implies equivalence of representations.

The lemma of orthogonality and mutual simplicity can be extended to the characters of irreducible representations.

Definition 4.1 *Definition of a compact group. A compact (topological) group is a topological group whose topology implements it as a compact topological space (when acting on an element of the group, the result also remains in the group). Compact groups are a natural generalization of finite groups with discrete topology and have properties that are largely conserved. Compact groups have a well-studied theory related to group actions and representation theory.*

Comparing the results obtained 4.1 with the formulas for finding the average 2.39 operator of the observable and the trace formula for the characters of the representation of the group 4.5, we can conclude that they are equivalent.

The additive group Z_n of residue classes modulo n is cyclic 8.4.

If $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ is the canonical representation of an integer by prime factorization, then the following decomposition is true:

$$Z_n \cong Z_{p_1{}^{l_1}} \oplus Z_{p_2{}^{l_2}} \cdots \oplus Z_{p_1{}^{l_k}} \tag{4.4}$$

Definition 4.2 *A finite primary group (a p-group) is a group for which there exists such a prime number p that the order of each of its elements is a certain power of that number.*

Therefore, along with the complex-valued product formula 8.1 can be applied similarly, but based on the product of cyclic groups Z_n4.4.

5 Characters $\chi^{(R)}$ regular representation

The characters of the representation $\chi(g_1)$, $\chi(g_2)$, $\chi(g_3)$, ... $\chi(g_m)$, can also be considered as components of a vector in an m-dimensional space.

The characters of unitary representations

For the case of unitary representations, the characters of irreducible representations form a system of orthonormal vectors. Since the characters of the elements of the same class coincide, all such vectors belong to the same subspace, while for one class the components of the vectors are equal quantities.

Let's apply the shift operation to all elements of the group G by multiplying the $\forall$ element on the left of g_s. This can be expressed using the matrix regular representation $\|R_{ij}\|$ of the order of $m \times m$, in each column of which there is only one single element, and all the others are zeros. The regular representation contains all irreducible representations of a group in the case of complex representations of finite groups (this is true for algebraically closed fields, for example, fields of complex numbers). According to Maschke's theorem, a regular representation decomposes into a direct sum of all irreducible representations, with each irreducible representation entering the decomposition as many times as its dimension.

An arbitrary vector Φ of a subspace can be decomposed into vectors corresponding to irreducible representations of the group G, with $\Phi(g') = \Phi(g^{-1}g'g)$, for $\forall g, g'$, which is ensured by completeness systems of irreducible representations. Decomposing the vector Φ belonging to the space R^m according to the complete vector system, we can obtain the ratio for the components of this vector:

$$\Phi(g') = \sum_{j,\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g') = \sum_{j,\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g^{-1}g'g) \quad (5.1)$$

Averaging $\Phi(g')$ over all elements of the group G and using the orthogonality ratio 4.3, omitting the intermediate calculations, we get [PT09]:

[PT09]: Petrashen et al. (2009), *Applications of Group Theory in Quantum Mechanics*

$$\Phi(g') = \frac{1}{m}\sum_j \sum_{j,\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} D^{(j)}_{\alpha,\beta}(g^{-1}g'g) = \sum_j B_j \chi^{(j)}(g') \qquad B_j = \frac{1}{n_j}\sum_\alpha C^{(j)}_{\alpha,\alpha} \tag{5.2}$$

In this case, the number of different irreducible representations of a group is equal to the number of its conjugacy classes. As a result, the formula derived earlier for averaging the observed using the statistical matrix 7.2.

Characters of $\chi^{(R)}$ regular representations are calculated using the formula especially simply:

$$\begin{cases} \chi^{(R)}(g_s) = m & \text{if} \quad g_s = E \\ \chi^{(R)}(g_s) = 0 & \text{if} \quad g_s \neq E \end{cases} \tag{5.3}$$

From the last formula and 4.7 It obviously follows that every irreducible representation is contained in the regular one as many times as the order of this irreducible representation n_i. The order of the reduced representation is equal to the sum of the irreducible squares (taking into account their multiplicity r_i) according to the formula 4.4.

Number of orthogonal vectors $D^{(j)}_{\alpha,\beta}$ coincides with the dimension of the vector space in which the regular representation $\sum_j n_j^2 = m$ is implemented and the vectors $D^{(j)}_{\alpha,\beta}$ They form a complete system of orthogonal vectors in it. This makes it possible to more clearly trace the connection with integers.

6 Green's function. Propagator

In this subsection, H is the Hamiltonian ψ and Ψ are wave functions, ρ is the probability density, G is the Green's function, K is its variant propagator S is the action.

Let us now turn to the complete Schrodinger equation describing evolution over time. For stationary states, the dependence on time is purely harmonic due to the materiality of the energy. The average value of any physical quantity that does not explicitly depend on time in a stationary state turns out to be constant.

[Zel02]: Zelevinsky (2002), *Quantum Physics Lectures*

Let us consider in Hilbert space an arbitrary, in the general case, non-stationary solution of the Schrodinger equation $\Psi(q,t)$, where q denotes not one, but a set of variables of this representation, we write it as a time expansion [Zel02]:

$$\Psi(q,t) = \sum_n \bar{\psi}_n(q) e^{-iw_n t} \tag{6.1}$$

where $\bar{\psi}_n(q)$ is the expansion coefficient, and the sign of the sum means the sum of the Fourier harmonics. Substituting the expansion into the Schrodinger equation, assuming that the Hamiltonian $\hat{H}$ does not explicitly depend on time, taking into account the orthonormality condition, and equating the coefficients for each harmonic separately, we obtain:

$$\hat{H}\bar{\psi}_n(q) = \hbar w \psi_n(q) \tag{6.2}$$

The coefficients $\bar{\psi}_n(q)$ of the expansion are solutions of the stationary Schrodinger equation corresponding to the energy $E_n = \hbar w_n$

From the normalization condition 1.2 and orthogonality of wave functions ψ_n, it follows that the expansion coefficient $\bar{\psi}_n(q)$ in the formula 6.1 differs from the normalized wave function only by constant factors, in the general case by complex $\bar{\psi}_n(q) = c_n \psi_n$, hence:

$$\Psi(q,t) = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(q) \tag{6.3}$$

This formula provides a general solution for the unsteady Schrodinger equation. Note that for the quasi-classical approximation, the wave function is often expressed in terms of two real modulus - the root of the probability density 2.28 and phase as an integral of the analog of a rather smoothly varying classical momentum of a particle along the path of motion, which makes it possible to express the wave function Ψ as a function of the probability density ρ and the phase S:

$$\Psi = \sqrt{\rho} \cdot exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) \tag{6.4}$$

The choice of a solution to the Schrodinger equation for a specific physical situation depends on the initial conditions.

According to the quantum mechanical principle of causality, setting the wave function at the initial moment of time completely determines the further evolution of the system.

Since the initial wave function can be arbitrarily set, this means that any $\Psi(q,t)$ can be decomposed as a superposition by a stationary solution of the Schrodinger equation. The stationary wave functions $\psi_n(q)$ form a complete orthonormal system of functions, while the coefficients c_n in 6.3 are easily found by the formula:

$$c_n = \int \psi_n^* \Psi(q,0)\, d\tau \tag{6.5}$$

This leads to the conclusion that the value $\left[\psi_n\right]^2$ gives the probability of detecting energy in the system E_n, while the average value of the energy of the system does not depend on time.:

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \sum_m E_m \left| c_m \right|^2 \tag{6.6}$$

Since the initial state of the system is unstable and does not have a certain energy, we can only talk about the average energy value. An important consequence follows from this: setting the amplitudes of c_n completely determines the state of the system.

Let's express the solution Ψ_n for an arbitrary point in time in terms of the initial conditions.

Substituting 6.5 into 6.3 we get:

$$\begin{aligned} \Psi(q,t) = \sum_n \int \psi_n^*(q')\Psi(q',0)\psi_n(q) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} d\tau \\ = \int G(q,q',t))\Psi_n(q',0) d\tau \end{aligned} \tag{6.7}$$

Here Green's function is introduced, which describes the distribution of any source package:

$$G(q,q',t) = \sum_n \psi_n(q)\psi_n^*(q') e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \tag{6.8}$$

The Green's function also obeys the Schrodinger equation and is its partial solution satisfying the initial conditions, which are easy to find by putting in 6.7 time $t = 0$. $\Longrightarrow$ conclusion, the boundary condition is the right-hand side of the Schrodinger differential equation:

$$G(q, q', 0) = \delta(q - q') \tag{6.9}$$

It follows from the last two formulas that in order for an arbitrary solution of the Schrodinger equation to be represented as 6.3, the following conditions must be met:

$$\sum_n \psi_n(q)\psi_n^*(q') = \delta(q - q') \tag{6.10}$$

Note that $G(q, q', t, t')$– is defined as a propagator in quantum mechanics, it corresponds to the amplitude of the probability of a particle moving from one place in space to another over a given period of time or the probability of a particle moving with a certain energy and momentum.

[Zel02]: Zelevinsky (2002), *Quantum Physics Lectures*

It is not difficult to derive [Zel02] the propagator formula for the free movement of a particle:

$$K(r, r', t) = \frac{m}{2\pi i\hbar t} exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar t}(r - r')^2\right\} \tag{6.11}$$

It is easy to trace the analogy of the propagator with the formula for defining the so-called $\psi(\frac{1}{x})$ -function introduced by Riemann 2.6 and 2.9, where you can set $r' = 0$, $r = n$, $t = x$. This analogy may seem artificial at first glance, but it will be discussed more fully in the next section.

The Green's function and propagator are based on the principle of linearity of the effect of independent factors, superposition of forces, fields. For the case of a quasi-classical approximation, a function is inserted into the Schrodinger equations in a form similar to 6.4, but with the addition of a complex term in the form of the root of the probability density to the phase $\frac{\hbar}{i} ln(\sqrt{\rho})$ and further decomposition of the phase into a series according to the degree of Planck's constant:

$$\psi(\mathbf{r}) = exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\mathbf{r})\right)$$
$$S = S_0 + \hbar S_1 + \frac{\hbar^2}{2}S_2 + \cdots \tag{6.12}$$

Substituting 2.19 into the Schrodinger equation and equating terms with the same degrees $\hbar$, it is easy to derive the equation for a wave packet with a given direction of propagation, calculate as for the classical case its amplitude through the pulse $p(x)$ using the formula: $A(x,t) = \frac{const}{\sqrt{p(x)}}$ and a phase exactly up to the multiplier $\frac{i}{\hbar}$ equal to the classical action 2.21.

It is interesting to note that from a mathematical point of view, the described quasi-classical approximation in solving problems of quantum mechanics (1926) WKB by Wentzel, Kramers, Brillouina is a variation of the stationary phase method. Based on the WKB, an alternative formulation of quantum theory Feynman path integral method[**h**]as been developedTakhtajan2011, which consists in summing the contributions from all trajectories with the weight of the exponent $exp\left\{i\frac{S}{\hbar}\right\}$, where S is classic action 2.21 along this trajectory. The classic principle of least action selects one from the family of virtual trajectories that satisfies the classical equation of motion.

h

The Feynman path integral method

Quantum mechanics is based on the principle of superposition of trajectories, where the resulting wave function (probability amplitude) is determined by the interference of their contributions having different phases [Zel02]. This is similar to the phenomenon of wave interference in optics.

[Zel02]: Zelevinsky (2002), *Quantum Physics Lectures*

The analogy of the propagator with the formula of the function $\psi(x)$, introduced by Riemann, should be considered in more detail.

The property of additivity of energy, entropy, and the number of particles of the subsystems forming the system under study is actually a manifestation of the phenomenon of symmetry.

6.1 The Fredholm integral equation

In this section ϕ, ψ are the desired functions for solving the integral equation, $\mathbb{K}$ is the continuous kernel of the integral equation, K is the kernel operator, E is the identity matrix.

The Green's function discussed above 6.8 is an example of an integral equation - an equation containing the desired function under the integral sign on some region Ω of the n-dimensional Euclidean space R^n (for simplicity of presentation, we can consider this region as a one-dimensional open interval $(0, a)$ - such a simplification is used to derive formulas has no effect).

$$\phi(x) = \mu \int_{\Omega} \mathbb{K}(x, y)\phi(x)dy + f(x) \tag{6.13}$$

and its associated integral equation

$$\psi(x) = \mu \int_{\Omega} \mathbb{K}^*(x, y)\psi(x)dy + g(x) \tag{6.14}$$

(This implies a continuous kernel $\mathbb{K}$ defined on closed area $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.) It is implied that the function f and kernel $K(x, y)$ are continuous on the corresponding domains of definition.

It is known from the theory of integral equations that the complex value of μ, for which a homogeneous integral equation has nontrivial solutions from $L_2(G)$, is called the characteristic number of the kernel $\mathbb{K}$, and the corresponding solutions are eigenfunctions of this kernel corresponding to this characteristic number.

Definition 6.1 *The characteristic numbers μ of the kernel $\mathbb{K}$ and the eigenvalues λ of the operator K are reciprocal, and their eigenfunctions coincide.*

In the operator form of the equation 6.13, 6.14 can be expressed as:

$$\begin{aligned} \phi &= \lambda K\phi + f \\ \psi &= \overline{\lambda}K^*\psi + g \end{aligned} \tag{6.15}$$

where integral equations are defined by kernels

$$(Kf)(x) = \int_G \mathbb{K}(x,y)f(y)dy$$

$$(K^*f)(x) = \int_G \mathbb{K}(x,y)f(y)dy \quad (6.16)$$

accordingly. It is possible to apply the operators $K_3 = K_2K_1$ sequentially according to the rule $(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*$), and repeated kernels $K^{p+1} = K(K^p) = (K^p)K$ are also possible.

Simplification to a system of algebraic equations

Each integral control with a degenerate kernel, i.e. with separable $\mathbb{K}(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$ variables, equivalent to a system of algebraic equations of equations $\overline{\textbf{with} = \mu A\mathbf{c}+\mathbf{a}}$, and this result generalizes to $\forall$ continuous kernels. [Vla76].

[Vla76]: Vladimirov (1976), *Equations of Mathematical Physics*

The operator form allows you to concisely express the solution of an integral equation of the form 6.13 via the resolvent according to the formula:

$$(I-\mu K)^{-1} = 1 + \mu R, |\mu| < \frac{1}{MV} \quad (6.17)$$

Here, $M = max(|\mathbb{K}(x,y)|)$ is the absolute maximum value of the kernel, while $x, y \in$ the area under study, and the variable $V = \int_\Omega dy$ denotes measure of the area under study.

Solution 6.14 is located using resolvents:

$$\phi(x) = f(x) + \mu \int_\Omega \mathbb{R}(x,y)f(y)dy \quad (6.18)$$

In turn, the resolvent is determined by the formula:

$$\mathbb{R}(x,y,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \mathbb{K}_{i+1}(x,y) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{N} M_{i,k} f_i(x) g_k(y) \quad (6.19)$$

This series is analytic in μ and converges in the circle $\left|\mu\right| < \frac{1}{MV}$. Under $D(\mu)$ implies the determinant of the corresponding algebraic equation $D(\lambda) = det(E - \lambda A)$, $M_{i,k}$ denotes the algebraic complement of the matrix $(E - \lambda A)$ for which the degree of the polynomial in λ is one less than $D(\lambda)$. Repeat core and repeat resolventof the Hermitian conjugate kernel are expressed in terms of repeated kernels and, accordingly, the resolvent of the original kernel in the same way, according to the general rules of working on linear operators. In the circle $\left|\mu\right| < \frac{1}{MV}$, the inverse operator exists and is limited:

$$(I - \overline{\mu}K^*)^{-1} = 1 + \ overline{\mu}R^*, \left|\mu\right| < \frac{1}{MV} \tag{6.20}$$

For the union integral equation, the determinant and rank of the matrix $\overline{A^*}$ coincide with the previously obtained values. According to Fredholm's I theorem for $D(\lambda) \neq 0$, then the integral equation 6.13 and its consonant 6.14 the equation is solvable for any free terms f and, respectively, g. Both mentioned equations have the same finite number of linearly independent solutions equal to $n - rank(E - \lambda A)$ (II Fredholm's theorem).

Equations 6.17 and 6.19 have a form similar to 1.2. This analogy is explained from the perspective of quantum physics.

7 Statistical matrix.

In this section, all operators and matrices are considered in Hilbert space.

The Liouville equation describes the evolution of the probability density $\rho(p_i, q_i; t)$ over time. According to the rule of finding the total derivative of the function, taking into account the incompressibility of the probability density flow, by analogy with a liquid in phase space:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\rho}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left\{\rho, \hat{H}\right\} \tag{7.1}$$

This is Liouville's theorem, it follows directly from the invariance of the phase volume under canonical transformations.

The same transformations explain the concise notation of the Poisson brackets $\{\rho, \hat{H}\}$. [LL04].

[LL04]: Landau et al. (2004), *Theoretical Physics. Volume 1: Mechanics*

For the quantum mechanical case, we can compare any static matrix system under study in Jordan form or block-diagonal form in Hilbert space, on the diagonals of which the probabilities of detecting a microobject in a given quantum state will be recorded. Together, such probabilities form a complete group of events, and their sum is equal to one, as stipulated by 2.29, 2.33 and the normalization condition.

To find the statistical matrix of the system under study, first assume that it is in a purely quantum state with a wave function of $\left\langle n|\widehat{\psi}|m\right\rangle$.

The average value of the observed f is expressed by a formula of the form:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{nm} c^* c f_{nm} = \sum_{nm} w_{nm} f_{nm} \\ f_{nm} &= \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m \, dq \end{aligned} \tag{7.2}$$

The set of quantities w_{nm} is the elements of the density matrix (or statistical operator) in the energy representation. - they form a statistical matrix. The problem of finding such a matrix is reduced to calculating the probabilities $w_n = w_{nn}$ - these are the probabilities of finding the system in states with energy E_n, and they form the diagonal elements of the density matrix.

The formula for the average value of an arbitrary value f is simplified. In progress [LL02] w_{mn} are considered as matrix elements of the statistical operator $\hat{w}$. The statistical operator (or density matrix) describes the mixed state of the system.

[LL02]: Landau et al. (2002), *Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics*

In this case, the sum of $\sum_n w_{mn} f_{nm}$ will be the diagonal matrix element of $\hat{w}\hat{f}$, and the average value of the observed $\hat{f}$ will be calculated using the formula to find the trace from the superposition of operators, the corresponding matrices are simply multiplied:

$$\bar{f} = \sum_n (\hat{w}\hat{f})_{nn} = tr(\hat{w}\hat{f}) \tag{7.3}$$

This formula allows us to calculate the average $\overline{f}$ using a complete set of mutually orthogonal normalized functions.

Note that mixed state is a statistical ensemble of various pure states, each of which occurs with a certain probability. Such a state cannot be described by a single state vector. Instead, it is described by the density matrix, which is a weighted sum of the density matrices of the pure states of the ensemble.

Schrodinger's representation, as a way of describing quantum mechanical phenomena, describes the evolution of a system over time by changing the state vector, and the operators of physical quantities are constant. For the density matrix, the time derivative of the operator $\dot{w}$ is calculated using a commutator in the same way as 3.2:

$$\dot{\hat{w}} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{w}, \hat{H}\right| = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{w}\hat{H} - \hat{H}\hat{w}\right) \tag{7.4}$$

This condition is satisfied if the density matrix commutes with the Hamiltonian.

Thus, an expression is obtained that is a quantum mechanical analog of Liouville's theorem. For the stationarity of the statistical matrix, it is necessary to zero the derivative $\dot{\hat{w}}$, in other words, so that the operator $\dot{\hat{w}}$ commutes with the Hamiltonian $H \Longrightarrow$ the statistical matrix is diagonal, Hermitian, with the values of the probability density $\dot{\hat{w}}$ on the main diagonal are real and positive values. Knowing the spectrum of the wave function in the energy representation allows you to determine the wave function itself exactly to the phase. The phase of the wave function does not affect observable quantities such as probability density or averages.

The trace of the operator is invariant with respect to the choice of the basis.

An arbitrary state, in the general case, an unsteady solution to the Schrodinger equation, can be expressed as $\Psi(q, t)$ in terms of the Lebesgue integral - the Green function 6.8 in L_2, and in Hilbert space. (Both representations are equivalent due to the isomorphism between the space L_2 and the Hilbert space H.)

Thus, for an arbitrary quantum mechanical system, a diagonal statistical matrix can be compiled, and the average value of the observed value will be calculated through the trace of this matrix using a complete set of orthogonal normalized functions. In the presence of degenerate energy levels, the eigenvalues on the diagonal are repeated taking into

account the multiplicity of degeneracy. To find the entropy it is enough to calculate the average of the trace from the statistical matrix.

8 Canonical Gibbs distribution

The mechanical states compatible with this thermodynamic state make up the statistical ensemble. A statistical ensemble is represented in phase space by a set of points whose distribution is described by a probability density. It provides an answer about the probability of finding a state of the entire system in which a given body is in a certain quantum state w_n with energy E_n, in a state described in a microscopic manner. The microscopic state of the external environment is not monitored.

The normalization condition for the distribution states:

$$\sum_n w_n = e^F T \sum_n e^{-E_n/T} = 1,$$

or

$$F = -T \ln \sum_n e^{-E_n/T} \tag{8.1}$$

This formula is the basis for thermodynamic applications of the Gibbs distribution. In principle, it makes it possible to calculate the thermodynamic functions of any body if its energy spectrum is known.

The sum under the sign of the logarithm in the last formula is usually called **statistical sum**. It is nothing more than the trace of the operator $\exp(-\hat{H}/T)$, where $\hat{H}$ is the Hamiltonian of this body:

$$Z \equiv \sum_n e^{-E_n/T} = \mathrm{Sp}(e^{-\hat{H}/T}).$$

This form of recording has the advantage that any complete system of wave functions can be used to calculate the trace.

The canonical Gibbs distribution is based on a simple principle: the probability of finding a complex system 1-2 is equal

to the product of the probabilities of its subsystems 1 and 2: $\rho_{12} = \rho_1 * \rho_2$ (which implies the convenience of using logarithms to study a complex system). Based on this postulate of the equal probability of all microstates available to the system under study, which follows from symmetry, Gibbs derived the formula:

$$\begin{aligned} w_n &= exp\left(\frac{F - E_n}{T}\right) \\ w_n &= exp(\beta F - \beta E_n) \\ s &= -\ln w_n = \beta E_n - \beta F \\ \rho &= (2\pi h)^s exp\frac{F - E(p,q)}{T} \end{aligned} \tag{8.2}$$

The above is the probability distribution function for the energy of a system in the state E_n in the quantum mechanical representation, the lower formula is in the quasi-classical representation. Here

- $w_n(p,q)$ is the probability of being in a state corresponding to a wave function with its own value
- E_n. - energy as a function of generalized coordinates,
- s — the number of degrees of freedom.
- F - free gas energy. (In thermodynamics, work is performed due to the difference in the free energies of the final and initial states of the gas, which explains the convenience of using this variable).
- ρ — probability density of being in a particular phase differential,

As soon as a single specific microstate of i is considered, we can define random value of microstate entropy (or 'information content"):

$$s_i = -\ln w_i.$$

Its mathematical expectation is precisely the Gibbs-Shannon entropy. It is interesting to note that the free energy of the gas is a simple consequence of the normalization condition of the above canonical Gibbs distribution. This is a clear example of the connection between mathematics, theoretical physics and laboratory experiment. In thermodynamics, free energy F, entropy S, energyE, volume V, pressures P, temperature T, and a number of other variables are derived from each other and controlled. The first three listed variables are additive functions.

It is possible that not all microscopic particle motion is quasi-classical, but only the motion corresponding to a part of the degrees of freedom, while for the remaining degrees of freedom the motion is quantum. For example, the translational motion of molecules can be quasi-classical with the quantum nature of the intramolecular motion of atoms. In this case, the energy levels of the body can be written as functions of the quasi-classical coordinates and momenta $E(p, q)$.

The Boltzmann and Maxwell distributions mentioned above are special cases of the canonical Gibbs distribution. In the first case, potential energy is substituted with a negative sign in the numerator of the exponent fraction, in the second — kinetic energy. In both cases, T or kT remains in the denominators.

Due to the identity of the gas molecules, when analyzing the Maxwell distribution, it is sufficient to consider the phase space of only one molecule and express the energy in the pulse representation in coordinates

$E = \frac{1}{2}m(px^2 + py^2 + pz^2) + \epsilon_k$, while ϵ_k is the energy of the gas divided by the number of gas molecules, the kth energy level of one molecule, related to its rotational, vibrational degrees of freedom, intrinsic angular momentum of elementary particles, spin, etc. Further, integration over the generalized coordinates of the dq system can be replaced by simple multiplication by the volume of the vessel — a similar algorithm is used for the Maxwell distribution (2.25). This greatly simplifies the calculations. As a result, the following formula is used to find the free energy F of an ideal gas (recall that the difference free energy of the final and initial states is exactly equal to the perfect work due to the gas) [9 forms 31.3, 31.2]:

$$F = -NTln\left[\frac{eV}{N}\left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} Z\right] = -NTln\frac{eV}{N} + Nf(T) \tag{8.3}$$

Where

- N — number of molecules
- T — absolute temperature in energy units
- e is the Euler number 2.718 . . .

- V is the volume of the vessel, m is the mass of the molecule
- $\hbar$ - the reduced Planck constant, equal to $1.055 * 10^{-34}$ J*sec.
- Z is a statistical sum that depends on the energy levels of the molecule, its definition will be given below.

The initial temperature, volume, and number of particles are considered as externally specified parameters of the system under study. An alternative representation of the above formula is to put all the parameters into a separate function that depends only on the temperature $f(T)$.

Entropy S is determined from thermodynamic relations as a partial derivative with a minus sign of free energy:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nln\frac{eV}{N} - N\frac{df}{dT}(T) \tag{8.4}$$

Based on the basic equations of thermodynamics, it is possible to find other thermodynamic variables of the subsystem under study, than to fully determine or set its macroscopic state.

9 Degeneration of energy levels

When different wave functions have the same eigenvalue of energy E_n, this means a degeneration of the energy level. Exponent in the formula 3.6 corresponds to the multiplicity of the degeneracy of the energy level, denoted as the statistical weight g_k. In this case, the part of the formula (8.2) contains the statistical sum determined by the formula [10, p. 35 forms 1.71b]

$$Z = \sum_k g_k e^{-\epsilon_k/kT} \tag{9.1}$$

The normalization condition for the formula (8.1) allows us to calculate the free energy F in terms of the probabilities of quantum states:

$$1 = \sum_n^N w_n = e^{F/T} \sum_n^N e^{-E_n/T} \Rightarrow F = -Tln \sum_n^N e^{-E_n/T} \quad (9.2)$$

Let's apply the general formula (8.1) to calculate the free energy of an ideal gas obeying Boltzmann statistics. By writing the energy E_n as the sum of the energies of the molecules ϵ_k, it is possible to reduce the summation over all states of the gas to the summation over all states of a single molecule, as in the case of the Maxwell distribution. Each state of the gas will be determined by a set of N (N is the number of molecules in the gas) values of ϵ_k, which in the Boltzmann case can be considered all different from each other (in each molecular state there is no more than one molecule due to the limitations imposed by the wave functions for fermions, since it is with such objects that the Barometric formula works). Writing down $e^{-\frac{E_n}{T}}$ as a product of the multipliers of $e^{-\frac{\epsilon_k}{T}}$ for $\forall$ of molecules and summing independently over all states of each molecule, we get the expression corresponding to N

$$\left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T}\right)^N = \sum_n e^{-E_n/T} = \frac{1}{N!}\left(\sum_k e^{-\epsilon_k/T}\right)^N \quad (9.3)$$

In this case, all sets of N different values, differing only in the distribution of identical gas molecules over the levels of ϵ_k, correspond to the same quantum state of the gas. However, in the statistical sum, in the formula above, each of the states should be taken into account only once. Therefore, we must also divide the expression obtained by the number of possible permutations of N molecules with each other, i.e. by $N!$ and evaluate the value using Stirling formula $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

As a result of this estimation, we obtain the formula for the free energy of a Boltzmann ideal gas.:

$$F = -NTln\left[\frac{e}{N}\sum_k e^{-\epsilon_k/T}\right] \quad (9.4)$$

In the case of degenerate energy levels, the number of repetitions of the corresponding value is ϵ_k is equal to the

multiplicity of degeneracy. What happens to the formulas (8.4) and (9.1) for a mixture of gases? To answer this question, let's turn to large canonical Gibbs distribution with a variable number of particles.:

$$w_{n,N} = Aexp\frac{\Omega + \mu N - E_{n,N}}{T} \tag{9.5}$$

Here above is the distribution function of the subsystem of one ideal gas in two variables:

- energy value E_n and the number of particles N
- Ω - thermodynamic potential
- T — absolute temperature in energy units
- μ is the chemical potential of the molecule.

Now we define the distribution function of the subsystem of a mixture of ideal gases of a gas by variables — the energy value E_n and the number of particles N_1, N_2, N_3 - here, degenerate energy levels are also possible.

$$w_{n,N_1,N2...} = Aexp\frac{\Omega + \sum_i \mu_i N_i - E_{n,N_1,N2...}}{T} \tag{9.6}$$

The energy of E_p can also be represented as the sum of the energies of ϵ_k molecules, thereby reducing the summation over all gas states to the summation over all states of a single molecule [[Kub+07]]

[Kub+07]: Kubo et al. (2007), *Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions*

For a mixture of ideal gases, the above formulas remain valid, but instead of N, the number of molecules of the corresponding gas is substituted. The following thermodynamic variables have additive properties for a mixture of gases: the number of molecules, energy, entropy, partial pressure of each gas, thermodynamic potential, and a number of others. In this case, the volume and temperature according to the rules of thermodynamics are the same for all molecules of each gas in the mixture.

10 Group based on normalized statsums

Z-sums are defined as density matrices (operators). And for a composite system of independent subsystems, the overall density matrix is formed in accordance with the rules of tensor product of matrices[Vin03]:

[Vin03]: Vinberg (2003), *A Course in Algebra*

$$\begin{aligned} Z_{\text{Total.}} &= \bigotimes_{i=1}^{m} Z_i \\ \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{Total}}) &= \text{Tr}(\hat{\rho}_1) \otimes \text{Tr}(\hat{\rho}_2) \dots \text{Tr}(\hat{\rho}_m) \end{aligned} \tag{10.1}$$

In this case, expressions of the form will be written for each element on the diagonal of the resulting matrix:

$$\begin{aligned} \left(\text{Tr}(\hat{\rho}_1) \otimes \text{Tr}(\hat{\rho}_2) \otimes \text{Tr}(\hat{\rho}_3)\right)_{(i,j,k\dots),(i,j,k\dots)} = \\ w_1(i,i) \cdot w_2(j,j) \cdot w_3(k,k) \dots \\ e^{-\beta E_i} e^{-\beta E_j} e^{-\beta E_k} \dots \mapsto \frac{1}{p_i} \frac{1}{p_j} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{n_l} \end{aligned} \tag{10.2}$$

Note: According to the basic theorem of arithmetic, the canonical form for any natural $\forall a \in \mathbb{N}, \quad a = \prod_p p^{\alpha(p)}$. The last formula provides an interpretation of the definition of the ζ-function 1.2. The product of (normalized $\tilde{Z}$, for which the above formulas are similar) statistical sums are uniquely accurate up to permutations, since they are Abelian matrices with the property of commutativity and associativity by multiplication.

To establish the group axiom for $\left\{\tilde{Z}(\beta)\right\}$, it is necessary to demonstrate the existence of a reverse element for the $\forall$ element: $\exists$ reverse element for $\forall \quad \tilde{Z}(\beta) \quad \exists, \tilde{Z}_i(\beta)^{-1}$ and, therefore, specify that $\left\{\tilde{Z}(\beta)\right\}$ must be a field. According to the statement given in Lemma 6.2, a ring $\mathbb{Z}_n$ is a field if and only if n is a prime number $\Longrightarrow \tilde{Z}_i(\beta) = tr(\underline{Z})$ and $\underline{Z}$ must be generated by the prime numbers $g_i = \frac{1}{p_i}$.

In the model under consideration, the normalized statistical sum $\tilde{Z}(\beta)$ can be considered as the character4 of the Abelian cyclic energy group $\hat{E}$6.3: $G = \mathbb{Z}_{E\text{General}}$. Indeed, for the Abelian group G, the characters are homomorphisms of $\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$. In statistical physics:

$$\tilde{Z}(\beta) = \sum_{k=0}^{E_{Total}} r_k e^{-\beta \Delta E} \quad \Delta E = 1 \tag{10.3}$$

where r_k is the multiplicity of the energy level k. This is the sum of the characters $\chi_k(\beta) = e^{-\beta k}$, each of which corresponds to a one-dimensional representation of $\rho_k : G \to \mathbb{C}^{\times}$, where:

$$\rho_k(m) = \exp\left(i 2\pi \frac{k \cdot m}{E_{\text{General}}}\right) \quad i^2 = -1 \tag{10.4}$$

This model strictly describes fluctuations, level degeneracy, and transitions between states using abstract algebra, including:

- The addition operation $\tilde{Z}_A + \tilde{Z}_B$ is correct and corresponds to $\rho_A \oplus \rho_B$. Physically: the system is in the A or B state.
- Sum convolution is distributive: $(\tilde{Z}_A + \tilde{Z}_B) * \tilde{Z}_C = \tilde{Z}_A * \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_B * \tilde{Z}_C$.
- Tensor products (interacting systems),
- Fourier Transforms (fluctuation analysis),
- is a composition of automorphisms (symmetries).

The set $\tilde{Z}$ forms a commutative algebra related to the representation theory of the group G. In our study, we can extend the definition of the character of the reduced residue classes modulo $[m]$ to all integers $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \chi(a) = \chi(b) \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \\ \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \\ \chi(a) = 0 \quad \text{if} \quad (a, m) > 1 \\ \chi(a) \neq 0 \quad \text{if} \quad (a, m) = 1 \end{cases} \tag{10.5}$$

This definition corresponds to the concept of Dirichlet's character. The function $\chi(a)$ is defined on $\mathbb{Z}$ and has the following properties:

- **Frequency**: $\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- **Full multiplicativity**: $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
- **Conversion to zero**: $\chi(n) = 0$ if $(n, m) > 1$.

Obviously, as a result, a multiplicative Abelian group is formed, similar to the group of reduced residue classes modulo m ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

11 Functions of matrices

Logarithm of a diagonal matrix

How to calculate the logarithm of ln from a diagonal matrix with positive real values on the main diagonal?

Let's give a diagonal matrix D of size $n \times n$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

where $d_i > 0$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

Then the logarithm of the matrix D (usually the natural logarithm is meant, but it can be on a different basis) is also a diagonal matrix obtained by applying the logarithm to each diagonal element:

$$\log(D) = \begin{pmatrix} \log(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log(d_n) \end{pmatrix}.$$

Why does this work?

- Diagonal matrices commute during multiplication, and their power series behave "component-by-component". The logarithm of a matrix is defined in terms of a power series (an analog of a series for a scalar logarithm), and for a diagonal matrix this series reduces to scalar logarithms on the diagonal.
- The exponent of $\log(D)$ gives the original matrix D, which confirms the correctness of the definition:

$$\exp(\log(D)) = D.$$

In the tradition of number theory, formulas give a logarithm without specifying the base $\log(x)$, while implying the natural logarithm $\ln(x)$.

Remark 11.1 (How to explain this rule?) This simple rule follows from the following premises:

- All d_i must be strictly positive, otherwise the logarithm is not defined (in the real domain).
- If a non-natural logarithm is used (for example, $\log_{10}$), then the rule remains the same — we apply the selected logarithm to each d_i.

In general, scalar functions can be calculated from a square matrix by decomposing into a Taylor series, but with some specifics [Mal56], 182-183]. In the theory of analytic functions (i.e., having a derivative of the complex plane, which leads to

[Mal56]: Maltsev (1956), *Fundamentals of Linear Algebra*

an amazing conclusion about the infinite differentiability of the analytic function Myshkis1972) it is known that a series from a complex variable has the property of convergence on a certain convergence ring $r < |z| < R$ on the complex plane $\mathbb{C}$ [15, p. 64], with the exception of **poles**.

Calculate the logarithm of the matrix $\widetilde{D}$, where multiple roots appeared (4.2). Here, various eigenvectors/root vectors are chosen as the basis, which are prime numbers, and therefore the matrix will have a block-diagonal appearance (the order of the Jordan cells is not essential). The analytical function F works with each jordan cell separately:

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}(\mathcal{D}_1) \bigoplus \mathcal{F}(\mathcal{D}_2) \cdots \bigoplus \mathcal{F}(\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) \tag{11.1}$$

(From this decomposition, it is easy to conclude that a segment-by-segment/block-by-block comparison of functions from matrices is possible, which will be used below). In the general case of a Jordan cell, it is quite simple to calculate the logarithm by applying the series expansionNewton-Mercator (Taylor series for the natural logarithm function of matrix). The following is an expression for a single block $\mathcal{F}_i$, a block diagonal matrix $\mathcal{D}$:

$$\widetilde{\mathcal{F}_i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

The rest of the blocks will look similar. Next, represent the matrix to the right of the equal sign as the sum of the unit matrix **I** and the matrix **G**, on the diagonals of which there are zero values: $\mathcal{D} = \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{G})$. Applying the well-known decomposition of the logarithm into a Taylor series for a scalar variable and, taking into account the possibility of calculating an analog of the Taylor series, which is equally

applicable for switched matrices(s) **G**, we have:

$$\ln(I + \mathbf{G}) = \frac{\mathbf{G}}{1} - \frac{\mathbf{G^2}}{2!} + \frac{\mathbf{G^3}}{3!} - \frac{\mathbf{G^4}}{4!} \dots \tag{11.3}$$

This series ends to some extent, since the Jordan cell is nilpotent and, when raised to the power of k (the dimension of the Jordan cell), turns into a zero matrix.

12 Learn more about Von Neumann's S

Definition 12.1 *S through the matrix ρ For a quantum state described by the density matrix ρ, the von Neumann entropy $S(\rho)$ is defined as:*

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho \log \rho) \tag{12.1}$$

where:

- *tr is the trace of the matrix (the sum of the diagonal elements);*
- $\log \rho$ *is a matrix logarithm.*

[Neu18] When diagonalizing the density matrix ρ with eigenvalues λ_i, the formula takes the form:

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i.$$

[Neu18]: Neumann (2018), *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*

λ_i is repeated on the main diagonal of the matrix of the statistical operator ρ, taking into account the algebraic multiplicity

Where λ_i is repeated on the main diagonal of the matrix of the statistical operator ρ, taking into account the algebraic multiplicity (the multiplicity of the degeneracy of the energy level).

This form is identical to the Shannon entropy, where λ_i is interpreted as the probabilities of finding the system in the ith state. (The Boltzmann constant k_B is omitted due to the choice of energy units of temperature change T to simplify the form of the formula).

In most formulas here, the temperature T is set in energy units and the Boltzmann constant k_B) is lowered, as is customary in the traditions of theoretical physics $k_B T \to T$1 electron volt = 11606 degrees. Similarly, the Boltzmann constant is omitted in formulas for expressing entropy S

For the considered model in the natural basis, by virtue of Fredholm's theorems I, II there is an isomorphic system of linear differential equations and it is possible to replace the roots of the Fredholm integral equation with the eigenvalues of the system of the isomorphic LDU system: $\lambda_i \mapsto \frac{1}{p_i}$ ($\mapsto$

are the bijection relations), the inverse of a prime number and $\frac{1}{p_i} \mapsto w_i$ - it will correspond to the probability of finding the system in the state ψ_i with energy E_i, while $\sum_{1}^{L} w_i = 1$ for all quantum states of L, since summation is performed for the full group of probabilities.

Remark 12.1 The von Neumann entropy, defined on a broader class of physical phenomena, coincides with the earlier definition of entropy in the Chapters devoted to the search for evidence of the Riemann Hypothesis and the ABC hypothesis. 3.4.

The third law of thermodynamics (Nernst's theorem) states that the change in entropy of ΔS in any reversible isothermal reaction tends to zero as the temperature approaches absolute zero: $\lim T \to 0K\Delta S = 0$.

Basic properties

1. Pure states: For the pure state, the entropy is zero ($S = 0$), which means that the state is completely certain.

2.Maximum mixed states: entropy reaches a maximum, corresponding to the maximum uncertainty of the system. For a system of dimension n, the maximum entropy is $\ln(n)$. This is achieved when the system is completely random, and its density matrix: $\hat{\rho} = \frac{1}{n}\underline{E}$ is proportional to the identity matrix (as in the example above);

3. Entanglement entropy: a special case for entangled states, measuring how much measuring one subsystem reduces uncertainty about the state of another subsystem.

4.Subadditivity: a unique quantum property in which the entropy of a composite system can be less than the sum of the entropies of its subsystems. It is possible that the system as a whole is in a pure state ($S = 0$), and its parts are in a mixed state ($S > 0$).

5. Connection with classical concepts:

- The thermodynamic entropy of Boltzmann–Gibbs is the limiting case for macroscopic systems;
- Shannon's information entropy is its classical counterpart.

Application areas

The von Neumann entropy is a fundamental quantity in quantum information theory that allows:

- quantifies the uncertainty of quantum systems;
- measure the degree of quantum entanglement;

- analyze the deviation of the state from the ideal (pure) state.

This quantity plays a key role in quantum computing, quantum cryptography, and quantum information theory. [Pet01]

[Pet01]: Petz (2001), «Entropy, von Neumann and the von Neumann Entropy»

The ABC hypothesis contains a simple model of the system and its subsystems, where there are no quantum correlations (entanglement). According to To the theorem on the quantum nature of prime numbers 8, this is equivalent to the absence of common divisors. The number of quantum levels is countable.

Definition of Shannon entropy

For a random variable A taking n independent random values a_i with probabilities $p(a_i) = p_i (i = 1, \dots n)$, the Shannon formula is used for entropy:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \tag{12.2}$$

Where:

- $-\log_2 p_i$ means the amount of information contained in bits in the event that the random variable took the value a_i the amount of information contained in a specific letter with the number i;
- H is the average amount of information per character. This value is also called the average entropy of the source.;
- The value $H_i = -\log_2 p_i$ is called the private entropy, which characterizes only the ith state.

Remark 12.2 (The Hartley Formula) In the case of equally probable source symbols, the information entropy is calculated using the Hartley formula: $H = \log_r(M)$, where M is the power (base, volume) of the alphabet (the number of different characters of the alphabet), H — the amount of information in each character. In general, the base of the logarithm in the definition of entropy can be anything greater than 1 (in an alphabet consisting of only one character, information cannot be transmitted). The choice of the

base of the logarithm determines the unit of information measurement. For information systems based on the binary number system, the unit of information is a binary symbol — a bit and the base of the logarithm $r = 2$.

Thus, the entropy of a system is the sum with the opposite sign of all the probabilities of the occurrence of a state (event) with a number i multiplied by their binary logarithms. This definition for discrete random events can be formally extended to continuous distributions given by the density of the probability distribution.

13 Generalization of $\mathrm{Rad}(x)$ to $\mathbb{R}$

One way is to define $\mathrm{Rad}(x)$ for the real number x through its rational approximations or representations:

Case 1: x is a rational number

If $x \in \mathbb{Q}$, then it can be written as an irreducible fraction $x = \frac{p}{q}$, where $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$.

Then it is determined:

$$\mathrm{Rad}(x) = \mathrm{Rad}(p) \cdot \mathrm{Rad}(q) = \prod_{\substack{\text{simple } r \\ r|p \text{or } r|q}} r.$$

Case 2: x is an irrational number

There is no strict definition of a radical for irrational x. Possible approaches:

Approximation by rational numbers: Consider the sequence of rational numbers $\frac{p_n}{q_n} \to x$ and determine

$$\mathrm{Rad}(x) = \liminf_{n \to \infty} \mathrm{Rad}\left(\frac{p_n}{q_n}\right).$$

However, this limit may not exist or may depend on the choice of sequence.

Factorization in the generalized sense: If we represent x as an infinite product of primes (similar to the Euler series).

Let:

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

then we can define

$$\mathrm{Rad}(a) = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i(m)\neq 0}}^{k} p_i.$$

But such factorization is not unique and is difficult for arbitrary real numbers. This is the definition:

- Matches the standard for integers m_i
- Allows you to calculate the radical for real m_i, since simple p_i are fixed
- is in harmony with the model in question

Generalizing $\mathrm{Rad}(x)$ to real numbers allows:

- Calculate partial derivatives
- Explore the smoothness and limitations of the gradient

$$\nabla \breve{q} = \left(\frac{\partial \breve{q}}{\partial m_1}, \ldots, \frac{\partial \breve{q}}{\partial m_k}, \frac{\partial \breve{q}}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial \breve{q}}{\partial p_k} \right)$$

- Link the problem to the ABC hypothesis, where the radical plays a key role

14 For the curious readers

The following literature on number theory is especially recommended for inquisitive readers:

Karatsuba A.A. "Fundamentals of analytical number theory" (1983)

Brief review: A classic work in which the basics of analytical methods are presented through the prism of solving specific well-known problems. It is considered a high-quality and modern introduction to the apparatus of number theory for its time.

Description: This is the second edition, significantly revised and expanded compared to the first. A new chapter on

integer points has been added, sections on the Riemann zeta function and its applications have been completely updated, and instructions for solving problems have been included. The book is aimed at trained readers: researchers, graduate students and students who seek to deeply understand the methods of modern analytical number theory.

Postnikov A.G. "Introduction to the analytical theory of numbers" (1971)

Short review: A unique book that occupies an intermediate position between a textbook for beginners and a specialized monograph. Its main goal is not an in—depth study of a complex apparatus, but a demonstration of a wide range of problems and tasks facing number theory.

Description: The author deliberately avoids narrow specialization and coverage of topics that are already well represented in the literature. The book is intended to help a young researcher not only master a powerful mathematical apparatus, but also to "accumulate" a set of interesting tasks for its application. The publication is intended for a wide range of mathematicians: from researchers and teachers to graduate students interested in number theory and its connections with other disciplines.

"Problems of analytical number theory" (1975)

Short review: A collection of translations of reports by the world's leading mathematicians (Richert, Selberg, Bombieri, etc.), dedicated to the cutting edge of science at that time. The focus is on the sieve method and related issues.

Description: The materials of the collection are of interest not only to narrow specialists in number theory, but also to mathematicians of other fields who wish to familiarize themselves with the key problems and methods of this field. The book will be useful for graduate students and undergraduates of mathematical faculties.

Chandrasekharan K. "Introduction to the analytical theory of numbers" (1974)

Short review: An accessible and systematic introduction to the classical results of analytic number theory, written by a renowned Indian mathematician. He is appreciated for his pedagogical skills and clarity of presentation.

Description: The book does not require extensive prior knowledge from the reader and consistently introduces him to the main range of number-theoretic problems. Its clear and concise presentation makes it useful both for mathematicians of various specialties and for university students.

Gelfond A.O., Linnik Yu.V. "Elementary methods in analytical number theory" (1962)

Brief review: A landmark monograph showing that many deep problems of number theory (such as Goldbach's conjecture or the law of the distribution of primes) They can be formulated in elementary language, but their solution requires the most sophisticated mathematical methods.

Description: The book explores the paradox when problems formulated in simple terms (limit, asymptotics, integer points) require an extremely complex and non-trivial apparatus for their solution. This makes the book a valuable tool for understanding the depth of the connection between "simple" questions and the most complex theories in mathematics.

15 Послесловие. Afterword

1 Заключение. Поиск истины тернист . . . 622
2 Дискуссии 622
3 The pursuit of veracity623

1 Заключение. Поиск истины тернист

2 Дискуссии

В ходе доказательства ВТФ математическими методами физические законы помогли в поиске подобно нити Ариадны. [Авд23].

[Авд23]: Авдыев (2023), «Великая головоломка, как индикатор суверенизации Российской науки»

Провести обсуждение можно на также форуме Сообщество ВК Физика для менеджеров

Нарастающее открытое военное противостояние России с Западом позволило сбросить "розовые очки"не только с экономических теорий ("невидимая рука рынка"Адама Смита, западное общество социального благоденствия и социальное государство Отто фон Бисмарка, "бремя белого человека"просвещать "джунгли"по Редьяру Киплингу и Жозепу Боррелю и т.д.), но и целого ряда мифов Западной исключительности, в том числе в сферах точных наук, в технике и военном деле.

Доказательство Великой теоремы Ферма, относимого к «математическим жемчужинам», имеет важное символическое, историческое и педагогическое значение. Необычайная красота и лаконичность формулировки Вплоть до 2020г. во всём мире господствовало предубеждение, что краткого доказательства Великой теоремы не существует. Но оказалось, что утверждение Пьера де Ферма — это не фигура речи, что его слова “о воистину чудесном доказательстве” следует понимать буквально школьнику XXI века, знакомому с основами логики, геометрии, размерности, теорией множеств. Математик вовсе не «заливал», говоря о возможности записи основных идей доказательства на полях книги. Да, по состоянию на 1637г. ещё не были разработаны дифференциальное и интегральное исчисления (они в доказательства автора неявно используются), не было теории чисел, теории множеств, топологии -всё это было открыто много позже, но французский

математик сделал первые шаги в становлении областей этих математических наук.

Приведенное автором доказательство впервые сделано и опубликовано в России, оно останется в составе интеллектуального потенциала нашей страны. Публикации автора на русском и английском языках были предприняты для укрепления авторитета российской науки во всём мире, развенчания мифа о гегемонии США во всех научных сферах, стереотипа о вторичности Российской науки. Поиск Истины — это непрерывный процесс, а не догма, и этот поиск не прекращается даже после раздачи самых высоких наград. Автор выражает надежду, что приведенный кейс позволит не только ощутить красоту точных наук, логики и философии любознательным школьникам, но и обратит внимание научного сообщества, законодателей и органов власти на важность нормативного регулирования сферы защиты интеллектуальной собственности в виде открытий в любом суверенном государстве.

Все перечисленные интриги, препятствия, уловки - лишь ”имолётные явления” по сравнению с громадными планами и грандиозными открытиями, изобретениями, которые сделает подрастающее поколение нашей страны. Автор убеждён в огромном скрытом потенциале народа России. Именно на дерзких молодых людей с творческим мышлением рассчитана эта работа. Ссылка на сайт Союз СЦМ emediator.ru электронного обучения для дальнейшего обсуждения.
https://univer.emediator.ru

3 The pursuit of veracity

The pursuit of veracity is beset with challenges. The subsequent open military confrontation between Russia and the West permitted the removal of the "rose-colored glasses" from economic theories, including Adam Smith’s "invisible hand of the market," Otto von Bismarck’s Western society for social welfare and the welfare state. The notion of the "burden of the white man" to enlighten the "jungle" (as posited by Rudyard Kipling and Josep Borrell, among others) is just one example of the many myths surrounding Western exclusivity. These myths extend to a number of fields, including exact sciences, technology and military affairs.

The proof of Fermat's Great Theorem, which is regarded as a significant contribution to mathematical knowledge, holds considerable symbolic, historical and pedagogical importance. The exceptional eloquence and succinctness of the wording will remain in place up to 2020. It was widely believed that there was no concise proof of the theorem. However, it subsequently became evident that Pierre de Fermat's assertion was not a figure of speech. His assertion that a truly remarkable proof existed should be taken at face value by a contemporary schoolboy versed in the fundamentals of logic, geometry, dimensionality and set theory. The mathematician did not "fill in" at all, merely suggesting the possibility of recording the essential elements of the proof in the margins of the book. Indeed, as of 1637, differential and integral calculus had yet to be developed (they are implicitly utilised in the author's proof), number theory, set theory and topology had not yet been established – all of which were subsequently discovered at a later date. However, the French mathematician was the first to lay the foundations for these mathematical sciences.

The proof presented by the author was initially developed and published in Russia and will continue to contribute to the intellectual legacy of our country. The author's publications in Russian and English were undertaken with the objective of enhancing the reputation of Russian science on the global stage, challenging the notion of US dominance in all scientific domains, and challenging the perception of Russian science as a secondary field.

The pursuit of truth is an ongoing endeavour, not a fixed doctrine, and this pursuit continues even after the conferral of the highest accolades. The author expresses the hope that the presented case will not only allow curious schoolchildren to experience the beauty of exact sciences, logic and philosophy, but also draw the attention of the scientific community, legislators and authorities to the importance of regulating the sphere of intellectual property protection in the form of discoveries in any sovereign state.

These intrigues, obstacles, and tricks are merely "fleeting phenomena" in the context of the ambitious plans, groundbreaking discoveries, and innovative inventions that the younger generation of our country will undoubtedly make. The author is convinced of the enormous untapped potential

of our people. This work is designed for the bold and innovative young minds who are ready to embrace new ideas and challenge the status quo.

Рецензия

4 Рецензия на монографию

М.А. Авдыева "Теория чисел с позиции статистической физики. Простые числа, как метаязык Вселенной."

Научная монография М.А. Авдыева «Теория чисел с позиции статистической физики. Простые числа как метаязык Вселенной. Простые числа как метаязык Вселенной» посвящена поиску кратких доказательства математических головоломок, вызвавших интерес у научного сообщества, школьников и студентов:

- Гипотеза Римана
- Проблема Гольдбаха-Эйлера
- ABC -гипотеза
- Великая теорема Ферма.

Вопреки общепринятому в западной научной доктрине скепсису, они доказываются с позиции статистической физики, симметрии, опирающейся на общие принципы мироздания. Изложение сопровождается ссылками на программу общеобразовательной школы., что позволяет понять общие принципы доказательства для школьников средних и старших классов.

Тема имеет большой практический и теоретический интерес, поскольку в последние годы общество предъявляет особые требования к математическому образованию, информационным технологиям, синтезу точных и гуманитарных наук, а также вопросам реформирования школьного и вузовского образования, отвечающего вызовам, стоящим перед современным обществом. В Гл. 1 монографии, где излагается поиск доказательства Гипотезы Римана с позиции статистической физики, затем в Гл. 2 и 3 использует выводы для доказательства проблемы Гольдбаха-Эйлера и ABC-теоремы, из которых подготовлены выводы для Гл. 5 Арифметические функции и термодинамика. В Гл. 4 автор рассмотрел Великую теорему Ферма (ВТФ) с опорой на знания преимущественно в рамках школьной программ классов с углублённой физико-математической подготовкой. Автор избегает использование знаний вышей математики, ориентируясь в первую очередь на широкую читательскую аудиторию. С этой же целью автором сделан перевод текста на английский язык в Гл. 5-10 и 10 монографии. Автор использует аналогии и 3D — моделирование, программный код для раскрытия аксиом математики и концепций фундаментальной физики, двигаясь от эксперимента к фундаментальным обобщениям. Решая поставленную педагогическую задачу, автор обращается и к другим школьным предметам: физике, архитектуре и черчению, землеведению, истории и изобразительному искусству для пояснения важных концепций, выпавших из поля зрения Западной науки, более ориентированной на

компетентностный и узкоотраслевой походы. В результате читатель вслед за автором может проделать сложный путь научного поиска и взглянуть на привычные вещи с необычного ракурса. Это помогает в осмыслении конфликта формы и содержания, заложенного, по мнению автора, в ВТФ.

Первые две главы рассчитана на подготовленного читателя, студентов 2-3 курсов технических вузов или школьных преподавателей предметов физики, математики. Но «ключевая идея» доказательства приведена в начале каждой из перечисленных глав монографии, и заключается эта идея в верификации математического доказательства с позиции физического эксперимента. Этот же подход использован при поиске доказательства ABC гипотезы: оценка случайных ошибок, неизбежных в каждом измерении, в основе которых покоится принцип неопределённости из квантовой механики. Далее автор различает важные концепции связи и взаимодействия, обособленности, деления общего ресурса, рассматривая простые числа в качестве конструкта фазового пространства, прибегает к статистической матрице и энтропии, детально раскрывая её расчёт путём матричного логарифмирования и усреднения по хорошо известным принципам математической статистики, используемых и школьниками и студентами в лабораторных исследованиях при оценке погрешности измерений. Это наводит автора на нетрадиционный вывод о том, что показатель «качества тройки», используемый в формулировке ABC-гипотезы, в действительности является «дефектом» и результатом флуктуации - отклонения случайной величины от её математического ожидания. Как правило, показатель «качества тройки» не превышает единицы, а отклонения ограничены сверху случайной функцией, имеющей нормальное распределение, в соответствии с Законом больших чисел — основной вывод автора, доказывающий ABC-гипотезу, подкреплён детальными расчётами, численными оценками и программной симуляции.

Для интерпретации найденного доказательства ABC-гипотезы, автор обращается также на I, II начал термодинамики, уравнение адиабаты и постоянства энтропии при работе идеальной машины Карно. Такой необычный синтез школьных знаний термодинамики, основ статистической физики и математической статистики, алгебры матриц и линейных операторов, широко используемых в квантовой механике, помогают автору сделать материал доступным для широкой читательской аудитории, объяснить основные концепции школьникам старших классов. Новизна авторского подхода заключается не только в раскрытии сложных понятий математических понятий простым языком (иногда в ущерб математической строгости), но в постоянном обращении к концепциям физики. Автор указывает на неразрывную связь эксперимента с «чистой математикой», с фундаментальной наукой. Это отличает монографию от «сухих» математических доказательств строго сформулированных, но увы, зачастую недоступных для понимания широкой аудиторией.

В Гл. 11 монографии автор приводит ряд интересных примеров предубеждений в науке, господства ложных научных теорий на определённых исторических периодах и раскрывает различия между дефинициями «общепризнанный» и «истинный». Общепризнанность не является критерием истинности — этот тезис автор раскрывает на примере конкретного кейса по защите прав результатов интеллектуальной

деятельности, выявившего правовые лакуны в системе действующего нормативного регулирования, указывает на негативную практику экс-территориального применения права США, а точнее «негласных правил». Автор указывает на необходимость дальнейшей нормотворческой работы с учётом положительного опыта СССР в условиях навязанного экзистенциального конфликта нашей страны с элитами стран Объединённого Запада.

В этих же главах монографии рассматриваются философские вопросы о месте простых чисел в мироздании и содержит потенциал для дальнейшего исследований на стыке математики, физики, гносеологии. Монография хорошо структурирована, материал и ссылки на использованную литературу удобно отформатированы, наиболее сложные для понимания вопросы квантовой механики, статистической физики вынесены в приложения, прослеживается логическая связь между главами монографии и приложениями. Особенно удобны работающие гиперссылки на рисунки, таблицы, формулы и приложения в электронной версии. Автором использованы общенаучные термины. Монография состоит из введения, двенадцати частей, двух приложений, послесловия, содержит список литературы около девяти десятков наименований. Монография рекомендуется для публикации в Научной электронной библиотеке и печати в составе научных изданий.

Рецензент: Крейк Альфред Иосифович к.с.н., доцент Декабрь 2025

Review

5 Review of Monograph

Review of Monograph 'An introduction to number theory from the perspective of statistical physics. Prime numbers as the metalanguage of the universe' by M.A. Avdyev's

The scientific monograph by M.A. Avdyev, "Number Theory from the Perspective of Statistical Physics. Prime Numbers as the Metalanguage of the Universe," is dedicated to the search for concise proofs of mathematical puzzles that have garnered interest from the scientific community, schoolchildren, and students:

- The Riemann Hypothesis
- The Goldbach–Euler Conjecture
- The ABC Conjecture
- Fermat's Last Theorem.

Contrary to the prevailing skepticism in Western scientific doctrine, these problems are proven from the standpoint of statistical physics and symmetry, relying on the general principles of the universe. The exposition is accompanied by references to the standard school curriculum, making the general principles of the proofs accessible to middle and high school students.

The topic is of significant practical and theoretical interest, as in recent years society has placed special demands on mathematical education, information technology, the synthesis of exact and humanities sciences, as well as issues of reforming school and university education to meet the challenges facing modern society.

In Chapter 1 of the monograph, which outlines the search for a proof of the Riemann Hypothesis from the perspective of statistical physics, the author then uses the conclusions in Chapters 2 and 3 to prove the Goldbach–Euler problem and the ABC Theorem. In Chapter 4, the author considers Fermat's Last Theorem (FLT). Finally in Chapter 5 the author investigate arithmetic functions from the position of thermodynamics. The author utilizes knowledge primarily within the framework of a specialized school curriculum with advanced physics and mathematics training. The author avoids using higher mathematics, focusing primarily on a broad readership. For the same purpose, the author has provided an English translation of the text in Chapters 6-11 of the monograph. The author uses analogies, 3D modeling, and program code to reveal the axioms of mathematics and concepts of fundamental physics, moving from experiment to fundamental generalizations. Addressing the pedagogical task at hand, the author also turns to other school subjects: physics, architecture and drafting, geography, history, and fine arts to explain important concepts that have fallen outside the purview of Western science, which is more oriented

towards competency-based and narrowly specialized approaches. As a result, the reader can follow the author along the complex path of scientific inquiry and view familiar things from an unusual perspective. This aids in comprehending the conflict between form and content that, in the author's opinion, is inherent in FLT.

The first two chapters are intended for a prepared reader, such as 2nd-3rd year technical university students or school teachers of physics and mathematics. However, the "key idea" of the proof is presented at the beginning of each of the aforementioned chapters in the monograph, and this idea lies in the verification of a mathematical proof from the standpoint of a physical experiment. This same approach is used in the search for a proof of the ABC conjecture: estimating random errors, inevitable in every measurement, which are based on the uncertainty principle from quantum mechanics. Furthermore, the author distinguishes important concepts of connection and interaction, separateness, and the division of a common resource, considering prime numbers as a construct of phase space, resorting to the density matrix and entropy, detailing its calculation through matrix logarithms and averaging according to the well-known principles of mathematical statistics used by both schoolchildren and students in laboratory research for estimating measurement errors. This leads the author to a non-traditional conclusion that the "quality of a triple" (radical), rad(abc), used in the formulation of the ABC conjecture, is in fact a "defect" and a result of fluctuation—a deviation of a random variable from its mathematical expectation. As a rule, the "quality" (or power) of a triple, $\log(c)/\log(\mathrm{rad}(abc))$, does not exceed unity, and deviations are bounded above by a random function with a normal distribution, in accordance with the Law of Large Numbers—the author's main conclusion proving the ABC conjecture, supported by detailed calculations, numerical estimates, and software simulation.

To interpret the found proof of the ABC conjecture, the author also appeals to the Ist and IInd laws of thermodynamics, the adiabatic equation PV^{γ} = const., and the constancy of entropy in the operation of an ideal Carnot engine. Such an unusual synthesis of school-level knowledge of thermodynamics, the fundamentals of statistical physics and mathematical statistics, matrix algebra and linear operators, widely used in quantum mechanics, helps the author make the material accessible to a broad audience and explain the main concepts to high school students.

The novelty of the author's approach lies not only in revealing complex mathematical concepts in simple language (sometimes at the expense of mathematical rigor) but also in the constant recourse to the concepts of physics. The author points to the inseparable connection between experiment and "pure mathematics," with fundamental science. This distinguishes the monograph from "dry" mathematical proofs that are strictly formulated but, alas, often inaccessible to a broad audience.

In Chapter 12 of the monograph, the author provides a number of interesting examples of prejudices in science, the dominance of false scientific theories in certain historical periods, and reveals the differences between the definitions of "generally accepted" and "true." General acceptance is not a criterion for truth—this thesis is revealed by the author using a specific case study on the protection of intellectual property rights, which uncovered legal

lacunae in the system of current regulatory framework, pointing to the negative practice of the extra-territorial application of US law, or rather "unwritten rules." The author points to the necessity for further regulatory work, taking into account the positive experience of the USSR under the conditions of an imposed existential conflict between our country and the elites of the Unified West.

These same chapters of the monograph consider philosophical questions about the place of prime numbers in the universe and contain potential for further research at the intersection of mathematics, physics, and epistemology. The monograph is well-structured; the material and references are conveniently formatted; the most complex issues of quantum mechanics and statistical physics are placed in appendices; a logical connection between the chapters of the monograph and the appendices is evident. The working hyperlinks to figures, tables, formulas, and appendices in the electronic version are especially convenient. The author uses general scientific terms. The monograph consists of an introduction, ten parts, two appendices, an afterword, and contains a bibliography of about ninety titles. The monograph is recommended for publication in the Scientific Electronic Library and for printing as part of scientific publications.

The reviewer: Alfred I. Kreyk, PhD, Associate Professor (academic title, full name, signature)
December, 2025

Литература и др. источники

[ABC23] ABChome. Volunteer network called ABC-home dedicated to distributed computing project. Accessed: 2023-01-01. 2023. url: https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php.

[Apo13] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. Springer Science & Business Media, 2013.

[AR87] K. Aerland и M. Rosen. Classical Introduction to Modern Number Theory. Moscow: Mir, 1987.

[Avd20] Marat Aleksandrovich Avdyev. «Database for computer proof of Fermat's theorem for billions based on school knowledge». Пат. 2020621077 (Russian Federation). 2020.

[Avd22] Marat Avdyev. «The Diophantine Equation From the Eye Of Physicist». В: Collection of Nizhnevartovsk State University (2022).

[Avd24] Marat Aleksandrovich Avdyev. «How can a student prove the ABC hypothesis using prime numbers, quantum mechanics and creative imagination?» В: Scientific studies and modern education (май 2024), с. 8—28. doi: 10.21661/r-562378.

[BB09] N. V. Bugel и V. G. Bulavchik. Legal Statistics: Textbook. TsOKR MVD Rossii, 2009.

[BG94] Nigel Boston и Andrew Granville. «The World's Most Famous Math Problem (The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries) By Marilyn vos Savant». В: The American Mathematical Monthly 102.5 (1994), с. 470—473. doi: 10.1080/00029890.1995.12004604.

[BS85] Z. I. Borevich и I. R. Shafarevich. Number Theory. Nauka, 1985.

[CG78] H. S. M. Coxeter и S. L. Greitzer. New Meetings with Geometry. Moscow: Nauka, 1978.

[Cha74] Komaravolu Chandrasekharan. Introduction to Analytic Number Theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. World Scientific, 1974.

[Cra21] Alfred I. Craik. «Some theoretical and methodological foundations of the consideration of synergy in society». В: Bulletin of Economics, Law and Sociology 1 (2021), с. 149—152.

[Der09] John Derbyshire. Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics. 2009.

[Efi04] N. V. Efimov. Higher Geometry. Fizmatlit, 2004.

[Euc48] Euclid. Beginnings Books II. GTTI, 1948, с. 123—142.

[Fer00] Enrico Fermi. Lectures on Quantum Mechanics. Regular и Chaotic Dynamics, 2000.

[Gal15] Grigory A. Galperin. Multidimensional Cube. MCNMO, 2015, c. 80.

[Gmu23] V. E. Gmurman. Probability Theory and Mathematical Statistics. 12th. Moscow: Yurayt, 2023.

[Gmu68] V. Gmurman. Fundamentals of probability theory and mathematical statistics. American Elsevier Pub. Co, 1968.

[GZ05] S. G. Grigoriev и S. V. Zadulina. Mathematics for students of secondary vocational education institutions. Academia, 2005.

[Han11] Jesper Schmidt Hansen. GNU Octave Beginner's Guide. Birmingham, UK: Packt Publishing, 2011.

[Har17] Kevin Hartnett. «Mathematicians Explore Mirror Link between Two Geometric Worlds». B: The Best Writing on Mathematics 2019. Princeton University Press, 2017, c. 74—80. doi: 10.1515/9780691197944-007.

[Hel67] A. Carl Helmholz. College: The Berkeley Course. American Institute of Physics, 1967.

[Hil00] David Hilbert. «Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900». B: Arch. der Math. und Physik 1 (1900), c. 44—63.

[Hud70] Derek Hudson. Statistics for Physicists. Mir, 1970.

[Izu18] Dmitry Anatolyevich Izutkin. «Epidemics in the Classical Middle Ages in Europe». B: Medical Almanac 6 (57) (2018), c. 34—37.

[Kar76] V. P. Kartsev. Maxwell. Life of Remarkable People. Molodaya Gvardiya, 1976.

[Kar83] A. A. Karatsuba. Fundamentals of Analytic Number Theory. Ripol Klassik, 1983.

[Kha62] Alexander Alexandrovich Kharkevich. Spectra and analysis. State Publishing House of Physical и Mathematical Literature, 1962.

[Khi23] A. Ya. Khinchin. Three Pearls of Number Theory. Lenand, 2023.

[Kol65] Mikhail Sergeevich Kolesnikov. Lobachevsky. Molodaya Gvardiya, 1965.

[Kub+07] R. Kubo и др. Statistical Mechanics. Modern Course with Problems and Solutions. 2007.

[Kur13] Alexander Gennadievich Kurosh. Course of Higher Algebra. Lan, 2013.

[KZ22] Yu. A. Karavaeva и O. A. Zheludova. «Green Finance of Russia». B: (2022), c. 64—67.

[LAL69] Lev Davidovich Landau, A. I. Akhiezer и Evgeny Mikhailovich Lifshitz. Course of General Physics. Mechanics and Molecular Physics. Nauka, 1969.

[LL02] Lev D. Landau и Evgeny M. Lifshitz. Course of Theoretical Physics: Volume 5 — Statistical Physics. 3rd. Fizmatlit, 2002.

[LL04] L. D. Landau и E. M. Lifshitz. Theoretical Physics. Volume 1: Mechanics. Fizmatlit, 2004.

[Mal56] Anatoliy Ivanovich Maltsev. Fundamentals of Linear Algebra. GITTL, 1956.

[MC85] D. Masser и W. Chen. «Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory». В: 25 (1985).

[MC87] I. N. Meshkov и B. V. Chirikov. Electromagnetic Field, Part 2: Electromagnetic Waves and Optics. Novosibirsk: Nauka, 1987.

[Mes14] Albert Messiah. Quantum Mechanics. Courier Corporation, 2014.

[Mes78] Albert Messiah. Quantum Mechanics. Volume 1. Nauka, 1978.

[Moc21] Shinichi Mochizuki. «Mochizuki's proof of ABC-conjecture». В: Research in the Mathematical Sciences 57.1 (2021), с. 12. doi: 10.1186/s40687-016-0057-x.

[MP22] Yuri Manin и A. Panchishkin. Introduction to Modern Number Theory. Litres, 2022.

[MW73] John Milnor и A. Wallace. Differential Topology. Mir, 1973.

[Mys72] Anatoli Dmitrievich Myshkis. Introductory Mathematics for Engineers. Lectures in Higher Mathematics. Mir Publishers, 1972.

[Neu18] John von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. New Edition. Под ред. Nicholas A. Wheeler. Пер. Robert T. Beyer. New Edition. Originally published in German 1932. Princeton: Princeton University Press, 2018.

[Odl87] Andrew M Odlyzko. «On the distribution of spacings between zeros of the zeta function». В: Mathematics of Computation 48.177 (1987), с. 273—308.

[Osi06] Yuri S. Osipov. The Russian Academy of Sciences, 2006 Update. 2006.

[Pen05] Roger Penrose. Shadows of the Mind: In Search of a Science of Consciousness. Institute of Computer Research, 2005.

[Pet01] D. Petz. «Entropy, von Neumann and the von Neumann Entropy». В: John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics. Под ред. M. Rédei и M. Stoltzner. Kluwer, 2001, с. 83—96.

[Pon86] Lev Semenovich Pontryagin. Generalizations of Numbers. Nauka, 1986.

[Pra76] K. P. Prahar. Distribution of Prime Numbers. Mir, 1976.

[PT09] M. I. Petrashen и E. D. Trifonov. Applications of Group Theory in Quantum Mechanics. Courier Corporation, 2009.

[Pto+98] Claudius Ptolemy и др. Almagest: or Mathematical Composition in Thirteen Books. Nauka, 1998.

[Rem21] Grant N. Remmen. «Amplitudes and the Riemann Zeta Function». В: Phys. Rev. Lett. 127 (24 дек. 2021), с. 241602. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.241602.

[Rie76] Bernhard Riemann. Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. BG Teubner, 1876.

[Sad04] V. A. Sadovnichy. Theory of Operators. Moscow University Press, 2004.

[Sel03] Fedor Andreevich Selivanov. Search for the wrong and the right. Tyumen State University, 2003.

[Sku10] D. P. Skulachev. «Correlation of data on anisotropy of relic radiation in WMAP and Relikt-1 experiments». B: Uspekhi Fizicheskikh Nauk 180.4 (2010), c. 389—392.

[SM02] Ferenc Szidarovszky и Sandor Molnar. Introduction to Matrix Theory: With Applications to Business and Economics. First. Concrete and Applicable Mathematics. World Scientific Publishing Company, 2002.

[Spe10] Oswald Spengler. The Decline of the West. 6. Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education, 2010, c. 226—236.

[ST01] H. Seifert и W. Threlfall. Topology. Izhevsk: Regular и Chaotic Dynamics, 2001.

[Tak08] L. A. Takhtajan. Quantum Mechanics for Mathematicians. T. 95. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2008.

[Tit53] E. C. Titchmarsh. Theory of the Riemann Zeta Function. IL, 1953.

[Tit86] E. C. Titchmarsh. The Theory of the Riemann Zeta-Function. The Clarendon Press Oxford University Press, 1986.

[Vin03] Ernest Borisovich Vinberg. A Course in Algebra. T. 56. American Mathematical Soc., 2003.

[Vin13] Ivan Matveevich Vinogradov. The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Courier Corporation, 2013.

[Vin18] Ivan Matveevich Vinogradov. Fundamentals of Number Theory. Litres, 2018.

[Vla76] Vasilii Sergeevich Vladimirov. Equations of Mathematical Physics. 1976.

[Wei72] André Weil. Foundations of Number Theory. Moscow: Mir, 1972.

[Wil95] Andrew Wiles. «Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem». B: The Annals of Mathematics 141.3 (май 1995), c. 443. doi: 10.2307/2118559.

[Woj16] H. Wojciechowski. «Quantum diffraction grating: A possible new description of nuclear elastic scattering». B: International Journal of Modern Physics E 25.2 (2016). doi: 10.1142/S0218301316500087.

[Woo00] Max SC Woon. «On partitions of Goldbach's conjecture». B: arXiv preprint math/0010027 (2000).

[Zad69] Nikolai Zadornov. First Discovery. To the Ocean. Library of Historical Novel, 1969.

[Zel02] V. G. Zelevinsky. Quantum Physics Lectures. NSU, 2002.

[Авд20] Марат Александрович Авдыев. «Базы данных для ЭВМ Доказательство теоремы Ферма для Миллиардов на основе школьных знаний 11.03.2020». Russian. Пат. 2020621077 (https://new.fips.ru/registers). 2020.

[Авд23] МА Авдыев. «Великая головоломка, как индикатор суверенизации Российской науки». В: Интерактивная наука 4 (80) (2023), с. 68—75.

[АО 62] Ю. В. Линник АО Гельфонд. Элементарные методы в аналитической теории чисел. 1962.

[АР87] К Аэрленд и М Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.

[ББ09] НВ Бугель и ВГ Булавчик. Правовая статистика: Учебное пособие. 2009.

[Бор+85] Шафаревич Боревич ЗИ и др. Теория чисел. Наука, 1985.

[Бух13] Александр Адольфович Бухштаб. Теория чисел. Рипол Классик, 2013.

[Ван79] Бартел Лендерт Ван дер Варден. Алгебра. 1979.

[Вей72] Андрэ Вейль. Основы теории чисел. Мир, 1972.

[Вин02] ЭБ Винберг. Курс алгебры. 3-е изд. Т. 544. 2002.

[Вин18] Иван Матвеевич Виноградов. Основы теории чисел. Litres, 2018.

[Вир10] Нецветаев Н Ю Харламов В М Виро О Я Иванов О А. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 352 с, 2010.

[Вор+88] ИИ Воробьев и др. Задачи по физике. М.: Наука, 1988.

[Гму23] В Е Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Т. 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт. 2023.

[Гри04] Брайан Грин. Элегантная вселенная. 2004, с. 286.

[Деп65] Иван Яковлевич Депман. История арифметики. Просвещение, 1965.

[Дер10] Д Дербишир. Простая одержимость : Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир ; Джон Дербишир ; пер. Пер. Alexey Semikhatov. –. с англ. Алексея Семихатова. – Москва: Астрель, – 463 с, 2010.

[Дио07] Александрийский Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. URSS, 2007.

[ЖВ22] Виктор Жаринов и Василий Владимиров. Уравнения математической физики. Litres, 2022.

[Зад69] Николай Задорнов. Первое открытие. К океану. Библиотека исторического романа, 1969.

[Зел02] В. Г. Зелевинский. Лекции по квантовой физике. Под ред. Новосибирский государственный университет. НГУ, 2002.

[Изу18] Дмитрий Анатольевич Изуткин. «Эпидемии в эпоху классического средневековья в Европе». В: Медицинский альманах 6 (57) (2018), с. 34—37.

[Кар76] ВП Карцев. Максвелл/Серия: Жизнь замечательных людей.- М. 1976.

[Кар83] АЛ Карацуба. Основы аналитической теории чисел. Рипол Классик, 1983.

[КЖ22] ЮА Караваева и ОА Желудова. «ЗЕЛЕНЫЕ ФИНАНСЫ РОССИИ». В: (2022), с. 64—67.

[Кин] Мариус Кинтел. OpenSCAD - это программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Это свободное программное обеспечение распространяется под лицензией GPL работает под операционными системами Linux / UNIX, Windows и Mac OS X. url: https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/index.php.

[Кол65] Михаил Сергеевич Колесников. Лобачевский. Молодая гвардия, 1965.

[Кре21] Альфред Иосифович Крейк. «Некоторые теоретико-методологические основы рассмотрения синергии в социуме». В: Вестник экономики, права и социологии 1 (2021), с. 149—152.

[Куб07] Р Кубо. Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме. 2007.

[Кур13] Александр Геннадиевич Курош. Курс высшей алгебры. Издательство Лань, 2013.

[ЛАЛ69] Лев Давидович Ландау, АИ Ахиезер и Евгений Михайлович Лифшиц. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. Наука, 1969.

[Лан04] Лившиц Ландау. Теоретическая физика. Том 1. Механика. Под ред. Физматлит. Физматлит, 2004.

[ЛЛ02] ЛД Ландау и ЕМ Лифшиц. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. TV Статистическая физика. М.: наука, 2002.

[ЛЛ76] ЛД Ландау и ЕМ Лифшиц. Теоретическая физика. Том. 5. Статистическая физика. Часть 1. для книг и брошюр): Наука, 1976.

[Мал56] Анатолий Иванович Мальцев. Основы линейной алгебры. ГИТТЛ, 1956.

[Мат70] Юрий Владимирович Матиясевич. «Диофантовость перечислимых множеств». В: Доклады Академии наук. Т. 191. 2. Российская академия наук. 1970, с. 279—282.

[Мат93] Юрий В Матиясевич. «Десятая проблема Гильберта». В: М.: Физматлит (1993).

[Мес78] Альберт Мессиа. Квантовая механика. Том 1. Наука, 1978.

[Мес79] А Мессиа. Квантовая механика, в 2 т. 1979.

[Миг13] Аркадий Бенедиктович Мигдал. Приближенные методы квантовой механики. Рипол Классик, 2013.

[МП22] Юрий Манин и А Панчишкин. Введение в современную теорию чисел. Litres, 2022.

[МУ73] Дж Милнор и А Уоллес. Дифференциальная топология. Мир, 1973.

[МЧ14] Игорь Николаевич Мешков и Борис Валерианович Чириков. Электромагнитное поле. Часть 2. Электромагнитные волны и оптика. Регулярная и хаотическая динамика, 2014.

[Мыш72] А. Д. Мышкис. Высшая математика. Специальные курсы. Физматлит, 1972.

[НВ04] Ефимов Н.В. Высшая геометрия. Учебник. Физматлит, 2004.

[Ней64] Иоганн фон Нейман. Математические основы квантовой механики. 1964.

[Нов04] Федор Алексеевич Новиков. Дискретная математика для программистов. Питер, 2004.

[Оси07] Юрий Сергеевич Осипов. Большая российская энциклопедия. Т. 8. Большая российская энциклопедия, 2007.

[Пар83] Э Парселл. Берклеевский курс физики. Рипол Классик, 1983.

[Пен05] Роджер Пенроуз. Тени разума в поисках науки о сознании. Институт компьютер. исслед., 2005.

[Пет99] Трифонов Евгений Дмитриевич Петрашень Мария Ивановна. Применение теории групп в квантовой механике. Издательская группа УРСС, 1999.

[Пон86] Лев Семенович Понтрягин. Обобщения чисел. Наука, 1986.

[Пос21] АВ Постолит. «Основы искусственного интеллекта в примерах на Python». В: Самоучитель. СПб.: БХВ-Петербург (2021).

[Пра] К. П. Прахар. Распределение простых чисел. Под ред. Мир. с нем. А. А. Карацубы.

[ПС86] Илья Пригожин и Изабелла Стенгерс. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. Т. 432. 1986, с. 3.

[Пто+98] Клавдий Птолемей и др. Альмагест: или математическое сочинение в тринадцати книгах. Наука, 1998.

[Риб03] П Рибенбойм. Последняя теорема Ферма для любителей. М.: Мир, 2003.

[Рим48] Риман. Риман Бернгард. Сочинения. Перевод с нем. под ред. В.Л.Гончарова. ОГИЗ Гос. издательство технич. теоретич. литературы, 1948.

[С Г05] С В Задулина С Г Григорьев. Математика для студентов учреждений среднего проф. образования. Образовательный центр Академия, 2005.

[Сад04] Виктор Антонович Садовничий. Теория операторов. 2004.

[Сел03] Федор Андреевич Селиванов. Поиск ошибочного и правильного. Изд-во Тюмен. гос. у-та, 2003.

[Сер59] Вацлав Серпинский. Пифагоровы треугольники. 1959, с. 5—12.

[Сиз07] Сергей Викторович Сизый. Лекции по теории чисел. 2007.

[Син00] Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Т. 288. 2000.

[Ску10] ДП Скулачёв. «Корреляция данных по анизотропии реликтового излучения в экспериментах WMAP и"Реликт-1"». В: Успехи физических наук 180.4 (2010), с. 389—392.

[Тах11] ЛА Тахтаджян. Квантовая механика для математиков, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск 2011, 496 с.; English transl., LA Takhtajan, Quantum mechanics for mathematicians. Т. 95. 2011.

[Тит53] ЕК Титчмарш. Теория дзета-функции Римана. ИЛ, 1953.

[Тич53] ЕК Тичмарш. «Дзета-функция Римана». В: (1953).

[Тре01] Зейферт Трельфалль. Топология. Зейферт Г Трельфалль В. Под ред. Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

[Фер00] Э Ферми. «Лекции по квантовой механике.» В: (2000).

[Хар62] Александр Александрович Харкевич. Спектры и анализ. Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

[Хоа14] Наварро Хоакин. Неуловимые идеи и вечные теоремы. Великие задачи математики. 2014, с. 84—160.

[Худ70] Дерек Худсон. Статистика для физиков. Мир, 1970.

[Чан74] Комараволи Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел. Мир, 1974.

[Шпе10] Освальд Шпенглер. закат Европы. 6. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего . . ., 2010, с. 226—236.

[Эвк48] Эвклид. Начала Евклида Книга II Перевод Д.Д.Мордухай-Болтовского. Под ред. И.Н.Веселовский М.Я.Выгодский. ГТТИ, 1948, с. 123—142.

[Эдв80] Г Эдвардс. Последняя теорема Ферма. М.: Мир, 1980.

[Ю12] Белова Л Ю. Элементы теории множеств и математической логики. 2012, с. 26—27.

[ЯН12] Шинтан Яу и Стив Надис. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. Питер, 2012.

List of Figures

1.1 Дзета - функция Римана 7
1.2 Георг Фридрих Бернхард Риман 1826-1866 8
2.3 Лев Давидович Ландау 15
2.4 Джеймс Клерк Максвелл 16
2.5 Исследуемая (термодинамическая) система - выделенная для наблюдения часть Вселенной, состоящая из подсистем с заданным числом частиц, энергией и температурой. 17
3.6 Homomorphism 29
6.7 Дифракционная решётка 50
6.8 Интенсивность света 53
7.9 Джозайя Уиллард Гиббс 60
7.10 Владимир Андреевич Стеклов 68
8.11 Формула Планка. Распределения энергии по частотам. 70
8.12 Макс Планк 1858-1947 71
8.13 Поль Дирак 75

1.2 И.М. Виноградов 80
1.1 Христиан Гольдбах 80
1.3 Чэнь Цзинжунь 81
3.4 Леонард Эйлер 85
7.5 Модель иллюстрирует изоморфизм 101
8.6 Лев Семёнович Понтрягин 113
8.7 Жозеф Луи Франсуа Бертран 116
8.8 Сриниваса Рамануджан 117
9.9 Теорема Гольдбаха 120

2.1 Авторы ABC-гипотезы 126
2.2 Шиничи Мочизуки 128
3.3 Джон фон Нейман 131
3.4 Термодинамические системы 139
4.5 Гомоморфизм 144
8.6 Пафнутий Львович Чебышёв 165
9.7 Гистограмма иная 175
9.8 Гистограмма распределения плотности вероятности 176
10.9 Людвиг Больцман 181

3.1 Пьер де Ферма 1607-1665 190
4.2 Кубы и шары 191
6.3 Полусферы 194
7.4 Эквивалент слоев 198
7.5 Пифагорова тройка в 3D 200

8.6 Преобразование кружки в тор . . . 202
9.7 Декартово произведение . . . 203
9.8 Счетность множества рациональных чисел . . . 204
9.9 Георг Кантор . . . 205
10.10 Вложенные n-кубы и шары . . . 205
10.11 Тадж Махал . . . 207
11.12 Слой и множество слоёв . . . 210
11.13 Тайная Вечеря . . . 212
12.14 Куб дефектов . . . 217
12.15 Фрактальное множество Бенуа Мандельброта . . . 218
12.16 n-кубовая структура . . . 219
13.17 Грани куба . . . 223
14.18 Разрешимо ли это Диофантово уравнение? . . . 225
15.19 Григорий Перельман 1966 . . . 229
15.20 Николай Иванович Лобачевский . . . 231

6.1 Петер Густав Лежён Дирихле . . . 255

1.1 Riemann Zeta function . . . 267
2.2 Bernhard Riemann 1826-1866 . . . 269
2.3 Lev Davidovich Landau . . . 276
2.4 James Clerk Maxwell . . . 277
2.5 The studied (thermodynamic) system is a part of the universe allocated for observation, consisting of subsystems with a given number of particles, energy and temperature. . . . 278
3.6 Homomorphism . . . 289
7.7 Diffraction grating . . . 306
7.8 The light intensity . . . 309
8.9 Josiah Willard Gibbs . . . 315
9.10 Planck's formula. Frequency distribution of energy. . . . 325
9.11 Max Planck 1858-1947 . . . 325
9.12 Paul Dirac . . . 329

1.1 Christian Goldbach . . . 334
1.2 Christian Goldbach . . . 335
1.3 Chen Jingrun . . . 336
1.4 I.M. Vinogradov . . . 336
3.5 Leonhard Euler . . . 339
7.6 The model illustrates the isomorphism . . . 352
8.7 Lev Semenovich Pontryagin . . . 365
8.8 Joseph Louis François Bertrand . . . 368
8.9 Srinivasa Ramanujan . . . 369
9.10 Goldbach's theorem . . . 372

2.1 Authors of the ABC conjecture . . . 377
2.2 Shinichi Mochizuki . . . 379

3.3 John von Neumann 383
3.4 Thermodynamic systems 389
4.5 Homomorphism 394
8.6 Paphnutiy Lvovich Chebyshev 414
9.7 The histogram is different 423
9.8 Histogram of probability density distribution 424
10.9 Ludwig Boltzmann 429

4.1 Cubes and balls 438
6.2 Hemispheres 440
7.3 Equivalece of layers 443
7.4 Pythagorean three in 3D 445
11.5 Nested n-Cubs and Balls 448
13.6 Set of layers 451
13.7 L'ultima Cena 455
15.8 Defect cubes 458
15.9 n-cube structure 459
16.10 Six faces of a cube 464
17.11 Is this Diophantine equation solvable? 466
19.12 Grigory Perelman 1966 469
19.13 Nikolai Ivanovich Lobachevsky 471

7.1 Peter Gustav Lejeune Dirichlet 495

5.1 Гюнтера фон Хагенса 513
6.2 Иммануил Кант 1724-1804 519

6.1 Gunther von Hagens 533
8.2 Immanuel Kant 1724-1804 539

Об авторе

Марат Александрович Авдыев, директор Союза “Сибирский центр медиации” с 2000 года, тренер-медиатор, физик, выпускник физико-математической школы при Новосибирском государственном университете, дипломированный физик этого же университета и выпускник аспирантуры Новосибирского государственного технического университета. Практикующий юрист-правозащитник и тренер -медиатор 25 лет практики разрешения ”тупиковых конфликтов” в самых разных социальных сферах. Консультант Правительства Амурской области, Правительства Забайкальского края, АО ”Самрук-Казына” (Казахстан), Новосибирского завода химконцентратов (группа "Росатом") и других.

Свою практику начинал в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН. Автор около пятидесяти научных статей и ряда научных монографий. Продюсер учебных фильмов и мультфильмов по физике, математике, разрешению конфликтов. Имеет ряд свидетельств о регистрации базы данных для ЭВМ. Блог автора в ВКонтакте:
https://vk.com/emediator Эл. почта: marat@emediator.ru Marat Alexandrovich Avdyev, Director of the Siberian Mediation Center Union since 2000, mediator coach, physicist, graduate of the Physics and Mathematics School at Novosibirsk State University, graduate physicist at the same University and graduate of the Novosibirsk State Technical University. He is a practicing human rights lawyer and mediator coach with 25 years of practice in resolving ”deadlock conflicts” in a variety of social spheres. Consultant to the Government of the Amur Region, the Government of the Trans-Baikal Territory, Samruk-Kazyna JSC (Kazakhstan), Novosibirsk Chemical Concentrates Plant (Rosatom Group) and others.

He started his practice at the Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS. He is the author of about fifty scientific articles and a number of scientific monographs. Producer of educational films and cartoons on physics, mathematics, conflict resolution. He has a number of certificates of registration of a computer database. The author of short versions of the proofs of Fermat’s Last Theorem and the ABC conjecture. Author’s blog
https://vk.com/emediator email: marat@emediator.ru

Использованы следующие интеллектуальные ресурсы

Эта книга была подготовлена с помощью шаблона Federico Marotta (federicomarotta@mail.com) На основе докторской диссертации Ken Arroyo Ohori KOMA-Script и LaTeX с использованием kaobook class. в редакторе TeXstudio 4.8.3 Copyright (c) TeXstudio: Benito van der Zander, Jan Sundermeyer, Daniel Braun, Tim Hoffmann, Texmaker: Pascal Brachet, QCodeEdit: Luc Bruant html conversion: Joël Amblard Шаблон доступен по ссылке : https://github.com/fmarotta/kaobook

- Репродукция с картины Тайная Вечеря Леонардо да Винчи, а также фото учёных: Ферма, Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов, Дж. К. Максвелл, Л. Больцман, Георг Кантор, источник: агрегатор "Яндекс Картинки" в соответствии со ст. 1274 ГК РФ - Свободное использование произведения в информационных, научных, учебных или культурных целях.
- Сюжет о путешествии астронавта Фёдора из книги М.А. Авдыев Восхождение к вершине гиперкуба. Издательство Ridero 2020
- Рисунки, смоделированные в OpenSCAD - программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Свободное программное обеспечение распространяется под лицензией GPL - General Public License Мариусом Кинтелом (Marius Kintel)
- Рисунки, смоделированные автором в GeoGebra LaTeX с GeoGebra Non-Commercial License Agreement GeoGebra is open source software and available free of charge for non-commercial users. General Public License.
- Фото титульной и заключительной страниц монографии сделаны автором в GIMP 2.10.38 GNU Image Manipulation Program Авторские права © 1995-2024 Spencer Kimball, Peter Mattis и команда разработчиков GIMP
- Редакция формул, исправление синтаксиса в Latex подготовлены с использованием нейросети DeepSeek.com (компания основана в конце 2023 года Лян Вэньфэном, базируется в Ханчжоу, КНР);
- Основная часть перевода на английский язык выполнена с помощью Яндекс-Переводчик и отредактирована автором

И другие интеллектуальные права. С благодарностью от автора!

Монография подготовлена под редакцией М. Ю. Фоминой. Сайт Союз Сибирский Центр медиации
https://emediator.ru

Сделанные выводы могут быть обобщены на целый ряд подсистем и в равной мере относятся как к математике (основы теории вероятности, логики), так и физике. Возможность выделения подсистемы в составе сложной системы, без изменения её свойств, позволяет сделать мир управляемым и познаваемым, редуцировать сложные явлений к простым. Простые числа — это метаязык нашей Вселенной.

Марат Авдыев

Союз "Сибирский Центр медиации"
2026